

Jerzy Zalewicz\*

## Zastosowanie dyskretnej transformaty Laplace'a do modelowania przebiegu procesów przejściowych w przemyśle

### 1. Wstęp

Przy analizie zjawisk dynamicznych związanych z komputerowym sterowaniem procesów istnieje potrzeba opisu matematycznego procesów z opóźnieniami. Stosowane są przy tym różne podejścia nie zawsze oddające z dostateczną precyzją charakter tych opóźnień.

W mechanice odzwierciedla się praktyczne własności sterowanych obiektów wprowadzając do ich opisu tzw. czas martwy. Szczególne miejsce w tym względzie zajmują procesy transportu materiałów sypkich lub płynów, a także ogrzewanie. Należą do nich wszelkiego rodzaju podajniki, rurociągi i piece. Przykładowo można wymienić długie regulacyjne podajniki węgla występujące w elektrowniach, pyłoprzewody itp. instalacje. Zwykle po upływie wielu minut (związane jest to z prędkością podajnika) następuje zmiana strumienia paliwa do paleniska kotła po jej uprzedniej zmianie. Jest to niekiedy groźne zjawisko, gdyż prowadzi do znacznego utrudnienia przy sterowaniu tego typu obiektów. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej w przypadku rurociągów z płynami. W zakresie gorącej wody dostarczanej do węzłów cieplnych niekiedy muszą upłynąć godziny (przy rozległych sieciach cieplnych), aby dokonana w elektrowni zmiana temperatury tej wody dotarła do odbiorców.

Również przy eksploatacji elektrycznych tzw. linii długich można mówić o opóźnieniach. Wreszcie w innej skali w nowoczesnej elektronice cyfrowej, sieciach komputerowych i środkach telekomunikacyjnych występują opóźnienia w przesyłaniu informacji [2].

### 2. Zarys podstaw teoretycznych

Dla członów z opóźnieniem można podać zależność łączącą sygnał wyjściowy z wejściowym

$$y(t) = kx(t - T_o) \quad (1)$$

---

\* Wydział Informatyki i Zarządzania, Wyższa Szkoła Humanistyczno-Ekonomiczna, Łódź; zalewicz@wp.pl

gdzie:

- $y(t)$  – sygnał wyjściowy,
- $x(t - T_o)$  – sygnał wejściowy,
- $k$  – współczynnik wzmocnienia,
- $T_o$  – czas opóźnienia (martwy).

Dokonując transformaty Laplace'a (1) mamy

$$Y(s) = ke^{-sT_o} X(s) \quad (2)$$

Transmitancja operatora członu opóźniającego rozumiana jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału na wyjściu członu do sygnału na jego wejściu będzie równa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = ke^{-sT_o} \quad (3)$$

Transformata Laplace'a odpowiedzi impulsowej będzie równa

$$G(s) = ke^{-sT_o} \quad (4)$$

Transformata Laplace'a odpowiedzi skokowej będzie równa

$$H(s) = \frac{G(s)}{S} = \frac{ke^{-sT_o}}{S} \quad (5)$$

W dziedzinie różnicowej opóźnienie sygnału można opisać zależnością

$$f(t - nT_s) \quad (6)$$

gdzie:

- $T_s$  – czas impulsowania,
- $n$  – wskaźnik 0÷1.

Dyskretna transformata Laplace'a dla powyższej zależności będzie miała przy  $T_s = 1$  s postać

$$Z[f(t - nT_s)] = z^{-n} F(z) \quad (7)$$

Zwykle w procesach przemysłowych czyste opóźnienie nie występuje samoistnie. Związane jest z bezwładnością elementów mechanicznych lub elektrycznych. Wówczas w modelu uwzględnić należy także właściwości inercyjne, a niekiedy oscylacyjne obiektu sterowanego.

### 3. Przykład określenia modelu dynamicznego podajnika

W celu pełniejszego zapoznania z proponowanym sposobem opisu dynamiki podajnika podany zostanie przykład. Niech dynamikę podajnika opisuje transmitancja operatora

$$G(s) = \frac{ke^{-nT_s}}{ST+1} \quad (8)$$

Jest ona rozumiana nieco inaczej jak poprzednio i będzie to stosunek transformaty Laplace'a sygnału na wyjściu układu składającego się z członu inercyjnego i opóźniającego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego.

Przyjmując  $k = 5$ ,  $n = 10$ ,  $T_s = 1$  s,  $T = 100$  s, mamy

$$G(s) = \frac{5e^{-10s}}{100s+1} \quad (9)$$

Transmitancję tą można rozbić na dwa człony

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (10)$$

gdzie:

$$G_1(s) = \frac{5}{100s+1} \quad (11)$$

$$G_2(s) = e^{-10s} \quad (12)$$

Przechodząc do dyskretnej transformaty Laplace'a i stosując oprogramowanie MATLAB mamy dla  $G_1(s)$ :

$$l = [5] \quad (13)$$

$$m = [100 \quad 1]$$

Dla okresu impulsowania równego 1 s mamy

$$[ld, md] = c2dm(l, m, 1, 'zoh') \quad (14)$$

stąd:

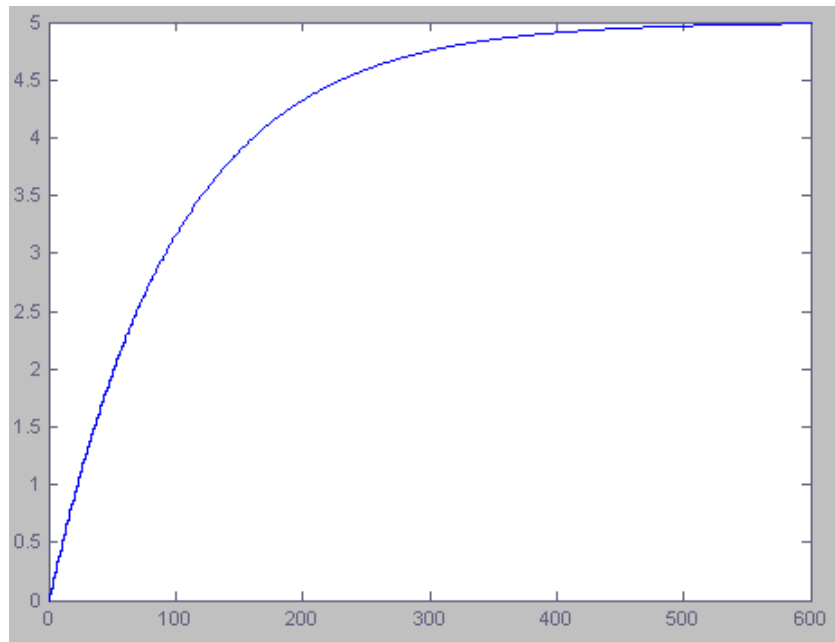
$$ld = 0 - 0,0498$$

$$md = 1,0000 - 0,9900$$

a dyskretna transmitancja operatorowa tego członu będzie miała postać

$$G_1(z) = \frac{0,0498}{z - 0,99} \quad (15)$$

Na rysunku 1 przedstawiono odpowiedź członu inercyjnego na skok jednostkowy dla układu opisowego transmitancją operatorową (11), czyli  $\text{step}(l, m)$  oraz odpowiedź członu na skok jednostkowy dla układu opisanego dyskretną transmitancją operatorową (15), czyli  $\text{dstep}(ld, md)$ .



**Rys. 1.** Odpowiedź członu inercyjnego na skok jednostkowy  $\text{step}(l, m)$  oraz dyskretnego członu inercyjnego na skok  $\text{dstep}(ld, md)$

Dla  $G_2(s)$  postępuje się inaczej. Należy dokonać dyskretnej transformaty Laplace'a funkcji jej odpowiadającej

$$\delta_0(n - 10T_s) = \delta_0(n - 10 * 1) = \delta_0(n - 10) \quad (16)$$

Wówczas mamy

$$G_2(z) = Z[\delta_0(n - 10)] = z^{-10} \quad (17)$$

gdzie:

$\delta_0$  – funkcja Kroneckera [1],

$Z$  – oznaczenie dyskretnej transformaty Laplace'a,

przy czym:

$$\delta_0(kT) = 1 \text{ dla } k = 0 \quad (18)$$

$$\delta_0(kT) = 0 \text{ dla } k \neq 0$$

Ostatecznie

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{0,0498}{z-0,99} z^{-10} \quad (19)$$

lub

$$G(z) = \frac{0,0498}{z^{11} - 0,99z^{10}} \quad (20)$$

Transmitancja ta może być zapisana inaczej

$$G(z) = \frac{0,0498}{z^{11} - 0,99z^{10} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0} \quad (21)$$

Wykorzystując oprogramowanie MATLAB mamy:

$$ld = [0,0498] \quad (22)$$

$$md = [1-0,99 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Odpowiedź na skok jednostkowy dla transmitancji (21) przedstawiono na rysunku 2 `dstep(ld, md)`.

W oprogramowaniu MATLAB istnieje stosowna procedura w *Control System Toolbox* – *discretization* pozwalająca poddać analizie wpływ opóźnienia na zachowanie się układu dynamicznego.

Dla transmitancji operatorowej (9) mamy:

$$h = tf(5, [100 \quad 1], 'inputdelay', 10);$$

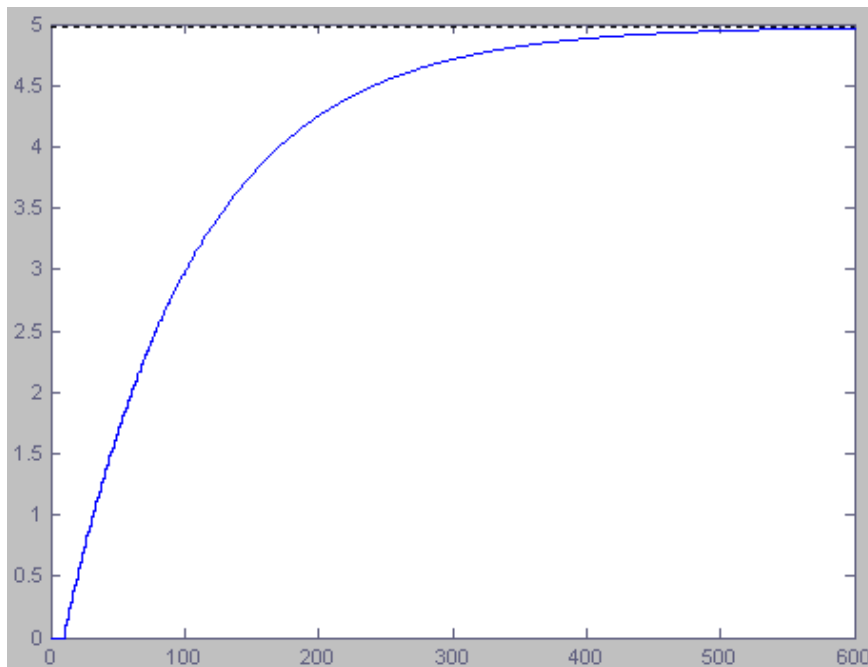
$$hd = c2d(h, 1).$$

Transfer function

$$z^{-10} * \frac{0,04975}{z-0,99} \quad (23)$$

sampling time:1

`step(h, '--', hd, '-')`



**Rys. 2.** Odpowiedź dyskretnego układu inercyjnego z opóźnieniem na skok jednostkowy `dstep(ld, md)` oraz odpowiedź na skok jednostkowy dyskretnego układu inercyjnego z opóźnieniem wyznaczonego w *Control System Toolbox*, `step(h, '--', hd, '-')`

Odpowiedź układu na powyższy skok jednostkowy jest identyczna jak dla poprzednio rozważonego przypadku i przedstawiono ją na rysunku 2.

Procedura związana z opisem matematycznym układów z opóźnieniem będzie polegać w oparciu o analizę:

- zdjętych charakterystyk dynamicznych na:
  - oszacowaniu opóźnienia w jednostkach czasu (w przykładzie 10 s),
  - określeniu współczynnika wzmocnienia (w przykładzie równy 5),
  - określeniu stałej czasowej (dla przypadku procesu inercyjnego, w przykładzie 100 s);

- stałych czasowych i współczynnika tłumienia (dla przypadku procesu oscylacyjnego) na:
  - określeniu czasu impulsowania  $T_s$  (w przykładzie 1 s),
  - określeniu dyskretnej transformaty Laplace'a zarówno opóźnienia, jak i członu inercyjnego,
  - określeniu finalnej dyskretnej transformaty Laplace'a układu składającego się z członu opóźniającego oraz inercyjnego (lub innego).

#### 4. Wnioski

Dla obiektów poddawanych sterowaniu lub automatycznej regulacji związanych z opóźnieniami transportowymi celowe jest wykorzystanie metod cyfrowej analizy ich właściwości w szczególności dyskretnej transformaty Laplace'a. Uzyskuje się w ten sposób możliwość precyzyjnego opisu w dziedzinie różnicowej zjawisk fizycznych, które ze swej natury są trudne do analizy w dziedzinie różniczkowej.

Przedstawiona metodyka może znaleźć zastosowanie przy konstrukcji cyfrowych regulatorów sterujących obiektami z opóźnieniami o właściwościach opisanych zależnościami dyskretnymi lub przy analizie dynamicznych właściwości konkretnych obiektów przemysłowych po poddaniu ich typowymi wymuszeniami.

#### Literatura

- [1] Ogata K.: *Discret – Time Control Systems*. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall 1995
- [2] Jacquot R.G.: *Modern Digital Control Systems*. New York, Marcel Dekker Inc 1995

