AUTOMATYKA • 2005 • Tom 9 • Zeszyt 1–2

Wojciech Mitkowski*, Krzysztof Oprzędkiewicz*

Problemy sterowania pewnej klasy systemów liniowych o niepewnych parametrach**

1. Uwagi wstępne

Przedziałowy system dynamiczny stanowi rozszerzenie i uogólnienie systemu dynamicznego o znanych parametrach. Jego definicja jest podana np. w pracy [6]. W pracy jest rozważany liniowy stacjonarny system dynamiczny o niepewnych parametrach, opisany następującym równaniem stanu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(q)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy wektor niepewnych parametrów systemu przez q. Może on być zapisany następująco: $q = [q_1, q_2]^T$, $q \in Q$, gdzie Q oznacza cały obszar niepewnych parametrów. Elementy wektora q są następującymi liczbami przedziałowymi:

$$q_1 = [\underline{q}_1, \overline{q}_1] \tag{2}$$

$$q_2 = [\underline{q}_2, \overline{q}_2] \tag{3}$$

Wierzchołki obszaru niepewnych parametrów Q są zdefiniowane następująco:

$$\begin{cases} q_{ll} = [\underline{q}_1, \underline{q}_2] \\ q_{lh} = [\underline{q}_1, \overline{q}_2] \\ q_{hl} = [\overline{q}_1, \underline{q}_2] \\ q_{hh} = [\overline{q}_1, \overline{q}_2] \end{cases} \tag{4}$$

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, wmi@ia.agh.edu.pl; kop@uci.agh.edu.pl

** Praca została zrealizowana w ramach umowy nr 1111120230

Następnie załóżmy, że elementy $a_{ij}(q)$ macierzy stanu $A(q)$ są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów systemu q_1 i q_2. Można to zapisać następująco

$$a_{ij}(q) = (v_{ij} \,|\, \tilde{q}) \tag{5}$$

gdzie:

- $(.|.)$ – standardowy iloczyn skalarny,
- $v_{ij} = [v_{1ij}, v_{2ij}, v_{3ij}]^T$,
- $\tilde{q} = [q_1, q_2, 1]^T$.

Z kolei elementy macierzy sterowań B i macierzy wyjścia C systemu są dokładnie znane i możemy je oznaczyć odpowiednio przez b_i i c_i, gdzie $i = 1, ..., n$. Zakładamy, że wszystkie te elementy są niezerowe:

$$\begin{cases} b_i \neq 0, \; i = 1, ..., n \\ c_i \neq 0, \; i = 1, ..., n \end{cases} \tag{6}$$

2. Widmo rozważanego systemu i jego geometryczna interpretacja

Oznaczmy widmo rozważanego systemu o niepewnych parametrach przez $\Lambda(A(q))$. Załóżmy, że rozważany system $\forall q \in \sim Q$ posiada wyłącznie pojedyncze izolowane wartości własne. Jest to zbiór wartości własnych systemu, które są otrzymywane jako zbiór rozwiązań przedziałowego równania charakterystycznego systemu

$$\det(\Lambda I - A(q)) = 0 \tag{7}$$

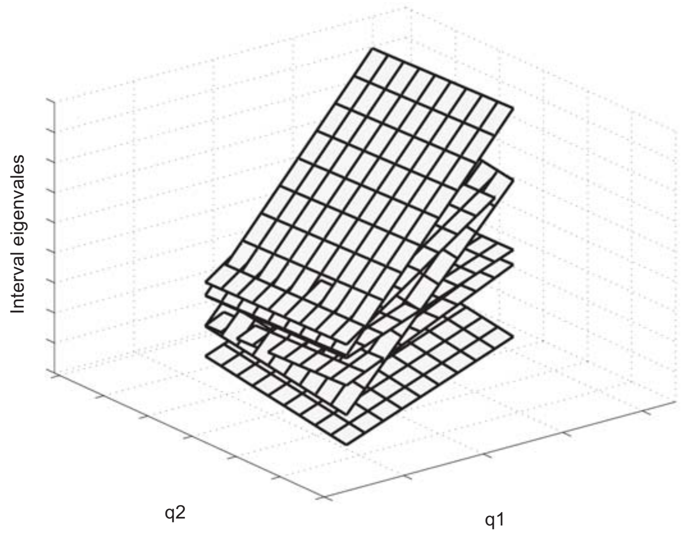
Widmo może być zapisane następująco

$$\Lambda(A(q)) = \{\Lambda_1(q), \Lambda_2(q), ..., \Lambda_n(q)\} \tag{8}$$

Przedziałowe wartości własne $\Lambda_i(q)$ są w ogólnym przypadku nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów q. Ze względu na wymiar przestrzeni niepewnych parametrów Q równy 2, widmo rozważanego systemu o niepewnych parametrach opisane przez (8) posiada prostą interpretację geometryczną (zob. [14]). Może ono być interpretowane jako zbiór powierzchni w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przykładowa geometryczna interpretacja widma podana jest na rysunku 1.

Teraz oznaczmy ekstremalne wartości każdej z przedziałowych wartości własnych:

$$\begin{cases} \Lambda_i^{\max} = \sup \Lambda_i(q), \; q \in Q \\ \Lambda_i^{\min} = \inf \Lambda_i(q), \; q \in Q \end{cases} \tag{9}$$



Rys. 1. Widmo systemu przedziałowego w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Wartości ekstremalne (9) mogą, ale nie muszą być zlokalizowane na brzegu obszaru Q. Następnie zauważmy, że każda z wartości własnych Λ_i może być interpretowana jako następująca liczba przedziałowa

$$\Lambda_i = [\Lambda_i^{\min}, \Lambda_i^{\max}] \tag{10}$$

3. Uwagi o transformacji równania stanu systemu do postaci kanonicznej Jordana

W przypadku rozważanego systemu dynamicznego o niepewnych parametrach opisanego równaniem stanu (1) można od razu zauważyć, że w obrębie obszaru niepewnych parametrów Q równanie stanu po transformacji układu współrzędnych może przybrać różną postać w zależności od wzajemnej lokalizacji wartości własnych:

- w podobszarach, gdzie wartości własne mają części wspólne, macierz stanu może być macierzą blokowo diagonalną, gdyż w tych podobszarach system ma wielokrotne wartości własne i mogą wystąpić nieliniowe dzielniki elementarne;
- w podobszarach, gdzie wartości własne nie mają części wspólnych, macierz stanu systemu jest macierzą diagonalną, gdyż w tych podobszarach system ma jednokrotne wartości własne (dzielniki elementarne są liniowe).

W tym miejscu warto przypomnieć, że postać kanoniczna Jordana macierzy stanu jest określona poprzez dzielniki elementarne tej macierzy. Każdemu dzielnikowi odpowiada jedna „klatka” jordanowska.

Z tego względu kluczowym problemem podczas diagonalizacji macierzy stanu dla rozważanego systemu jest sprawdzenie na początku (np. symulacyjne) ewentualnego istnienia i lokalizacji obszarów, w których wartości własne mają części wspólne. Do oszacowania wzajemnej lokalizacji wartości własnych systemu zostanie wykorzystana geometryczna interpretacja widma systemu, omówiona w poprzednim podrozdziale. W przypadku rozważanego systemu można sformułować następujące uwagi.

Uwaga 1

Załóżmy, że:

– rozważamy system liniowy o niepewnych parametrach, opisany przez (1)–(5)
– wartości własne systemu są powierzchniami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$
– dla każdej pary przedziałowych wartości własnych zachodzi następująca relacja

$$\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset \tag{11}$$

Następujące sformułowania są sobie równoważne:

1. Rozważany system o niepewnych parametrach ma wyłącznie jednokrotne wartości własne $\Lambda_1(q)$,
2. Macierz stanu w postaci kanoniczna Jordana $J = \mathrm{diag}\{\Lambda_1(q), \Lambda_2(q), ..., \Lambda_n(q)\}$ zawiera wyłącznie klatki jordanowskie o wymiarze 1×1.

Powyższą uwagę można uzasadnić bezpośrednio geometryczną interpretacją widma systemu, omówioną w poprzednim podrozdziale. Jej praktyczne wykorzystanie wymaga znajomości przedziałowych wartości własnych, (wyznaczonych analitycznie lub numerycznie), co może być dość kłopotliwe. Prostszy do sprawdzenia jest warunek sformułowany poniżej.

Uwaga 2

Załóżmy, że:

– rozważamy system liniowy o niepewnych parametrach, opisany przez (1)–(5),
– wartości własne systemu Λ_i są liczbami przedziałowymi opisanymi przez (10).

Jeżeli dla każdej pary przedziałowych wartości własnych zachodzi następująca relacja

$$\bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} [\Lambda_i^{\min}, \Lambda_i^{\max}] \cap [\Lambda_j^{\min}, \Lambda_j^{\max}] = \emptyset \tag{12}$$

to następujące sformułowania są sobie równoważne:

1. Macierz $A(q)$ o wymiarze $n \times n$ ma n różnych pojedynczych wartości własnych $\Lambda_i(q)$, $i = 1, 2, ..., n$.
2. Postać kanoniczna Jordana jest macierzą digonalną: $J = \mathrm{diag}\{\Lambda_1(q) \ldots \Lambda_n(q)\}$.

Zwróćmy uwagę, że warunek sformułowany w uwadze 2 jest słabszy, niż warunek z uwagi 1, gdyż można wskazać przypadki, kiedy warunek z uwagi 1 jest spełniony, a warunek z uwagi 2 nie zachodzi.

Ogólna postać przedziałowego równania stanu po transformacji może być zapisana następująco:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = P(q)^{-1} A(q) P(q) z(t) + P(q)^{-1} B u(t) \\ y(t) = C P(q) z(t) \end{cases} \tag{13}$$

gdzie $P(q)$ oznacza macierz transformującą, której kolumny są wektorami głównymi macierzy $A(q)$, a gdy istnieje n liniowo niezależnych wektorów głównych, to są wektorami własnymi

$$P(q) = [P_1(q) \quad P_2(q) \quad \ldots \quad P_n(q)] \tag{14}$$

przy czym przedziałowe wektory własne $P_i(q)$ są nietrywialnymi rozwiązaniami równania:

$$[\mathrm{A}(q) - \Lambda_i(q) I] P_i(q) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

Macierz przedziałowa $P(q)$ może być wyznaczona numerycznie lub dla pewnych szczególnych przypadków analitycznie.

Do dalszych rozważań możemy wprowadzić następujące oznaczenia:

$$\begin{cases} J(q) = P^{-1}(q) A(q) P(q) \\ B_J(q) = P^{-1}(q) B = [b_{J1}(q) \ldots b_{Jn}(q)]^T \\ C_J(q) = C P(q) = [c_{J1}(q) \ldots c_{Jn}(q)] \end{cases} \tag{16}$$

4. Uwagi o sterowalności i obserwowalności systemu

Zagadnienia sterowalności systemu liniowego o niepewnych parametrach rozważane były m.in. w pracach: [15, 16 i 18]. W pracach [15, 16] rozważano sterowalność systemu o niepewnych parametrach z diagonalną macierzą stanu. W pracach tych udowodniono, że własność sterowalności systemu liniowego o niepewnych parametrach z diagonalną macierzą stanu jest zdeterminowana poprzez geometrię przedziałowych wartości własnych systemu. Obszary niesterowalności w obrębie zbioru niepewnych parametrów systemu Q są generowane przez części wspólne przedziałowych wartości własnych.

Następnie można zauważyć, że własność sterowalności systemu nie zależy od postaci równania stanu i w związku z tym sterowalność może być badana po diagonalizacji, z wykorzystaniem metod opracowanych dla systemów z diagonalną macierzą stanu [15].

W przypadku rozważanego systemu o niepewnych parametrach należy rozważyć jeszcze dodatkowy problem podczas analizy sterowalności systemu po diagonalizacji macierzy stanu. Otóż macierz sterowań systemu po transformacji $B_J(q)$ jest macierzą przedziałową, której elementy są funkcjami niepewnych parametrów modelu. Można więc oczekiwać, że w obrębie obszaru Q mogą istnieć obszary, dla których elementy macierzy $B_J(q)$ będą równe zero. W związku z tym technikę omówioną w pracy [15] do badania sterowalności rozważanego systemu można zastosować po przyjęciu dodatkowego założenia, że żaden z elementów macierzy sterowań systemu po transformacji nie zawiera zera. W przypadku gdy któryś z elementów zawiera zero, to generuje on pewien podzbiór obszaru niesterowalności.

Na początku przypomnijmy pojęcia obszarów sterowalności i niesterowalności (zob. definicje 3 i 4 w pracy [15]). Przez obszar sterowalności rozumiemy taki podzbiór Q_c zbioru Q, w którym system jest sterowalny, a poprzez obszar niesterowalności Q_{nc} rozumiemy taki podobszar zbioru Q, w którym system jest niesterowalny. Przypomnijmy też, że obszary niesterowalności są generowane przez części wspólne przedziałowych wartości własnych, a ponadto – w przypadku rozważanego systemu obszary niesterowalności są generowane dodatkowo przez te podzbiory zbioru Q, dla których elementy przedziałowej macierzy sterowań $B_J(q)$ są równe zero.

W rozważanym wypadku obszar niesterowalności może być zdefiniowany następująco

$$Q_{nc} = \bigcup q_{nc} \tag{17}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} q_{nc} = \{q \in Q : \Lambda_i(q) - \Lambda_j(q) = 0 \vee b_{Ji}(q) = 0 \\ i, j = 1, \ldots, n, \ \ \mathrm{i} \neq j\} \end{aligned} \tag{18}$$

Powyższe rozważania można podsumować następująco:

– jeżeli żaden z elementów macierzy $B_J(q)$ nie zawiera zera: $\{0\} \not\in b_{J\,i}(q)\ \forall q \in Q$ oraz żadna z przedziałowych wartości własnych nie ma części wspólnej z inną: $\Lambda_i(q) \cap \Lambda_j(q) = \emptyset\ \ \forall q \in Q$, to system jest sterowalny w całym obszarze niepewnych parametrów Q, czyli obszar niesterowalności Q_{nc} jest zbiorem pustym;
– jeżeli istnieją takie wektory $q_{nc} \in Q$, dla których co najmniej jeden z elementów macierzy sterowań systemu po diagonalizacji jest równy zero, to system dla tych wektorów nie jest sterowalny, a wektory te generują obszar niesterowalności;
– jeżeli istnieją takie wektory $q \in Q$, dla których co najmniej dwie różne wartości własne mają część wspólną, to dla tych wektorów system również nie jest sterowalny i wektory te również generują obszar niesterowalności.

Problem obserwowalności systemu liniowego o niepewnych parametrach z diagonalną macierzą stanu był rozważany w pracy [17]. Ze względu na dualność obu własności, analiza obserwowalności może być przeprowadzona z zachowaniem pełnej analogii do poprzedniego podrozdziału.

W rozważanym wypadku własność obserwowalności jest zdeterminowana nie tylko przez wzajemną lokalizację wartości własnych, lecz także przez elementy $c_{Ji}(q)$ macierzy wyjścia układu po transformacji układu współrzędnych $C_J(q)$. Dla rozważanego systemu można także zdefiniować pojęcia obszarów obserwowalności Q_o oraz nieobserwowalności Q_{no} (zob. praca [17]). Obszarem obserwowalności jest taki podzbiór obszaru Q, w którym system jest obserwowalny, a obszarem nieobserwowalności jest taki podzbiór obszaru Q, w którym system nie jest obserwowalny.

Obszary nieobserwowalności Q_{no} w obrębie zbioru Q są generowane przez wektory $q_{no} \in Q$, dla których dwie różne wartości własne mają części wspólne lub element macierzy $C_J\,(q)$ jest równy zero. Formalnie obszar nieobserwowalności można zapisać w rozważanym wypadku następująco:

$$Q_{no} = \bigcup q_{no} \tag{19}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} q_{no} = \{ q \in Q : \Lambda_k(q) - \Lambda_l(q) = 0 \vee c_{Jk}(q) = 0 \\ k, l = 1, ..., n, k \neq l \} \end{aligned} \tag{20}$$

Powyższe rozważania można podsumować następująco:

– jeżeli żaden z elementów macierzy $C_J(q)$ nie zawiera zera: $\{0\} \notin c_{Ji}(q)\ \forall q \in Q$ oraz żadna z przedziałowych wartości własnych nie ma części wspólnej z inną: $\Lambda_i(q) \cap \Lambda_j(q) = \emptyset\ \ \forall q \in Q$, to system jest obserwowalny w całym obszarze niepewnych parametrów Q, czyli obszar nieobserwowalności Q_{no} jest zbiorem pustym;
– jeżeli istnieją takie wektory $q \in Q$, dla których co najmniej jeden z elementów macierzy wyjścia systemu po diagonalizacji $C_J(q)$ jest równy zero, to system dla tych wektorów nie jest sterowalny, a wektory te generują obszar nieobserwowalności;
– jeżeli istnieją takie wektory $q \in Q$, dla których co najmniej dwie różne wartości własne mają część wspólną, to dla tych wektorów system również nie jest sterowalny i wektory te również generują obszar nieobserwowalności.

W przypadku łącznej analizy sterowalności i obserwowalności rozważanego systemu można sformułować następującą uwagę.

Uwaga 3

Rozważmy system omawiany powyżej i załóżmy dodatkowo, że:

$$b_{Ji}(q) \neq 0\ \ \forall q\ \in Q, i = 1, ..., n,$$

$$c_{Ji}(q) \neq 0\ \ \forall q\ \in Q, i = 1, ..., n,$$

dla $i = 1, ..., n$.

Jeżeli przedstawione założenia są spełnione, to można stwierdzić, że:

$$Q_{nc} = Q_{no},$$

$$Q_c = Q_o.$$

5. Przykłady

Przykład 1

Jako pierwszy przykład rozważmy układ liniowy o niepewnych parametrach o wymiarze przestrzeni stanu równym 2. Wektory niepewnych parametrów są odpowiednio równe: $q_1 = [0,1; 0,5]$, $q_2 = [0,2; 0,7]$. Elementy macierzy stanu są następującymi funkcjami niepewnych parametrów modelu:

$$a_{11} = 0,1q_1 + 0,2q_2 + 0,3,$$

$$a_{12} = 0,8q_1 - 0,2q_2 - 0,1,$$

$$a_{21} = 0,15q_1 - 0,2q_2 - 0,5,$$

$$a_{22} = -0,5q_1 + 0,2q_2 - 0,1,$$

a macierze sterowania i wyjścia są równe:

$$B = [1,0 \quad 0,7]^T,$$

$$C = [1,0 \quad 0,5].$$

Następnie dokonujemy transformacji równania stanu rozważanego układu do postaci kanonicznej Jordana. Układ po transformacji jest opisany równaniem (13), przy czym geometryczna interpretacja elementów macierzy $B_J(q)$ oraz $C_J(q)$ pokazana jest na rysunkach 2 i 3.

Dla systemu dokonujemy sprawdzenia warunku z uwagi 2. Przedziałowe wartości własne systemu są równe:

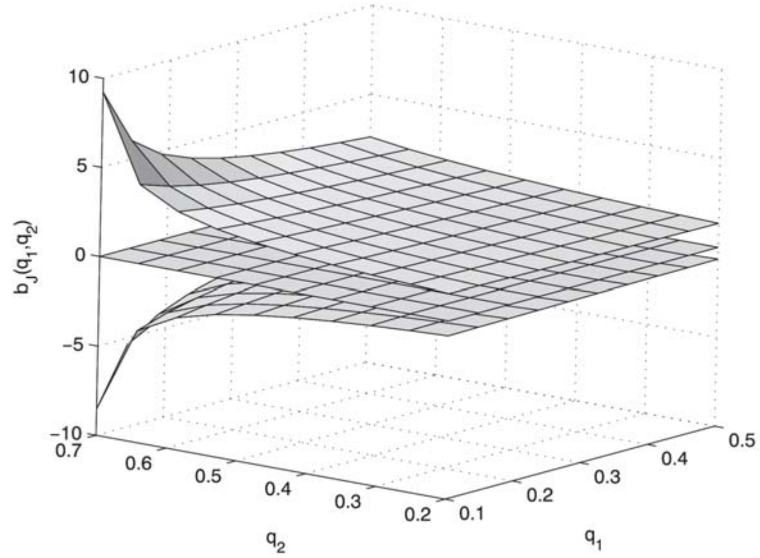
$$\Lambda_1 = [0,08; 0,611]$$

$$\Lambda_2 = [-0,171; 0,0]$$

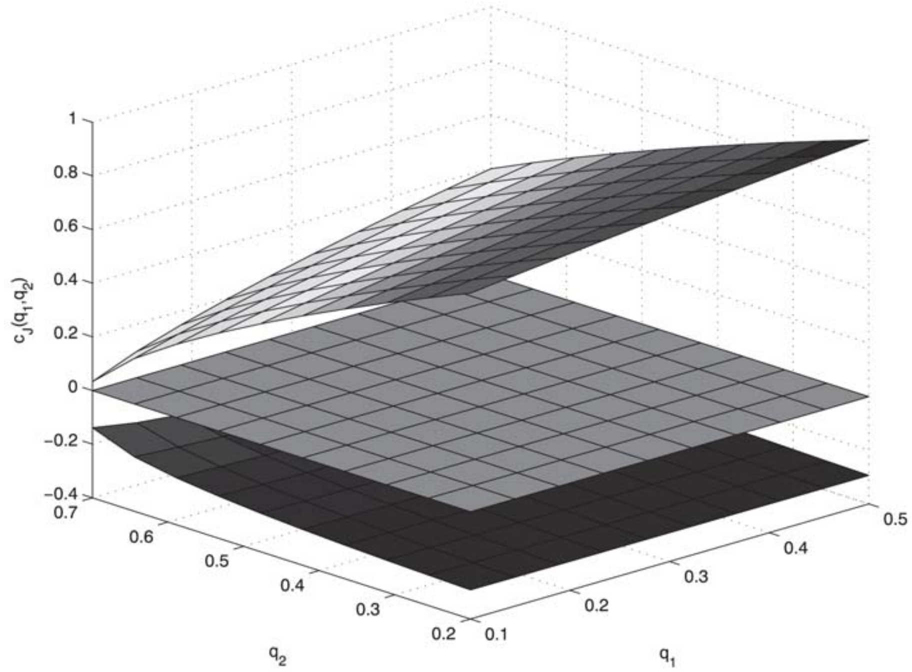
Teraz dokonujemy sprawdzenia warunków na istnienie jednokrotnych wartości własnych oraz na sterowalność systemu w całym obszarze niepewnych parametrów.

Natychmiast można zauważyć, że:

- w rozważanym przypadku $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$;
- zarówno przedziałowe elementy macierzy sterowań systemu po transformacji układu współrzędnych $B_J(q)$, jak i przedziałowe elementy macierzy wyjść systemu po transformacji układu współrzędnych $C_J(q)$ nie zawierają zera (zob. rys. 2 i 3).

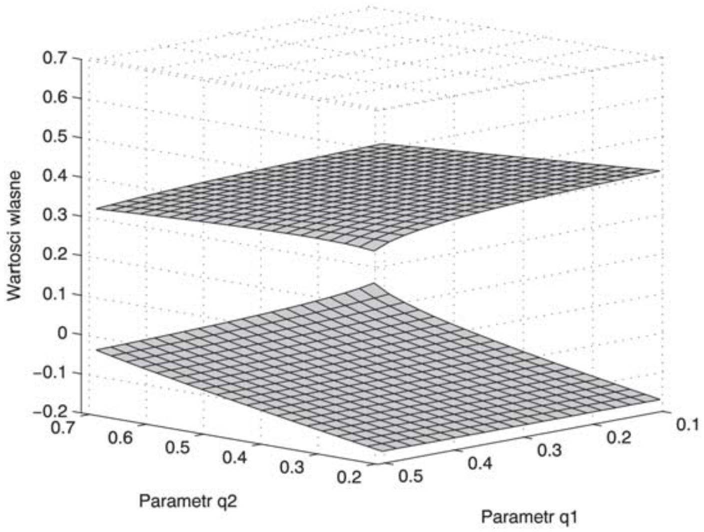


Rys. 2. Geometryczna interpretacja elementów macierzy sterowań $B_J(q)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$



Rys. 3. Geometryczna interpretacja elementów macierzy wyjść $C_J(q)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Geometryczna interpretacja przedziałowego widma systemu pokazana jest na rysunku 4.



Rys. 4. Widmo rozważanego systemu w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Z przedstawionych wcześniej uwag natychmiast można wywnioskować, że:

– system w całym obszarze niepewnych parametrów ma wyłącznie jednokrotne wartości własne,
– system jest sterowalny i obserwowalny w całym obszarze niepewnych parametrów Q.

Przykład 2

Następnie rozważmy układ liniowy o niepewnych parametrach o wymiarze przestrzeni stanu równym 2. Wektory niepewnych parametrów są odpowiednio równe: $q_1 = [0,1; 0,5]$, $q_2 = [0,2; 0,7]$. Elementy macierzy stanu są następującymi funkcjami niepewnych parametrów modelu:

$$a_{11} = 0{,}1q_1 + 5{,}0q_2 - 1{,}0,$$

$$a_{12} = 0{,}8q_1 - 0{,}2q_2 - 0{,}1,$$

$$a_{21} = 0{,}05q_1 - 0{,}1q_2,$$

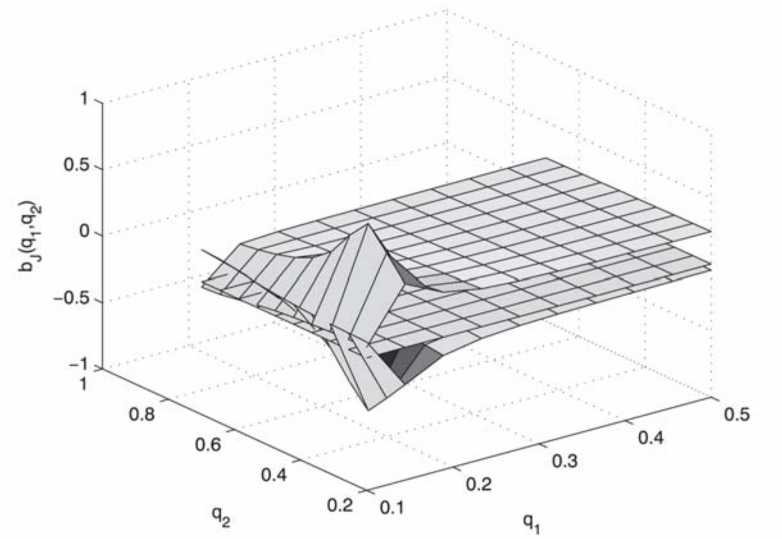
$$a_{22} = -0{,}5q_1 + 0{,}2q_2 + 0{,}3,$$

macierze sterowania i wyjścia są równe:

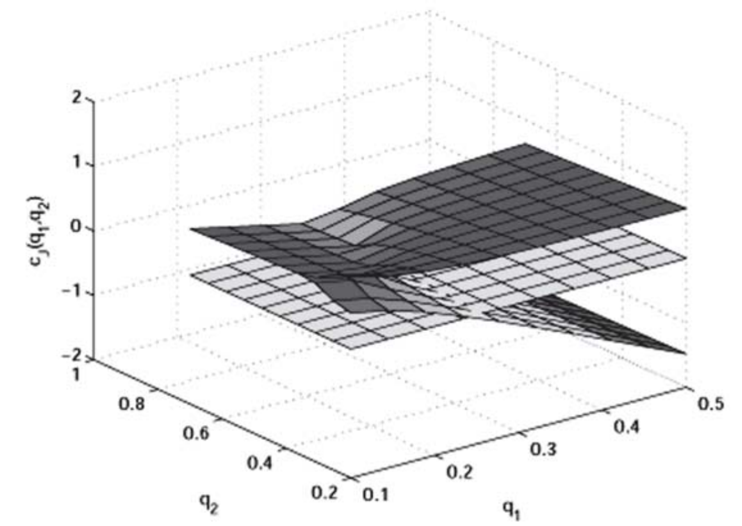
$$B = [1{,}5 \quad 0{,}2]^T,$$

$$C = [1{,}0 \quad -0{,}5].$$

Geometryczne interpretacje przedziałowych elementów macierzy $B_J(q)$ i $C_J(q)$ są pokazane na rysunkach 5 i 6, a geometryczna interpretacja widma systemu pokazana jest na rysunku 7.



Rys. 5. Elementy macierzy sterowań $B_J(q)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$



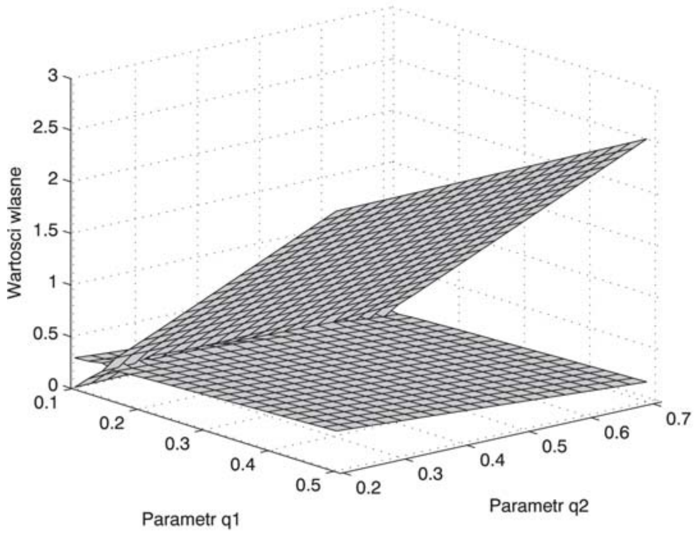
Rys. 6. Elementy macierzy wyjść $C_J(q)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Dla systemu dokonujemy sprawdzenia warunków z uwagi 2. Przedziałowe wartości własne systemu są równe:

$$\Lambda_1 = [0{,}0068;\ 2{,}5469],$$

$$\Lambda_2 = [0{,}0888;\ 0{,}3851],$$

Geometryczna interpretacja widma przedziałowego pokazana jest na rysunku 7.



Rys. 7. Widmo rozważanego systemu w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Teraz dokonujemy sprawdzenia warunków dostatecznych na istnienie jednokrotnych wartości własnych oraz na sterowalność systemu w całym obszarze niepewnych parametrów. W rozważanym wypadku można zauważyć, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. Stąd można wywnioskować, że warunek dostateczny nie jest w rozważanym wypadku spełniony, a na podstawie geometrycznej interpretacji widma można zauważyć, że w obszarze niepewnych parametrów Q istnieją obszary niesterowalności i nieoberwowalności. Do ich wyznaczenia zostanie wykorzystane ogólne równanie (18). W rozważanym wypadku przyjmie ono następującą postać

$$0{,}1(2312q_2^2 - 1244q_2 + 540q_1q_2 + 169 - 158q_1 + 52q_1^2)^{1/2} = 0 \tag{21}$$

Oznaczmy rozwiązanie równania nieliniowego (21) przez q_{nc}^{Λ}. Będzie ono określone następująco

$$\begin{aligned} q_{nc}^{\Lambda} &= \{q \in Q : q_2 = \\ &= -0{,}1168q_1 + 0{,}2690 - 0{,}8651e-3(-0{,}1183e5q_1^2 + 7354q_1 - 961)^{1/2}\} \end{aligned} \tag{22}$$

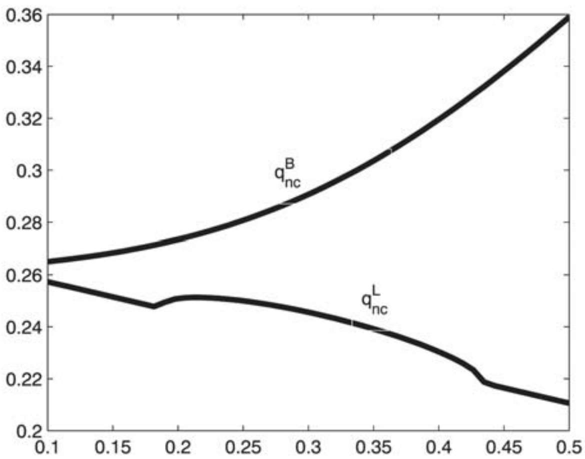
Ponadto z wykresów (rys. 5 i 6) widać, że w rozważanym wypadku istnieją takie wartości wektora q, dla których elementy macierzy $B_J(q)$ są równe zero. Te wektory będą generować również elementy przestrzeni niesterowalności. Oznaczmy te elementy przez q_{nc}^{B}. Są one równe

$$q_{nc}^{B} = \{q \in Q : q_2 = 0{,}13 + 0{,}26 q_1 + 0{,}0033(1600 - 6000 q_1 + 0{,}9200 q_1^2)^{1/2}\} \tag{23}$$

Cały obszar niesterowalności jest sumą obu części

$$Q_{nc} = q_{nc}^{B} \cup q_{nc}^{\Lambda} \tag{24}$$

Zbiór Q_{nc} jest przedstawiony na rysunku 8.



Rys. 8. Obszar niesterowalności Q_{nc} dla rozważanego przykładu

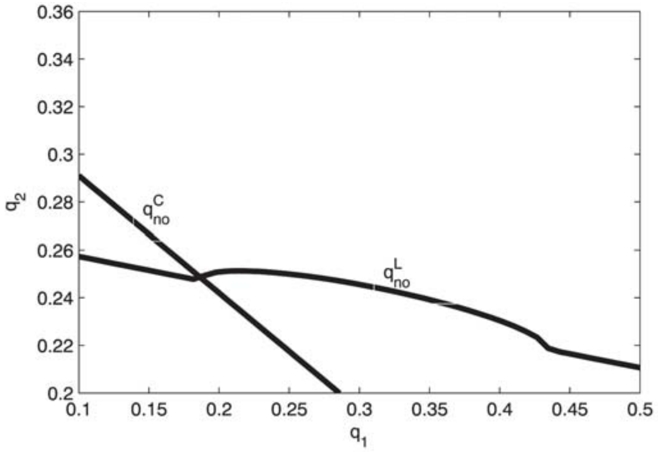
Z kolei obszar nieobserwowalności jest generowany zarówno przez przedziałowe współczynniki macierzy $C_J(q)$, jak i poprzez części wspólne przedziałowych wartości własnych. Oznaczmy część obszaru nieobserwowalności generowaną przez elementy macierzy $C_J(q)$ przez q_{no}^{C}. Jest ona opisana następująco

$$q_{no}^{C} = \{q \in Q : q_2 = -0{,}49 * q_1 + 0{,}34\} \tag{25}$$

Z kolei można zauważyć, że część obszaru nieobserwowalności generowana przez część wspólną przedziałowych wartości własnych q_{no}^{Λ} jest równa: $q_{no}^{\Lambda} = q_{nc}^{\Lambda}$. Obszar nieobserwowalności jest w rozważanym przypadku sumą zbiorów q_{no}^{C} i q_{no}^{Λ}

$$Q_{no} = q_{no}^{C} \cup q_{no}^{\Lambda} \tag{26}$$

Obszar nieobserwowalności dla rozważanego przypadku jest pokazany na rysunku 9.



Rys. 9. Obszar nieobserwowalności Q_{no} dla rozważanego przykładu

6. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- w przypadku systemu liniowego rozważanej klasy decydujący wpływ na podstawowe własności systemu ma geometria przedziałowych wartości własnych oraz geometria przedziałowych współczynników macierzy sterowań i macierzy wyjść dla systemu po transformacji układu współrzędnych do postaci kanonicznej Jordana;
- podstawowe wyniki z zakresu sterowalności i obserwowalności, otrzymane we wcześniejszych pracach autora, a dotyczące systemu przedziałowego z diagonalną macierzą stanu są przydatne do wyznaczania części obszarów niesterowalności i nieobserwowalności generowanych przez wspólne części przedziałowych wartości własnych;
- przedmiotem dalszych prac autorów będzie uściślenie i sformalizowanie warunków sterowalności i obserwowalności sformułowanych w niniejszej pracy.

Literatura

[1] Barnett S.: Matrices. *Methods and applications.* Oxford, Claredon Press 1992
[2] Białas S.: *Odporna stabilność wielomianów i macierzy.* Kraków, UWND AGH 2002
[3] Busłowicz M.: *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach.* Białystok, 1997
[4] Busłowicz M.: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami.* Warszawa–Białystok, Komitet Automatyki i Robotyki PAN 2000
[5] Feintuch A.: *Robust Control Theory in Hilbert Space.* Springer, 1998
[6] Jakubowska M.: *Algorytmy badania stabilności macierzy przedziałowych i ich realizacja numeryczna.* Półr. AGH Automatyka, vol. 3, No. 2, 1999, 413–430

[7] Kalmikov S.A., Sokin J.I., Juldasev Z.H.: *Metody intervalnogo analiza.* Nauka, 1986 (ros.)
[8] Kharitonov W.L.: *Ob assimptoticeskoj ustojcivosti polozenija ravnovesija semejstva sistem liniejnych differencialnych uravnenijDiff.* Uravnienija, vol. 14, No. 11, 1978, 2086–2088 (ros.)
[9] Klamka J.: *Sterowalność Systemów Dynamicznych.* PWN 1990
[10] Mao X.: *Exponential Stability of Stochastic Delay Interval Systems With Markovian Switching.* IEEE Trans. Aut. Cont., vol. 47, No. 10, October 2002, 1064–1612
[11] Mitkowski W.: *Stabilizacja Systemów dynamicznych.* Warszawa, PWN 1991
[12] Moore R.: *Interval Analysis.* Prentice Hall, 1966
[13] Moore R.: *Methods and Applications of Interval Analysis.* Philadelphia, SIAM 1979
[14] Oprzędkiewicz K.: *The interval parabolic system.* Arch. of Cont. Scien., vol. 13, No. 4, 2003, 391–405
[15] Oprzędkiewicz K.: *A controllability problem for a class of uncertain – parameters linear dynamic systems.* Arch. of Cont. Scien., vol. 14 (L), No. 1, 2004, 85–100
[16] Oprzędkiewicz K.: *A controllability problem for a class of uncertain – parameters discretetime linear dynamic systems.* Arch. of Con. Scien., vol. 14 (L), No. 2, 2004, 161–177
[17] Oprzędkiewicz K.: *An observability problem for a class of uncertain-parameter linear dynamic systems.* Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science (w przygotowaniu)