

# Obliczanie podstaw słupów zginanych dwukierunkowo

Marcin Górski

Katedra Konstrukcji Budowlanych, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Rzeszowska, e-mail: mgorski@prz.edu.pl

**Streszczenie:** Słupy są elementami konstrukcyjnymi przenoszącymi głównie siły osiowe, a także niejednokrotnie momenty zginające. Sposób połączenia ich podstawy z fundamentem umożliwia najczęściej przeniesienie momentu zginającego jedynie w jednej płaszczyźnie, traktując zamocowanie w drugim kierunku jako przegubowe. Niekiedy zachodzi jednak potrzeba zapewnienia stateczności konstrukcji poprzez obustronne utwierdzenie słupa, np. w wieżach stalowych, co wywołuje w podstawach słupów zginanie dwukierunkowe, któremu dodatkowo towarzyszy siła osiowa. Norma [1] i dostępna literatura (m.in. [2], [3], [4]) przewidują procedury obliczeniowe tylko dla podstaw słupów zginanych w jednym kierunku. W niniejszej pracy przedstawiono propozycję sposobu obliczania nośności podstaw słupów poddanych ścisaniu i zginaniu dwukierunkowemu. Opracowana procedura iteracyjna oparta jest na metodzie składnikowej z normy [1]. Uzyskane wyniki porównano z rezultatami otrzymanymi z analizy metodą elementów skończonych.

**Słowa kluczowe:** podstawa słupa, zginanie dwukierunkowe, metoda składnikowa, metoda elementów skończonych

## 1. Wprowadzenie

Ściskanie mimośrodowe podstawy słupa wywołuje naprężenia w podlewce betonowej oraz w rozciąganych śrubach analogiczne, jak to ma miejsce w przypadku konstrukcji żelbetowych [5]. Rzeczywisty rozkład naprężeń w fundamencie pod uźebrowaną podstawą słupa w przypadku zginania jednokierunkowego przedstawia rys. 1.a [6]. W celu uproszczenia obliczeń przyjmuje się prostokątny rozkład naprężeń (rys. 1.b), redukując pole ich występowania do pewnej wartości  $A_{\text{eff}}$  zlokalizowanej wokół przekroju trzonu słupa i ewentualnie żeber usztywniających. Zasięg tego pola w modelu wspornikowym, uwzględnionym w [1] określa się za pomocą szerokości efektywnej  $c$  (rys. 1.c), którą wyznacza się ze wzoru (1).

$$c = t_p \cdot \sqrt{\frac{f_y}{3 \cdot f_{jd} \cdot \gamma_{M0}}} \quad (1)$$

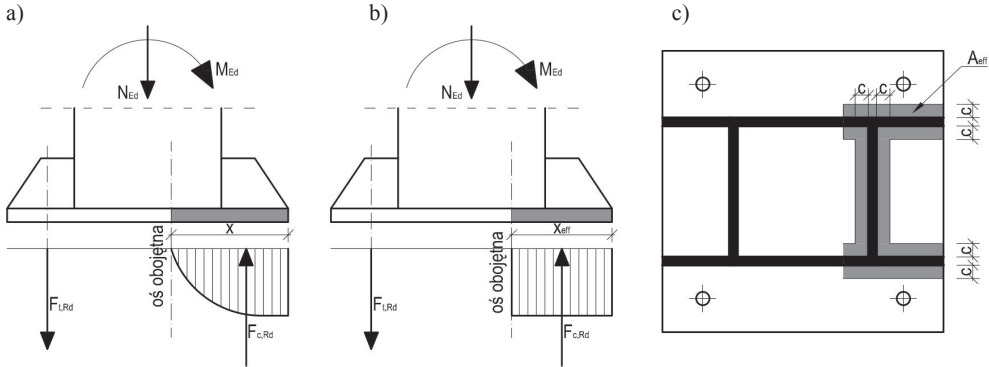
gdzie:  $t_p$  - grubość płyty podstawy,

$f_y$  - granica plastyczności stali płyty podstawy, zgodnie z [7],

$f_{jd}$  - wytrzymałość obliczeniowa betonu fundamentu na docisk płyty, można przyjmować w przybliżeniu  $f_{jd} = f_{cd}$ , gdzie  $f_{cd}$  - obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie, zgodnie z [8].

W przypadku słupów nieuźebrowanych, zgodnie z [1] pomija się nośność betonu pod środkiem słupa. Obliczenia nośności podstawy słupa przeprowadza się przy użyciu metody składnikowej [9]. Norma [1] wyróżnia 4 składniki takiego węzła:

- zginana płyta podstawy wraz ze śrubami rozciąganymi,
- rozciągany środek słupa,
- płyta podstawy oraz beton (podlewka) poddane ścisnieniu, pas i środek słupa poddane ścisnieniu.



Rys. 1. Równowaga sił w podstawie słupa zginanego jednokierunkowo:

a) – rzeczywista, b) – uproszczona, c) – powierzchnia równoważnego, ścisnionego króćca teowego

## 2. Obliczanie podstaw słupów zginanych dwukierunkowo

### 2.1. Założenia

W obliczeniach przyjęto zginanie podstawy słupa w jednym kierunku, obróconym względem osi głównych słupa pod kątem  $\alpha$ , który wyznacza się ze wzoru (2), o wypadkowej wartości momentu zginającego danej wzorem (3).

$$\alpha = \arctan\left(\frac{M_{Ed,y}}{M_{Ed,z}}\right) \quad (2)$$

$$M_{Ed} = \sqrt{M_{Ed,y}^2 + M_{Ed,z}^2} \quad (3)$$

W obliczeniach założono, że nośność na ścisnienie podlewki i fundamentu jest równa wytrzymałości betonu na ścisnienie, a odkształcenia w płycie podstawy mają rozkład liniowy. Sprawdzenie nośności poszczególnych składników podstawy słupa przeprowadza się analogicznie jak w przypadku zginania jednokierunkowego, przy czym w obliczeniach pominięto środek słupa, jako składnik niedecydujący o nośności połączenia.

### 2.2. Procedura obliczeniowa

Obrócenie wypadkowej momentu zginającego oznacza również obrócenie osi obojętnej. Wówczas miejsca jej przecięcia ze ściankami przekroju słupa wyznaczają zasięg występowania efektywnej powierzchni strefy ścisnianej betonu  $A_{eff}$  (rys. 2). Szerokość tej strefy oblicza się dodając z obu stron do szerokości ścianki słupa pasmo o szerokości  $c$ , obliczone wzorem (1).

Głównym problemem obliczeniowym jest znalezienie położenia osi obojętnej, w celu wyznaczenia wypadkowej siły ścisniającej w betonie oraz sił rozciągających poszczególne śruby (zastępcze króćce teowe).

Zasięg strefy ścisnianej wyznacza się z warunku równowagi momentów względem położenia wypadkowej siły rozciągającej śruby.

$$\sum M(F_i) = 0 \rightarrow \lambda \cdot f_{jd} \cdot A_{eff} \cdot r_{eff} = M_{Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Nt} \quad (4)$$

gdzie:

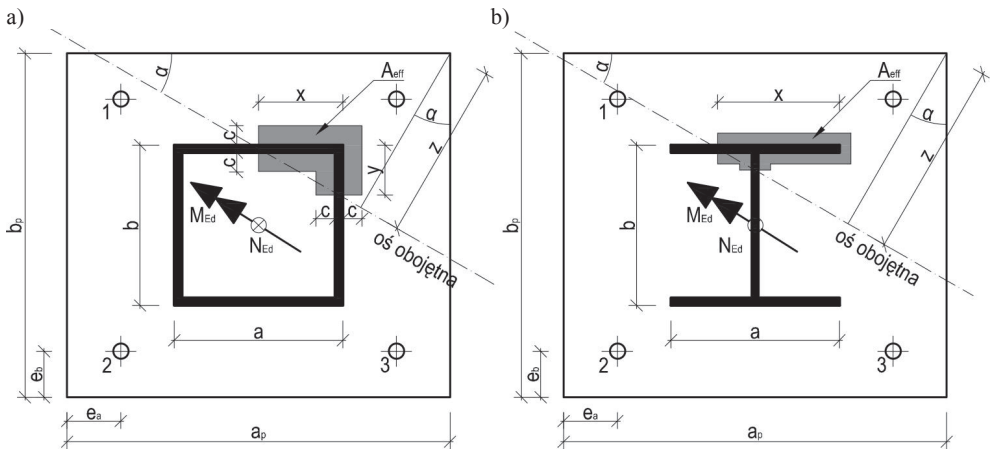
$\lambda$  - współczynnik wysokości strefy ściskanej przy prostokątnym rozkładzie naprężeń w betonie, zgodnie z [8]  $\lambda = 0,8$ ,

$f_{jd}$  - jak w (1),

$A_{eff}$  - efektywne pole powierzchni strefy ściskanej fundamentu,

$r_{eff}$  - odległość pomiędzy środkiem ciężkości efektywnej powierzchni strefy ściskanej betonu a wypadkową siłą rozciągającą śruby,

$e_{Nt}$  - odległość pomiędzy środkiem ciężkości przekroju słupa a wypadkową siłą rozciągającą śruby (ramię działania siły osiowej).



Rys. 2. Zasięg występowania efektywnej strefy ściskanej betonu przy zginaniu ukośnym słupa:

a) o przekroju zamkniętym; b) o przekroju dwuteowym

Zakładając liniowy rozkład odkształceń na kierunku prostopadłym do osi obojętnej, wartość sił w śrubach będzie rosła proporcjonalnie do ich odległości od tej osi. Położenie wypadkowej siły rozciągającej śruby będzie zatem uzależnione od położenia osi obojętnej. Jej odległość od osi obojętnej można wyznaczyć ze wzoru (5):

$$e = \frac{\sum e_i^2}{\sum e_i} \quad (5)$$

gdzie:

$e_i$  - odległość i-tej, rozciąganej śruby od osi obojętnej.

We wzorach (4) i (5) wartości  $A_{eff}$ ,  $r_{eff}$ ,  $e_{Nt}$  oraz  $e$  są zależne od położenia osi obojętnej. Nie ma zatem możliwości znalezienia wzoru ogólnego na położenie tej osi, gdyż będzie ono w postaci funkcji uwikłanej. Można jednak znaleźć jej położenie korzystając z następującej procedury iteracyjnej:

- 1) przyjęcie położenia wypadkowej siły rozciągającej śruby, na przykład jako odległość do wierzchołka ściskanej części blachy podstawy,
- 2) wyznaczenie odległości  $e_{Nt}$ ,
- 3) obliczenie  $A_{eff}$  oraz wyznaczenie położenia środka ciężkości strefy ściskanej, w zależności od parametru  $x$  (rys. 2),

- 4) podstawienie uzyskanych zależności do wzoru (4) oraz wyznaczenie wartości  $x$ ,
- 5) wyznaczenie rzeczywistego położenia wypadkowej siły rozciągającej śruby ze wzoru (5) i porównanie z założonym w kroku 1.

Zaleca się, aby odległość pomiędzy położeniem zakładanym a otrzymanym nie była większa niż 10% krótszego wymiaru blachy podstawy.

Wyprowadzenie wzorów ogólnych do obliczenia  $A_{eff}(x)$ ,  $r_{eff}(x)$  oraz  $z(x)$  jest niemożliwe, ponieważ efektywna strefa ściskana może przyjmować bardzo różne kształty, w zależności od przyjętego przekroju poprzecznego słupa, zastosowania blach usztywniających oraz kąta obrotu  $\alpha$ . Przykładowo, dla nieuźebrowanej podstawy słupa o przekroju z rury kwadratowej, o wymiarach jak na rys. 2a wzory te mają postać:

$$A_{eff}(x) = (2c + t) \cdot (1 + \tan \alpha) \cdot x \quad (6)$$

$$r_{eff}(x) = e + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin \alpha \quad (7)$$

$$z(x) = \frac{b_p - b}{2 \cdot \cos \alpha} + x \cdot \sin \alpha \quad (8)$$

przy założeniu, że  $x \leq a$  oraz  $\alpha \leq 45^\circ$ .

Po osiągnięciu wystarczającej dokładności obliczeń, siły działające na poszczególne śruby lub zastępcze króćce teowe wyznacza się ze wzoru na sumę momentów względem osi obojętnej (9):

$$F_i = \frac{M_{Ed} - N_{Ed} \cdot (e - e_{Ni}) + A_{eff} \cdot (r_{eff} - e) \cdot \lambda \cdot f_{jd}}{\sum e_i^2} \cdot e_i \quad (9)$$

Odległości poszczególnych śrub od osi obojętnej, zgodnie z oznaczeniami na rys. 2 można obliczyć ze wzorów (10) – (12):

$$e_1 = (a_p - e_a - z \cdot \cos \alpha + (e_b - z \cdot \sin \alpha) \cdot \tan \alpha) \cdot \cos \alpha \quad (10)$$

$$e_2 = e_1 + (b_p - 2 \cdot e_b) \cdot \sin \alpha \quad (11)$$

$$e_3 = e_2 - (a_p - 2 \cdot e_a) \cdot \cos \alpha \quad (12)$$

Sprawdzenie nośności podstawy słupa zginanego dwukierunkowo polega na sprawdzeniu nośności poszczególnych składników połączenia:

- nośność zginanej płyty podstawy wyznacza się porównując uzyskane wartości sił rozciągających w śrubach z nośnością zastępczych króćców teowych, zgodnie z możliwymi schematami zniszczenia, które będą w pełni analogiczne jak w przypadku zginania jednokierunkowego. Przykładowo dla rozważanych w dalszej części pracy przykładów słupa o przekroju z rury kwadratowej, długości załomów można przyjąć zgodnie z [13].
- nośność ściskanej części słupa oblicza się z warunku (13):

$$\frac{F_{c,fc,Ed}}{F_{c,fc,Rd}} \leq 1,0 \quad (13)$$

gdzie:

$$F_{c,fc,Ed} = \lambda \cdot A_{eff} \cdot f_{cd} \quad (14)$$

$$F_{c,fc,Rd} = \frac{A_{c,fc} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}, \quad (15)$$

$A_{c,fc}$  - pole powierzchni przekroju słupa w części ściskanej.

- nośność ściskanej płyty podstawy oraz fundamentu jest zapewniona poprzez odpowiednie wymiary efektywnej strefy ściskanej  $A_{eff}$ .

### 3. Przykład obliczeniowy

Do obliczeń przyjęto przypadek podstawy słupa z rury kwadratowej, jak na rys. 2a.

Dane:

$$a = b = 220\text{mm} \quad a_p = b_p = 460\text{mm}$$

$$t = 12\text{mm} \quad t_p = 20\text{mm}$$

$$e_a = e_b = 60\text{mm}$$

$$M_{Ed} = 45\text{kNm} \quad N_{Ed} = 90\text{kN}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Procedura obliczeniowa:

Ze względu na niewielką ilość dostępnego miejsca ograniczono się do podania najważniejszych wzorów i wyników:

$$b_{eff} = 2c + t = 105,6\text{mm}, \text{ do obliczeń przyjęto } b_{eff} = 100,0\text{mm}$$

- 1) Przyjęto położenie wypadkowej siły rozciągającej w odległości:  $z + e = 450\text{mm}$ .
- 2) Obliczone ramię działania siły osiowej względem siły rozciągającej:  $e_{Nr} = 124,7\text{mm}$ .
- 3)  $A_{eff} = 200x$  (6),  $r_{eff} = 280,3 - 0,35x$  (7),  $z = 169,7 + 0,35x$  (8)
- 4)  $0,8 \cdot 14,3 \cdot 200x \cdot (280,3 - 0,35x) = 45 \cdot 10^6 + 90 \cdot 10^3 \cdot 124,7 \rightarrow x = 100,0\text{mm}$  (4)
- 5)  $e_1 = 84,8\text{mm}$  (10)

$$e_2 = 325,3\text{mm} \quad (11)$$

$$e_3 = 84,8\text{mm} \quad (12)$$

$$e = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{e_1 + e_2 + e_3} = \frac{84,8^2 + 325,3^2 + 84,8^2}{84,8 + 325,3 + 84,8} = 242,9\text{mm} \quad (5)$$

$$z = 169,7 + 0,35x = 169,7 + 0,35 \cdot 100 = 204,7\text{mm}$$

sprawdzenie obliczonego położenia siły wypadkowej:

$$z + e = 204,7 + 242,9 = 447,6\text{mm} \approx 450\text{mm}$$

Wartości sił w śrubach (9):

$$F_1 = \frac{45 \cdot 10^6 - 90 \cdot 10^3 \cdot (242,9 - 124,7) + 100^2 \cdot (245,3 - 242,9) \cdot 14,3 \cdot 0,8}{84,8^2 + 325,3^2 + 84,8^2} \cdot 84,8 = 24,5\text{kN}$$

$$F_2 = \frac{45 \cdot 10^6 - 90 \cdot 10^3 \cdot (242,9 - 124,7) + 100^2 \cdot (245,3 - 242,9) \cdot 14,3 \cdot 0,8}{84,8^2 + 325,3^2 + 84,8^2} \cdot 325,3 = 93,9\text{kN}$$

$$F_3 = F_1 = 24,5\text{kN}$$

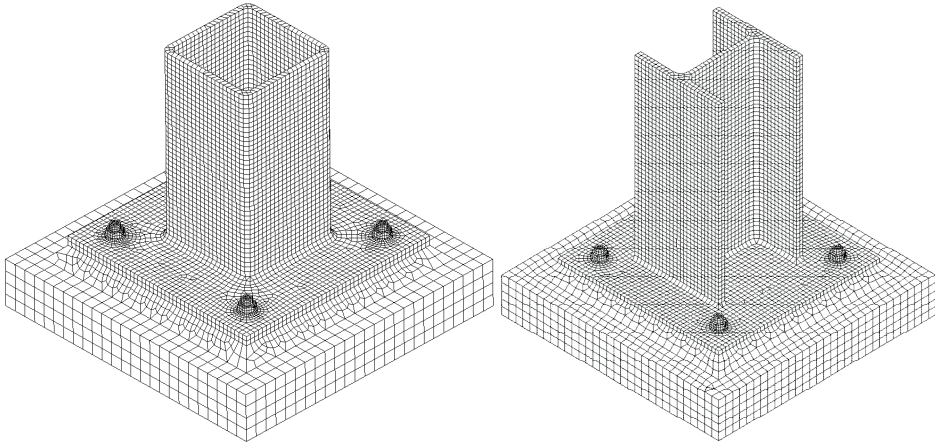
Weryfikacja poprawności obliczeń:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow F_1 + F_2 + F_3 + N_{Ed} - \lambda \cdot A_{eff} \cdot f_{cd} = 0$$

$$24,5 + 93,9 + 24,5 + 90 - 0,8 \cdot 200 \cdot 100 \cdot 14,3 \cdot 0,001 = 232,9 - 228,8 = 4,1\text{kN} \approx 0$$

#### 4. Analiza MES

W celu weryfikacji wykonanych obliczeń stworzono w programie Autodesk Simulation Mechanical [12] trójwymiarowe modele podstaw słupów (Rys. 3), zgodnie z [13]. Do ich wykonania wykorzystano przestrzenne 20-węzłowe elementy skończone o rozmiarach odpowiednio: 3 mm dla modelu śrub, 10 mm dla słupa i blachy podstawy oraz 25 mm dla podlewki i fundamentu. W analizie uwzględniono nieliniowość materiałową stali i betonu oraz kontakt powierzchniowy pomiędzy elementami.

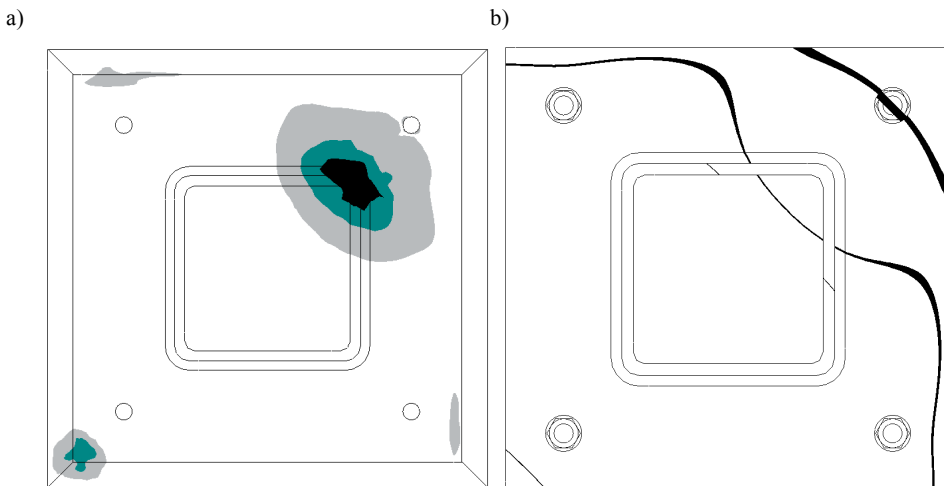


Rys. 3. Modele MES analizowanych podstaw słupów

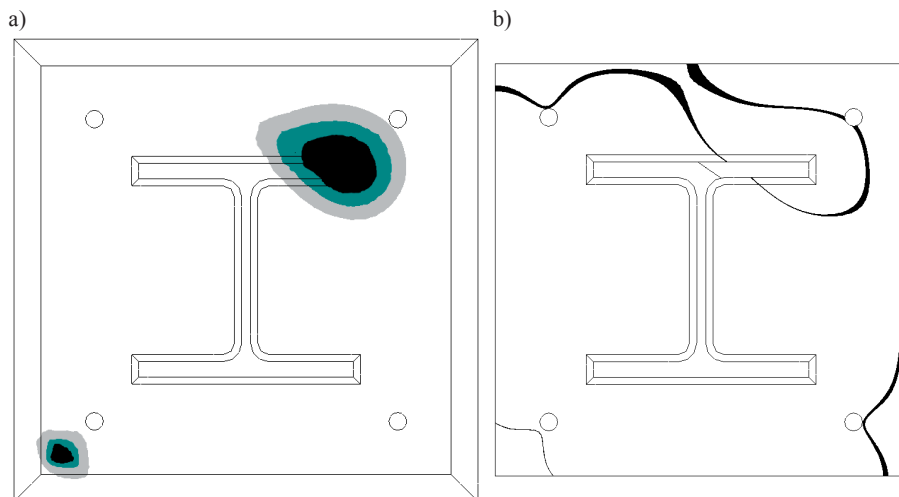
Wartości sił w poszczególnych śrubach obliczono mnożąc średnie naprężenie w trzpieniu danej śruby odczytane z programu przez pole powierzchni przekroju trzpienia. Dla modelu podstawy słupa z punktu 2.3 otrzymano następujące wartości:

$$F_1 = 25,7\text{kN} , F_2 = 82,3\text{kN} , F_3 = 25,7\text{kN}$$

Rzeczywisty rozkład naprężeń ściskających w fundamencie oraz położenie osi obojętnej w słupach o przekroju zamkniętym oraz dwuteowym pokazano na rys. 4 oraz rys. 5.



Rys. 4. Podstawa słupa z rury kwadratowej: a) naprężenia w fundamencie; b) rzeczywiste położenie osi obojętnej. Dane:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $t_p = 20\text{mm}$



Rys. 5. Podstawa słupa z dwuteownikiem: a) naprężenia w fundamencie; b) rzeczywiste położenie osi obojętnej. Dane:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $t_p = 10\text{mm}$

## 5. Porównanie wyników

Kilka przykładowych rozwiązań wraz z weryfikacją MES przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki obliczeń przykładowych podstaw słupów zginanych dwukierunkowo uzyskane z obliczeń analitycznych oraz z analizy metodą elementów skończonych

Słup	$t_p$ [mm]	$N_{Ed}$ [kN]	$M_{Ed}$ [kNm]	$\alpha$ [°]	Siły w śrubach (króćcach teowych) [kN]					
					$F_1$		$F_2$		$F_3$	
					obl.	MES	obl.	MES	obl.	MES
Rura kwadratowa 220x220x12	20	90	45	30	40,7	39,5	85,1	76,9	8,2	9,8
				45	24,3	25,7	93,0	82,3	24,3	25,7
		20	20	45	15,5	14,1	44,3	42,1	15,5	14,1
Rura kwadratowa 220x220x12 uźebrowana	20	200	100	30	11,3	5,5	145,6	137,8	50,2	41,5
				45	24,8	15,6	156,1	144,0	24,8	15,6
Rura kwadratowa 220x220x12	10	30	15	30	5,0	3,6*	25,2	23,8*	18,3	15,5*
		60	30	45	11,1	10,5*	27,3	26,8*	11,1	10,5*
		30	5,4	4,0*	24,1	21,5*	6,1	5,1*		
HEB 240	10	40	20	45	5,8	4,8*	19,0	18,4*	5,8	4,8*
				60	6,9	5,6*	26,9	23,8*	4,0	2,9*

\* - wartości pomniejszone o siły efektu dźwigni

## 6. Wnioski:

Wartości sił działających na poszczególne śruby uzyskane z obliczeń są zbliżone do wyników uzyskanych z analizy MES, przy czym im większa wartość siły rozciągającej w śrubie tym większa zgodność wyników. Dla najbardziej wyteżonych śrub różnice nie przekraczały 10%. Jednocześnie niemal we wszystkich przypadkach wartość uzyskana z obliczeń była większa niż z analizy MES, co daje pewien zapas nośności. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że zaproponowana procedura jest poprawna.

## Literatura

- 1 PN-EN 1993-1-8 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-8: Projektowanie węzłów.
- 2 Bródka J., Kozłowski A. Projektowanie i obliczanie połączeń i węzłów konstrukcji stalowych. Tom 2. PWT, 2009
- 3 Penserini P., Colson A. Ultimate limit strength of column-base connections. Journal of Constructional Steel Research. Vol.14.Iss.4, 1989
- 4 Rossi P.P. Evaluation of the ultimate strength of R.C. rectangular columns subjected to axial force, bending moment and shear force. Engineering Structures. Vol.57, Dec. 2013, 339-355
- 5 Kobiak J., Stachurski W. Konstrukcje żelbetowe, tom I, Arkady 1986
- 6 Salmon C.G., Schenker L., Johnston G.B. Moment – Rotation Characteristics of Column Anchorages. Journal of the Structural Division. ASCE. Vol.81.ST4.April 1955.
- 7 PN-EN 1993-1-1 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 8 PN-EN 1992-1-1 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 9 Guisse S., Vandegans D., Jaspert J.P. Application of the component method to column bases – experimentation and development of mechanical model for characterisation. Centre de Recherches Scientifiques et Techniques de l'Industrie des Fabrications Metalliques. Bruxelles, (Steel Construction Department, MT 195), December 1996.
- 10 Pisarek Z. Obliczanie doczołowych połączeń śrubowych zginanych ukośnie. Czasopismo inżynierii lądowej, środowiska i architektury nr 2/2013, 219-229.
- 11 Wald F., Bouguin V., Sokol Z., Muzeau J-P. Effective length of T-stub of RHS column base plates. Czech Technical University of Prague, University of Blaise Pascal, Clermont Ferrand.
- 12 <http://www.autodesk.com/products/autodesk-simulation-family/features/simulation-mechanical>.
- 13 Wald F., Baniotopoulos Ch. C. Numerical modelling of column base connection, in COST C1 Conference Liege 1998, Bruxelles 1999.

## Calculation of column bases under biaxial bending

Marcin Górski

<sup>1</sup> *Department of Building Structures, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Rzeszow University of Technology, e-mail: mgorski@prz.edu.pl*

**Abstract:** Columns are structural elements subjected to compression and sometimes bending. The way of their anchorages in foundations usually allows to withstand bending only in one plane, while in another plane connection is assumed to be hinged. Sometimes column need to be fixed in both planes, for example in steel sheds, which causes biaxial bending with additional axial force in column bases. Both codes [1] and available literature (ex. [2], [3], [4]) give procedures only to calculate column bases under bending in one axial. This paper shows the proposal of the procedure to calculate column bases under compression and biaxial bending. This iterative procedure is based on component method. Obtained results were compared with results from finite element analysis.

**Keywords:** column base, biaxial bending, component method, finite element method