

Mariusz KUCZAJ<sup>1</sup>, Antoni SKOĆ<sup>2</sup>

## OCENA OBCIĄŻENIA DYNAMICZNEGO W PRZEKŁADNI ZĘBATEJ, PRZY UWZGLĘDNIENIU SPRZEŻENIA MIĘDZYSTOPNIOWEGO W ODNIESIENIU DO STOPNI IZOLOWANYCH

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono oraz omówiono wyniki uzyskane z badań przeprowadzonych na modelu dynamicznym przekładni zębatej dwustopniowej. Zaprezentowano wiele przebiegów wartości współczynnika dynamicznego  $K_v$  w funkcji prędkości obrotowej wału wejściowego przekładni. Porównano przebiegi uzyskane dla każdego stopnia przekładni dwustopniowej z przebiegami uzyskanymi dla pojedynczych (izolowanych) stopni. Analiza uzyskanych wyników pozwoliła stwierdzić, że niezależne traktowanie poszczególnych stopni stosowane w obliczeniach nośności kół w przekładni wielostopniowej może być założeniem upraszczającym.

**Słowa kluczowe:** przekładnie zębate, dynamika przekładni wielostopniowych, badania symulacyjne

## ASSESSMENT OF DYNAMIC LOAD OF THE GEAR ACCOUNTING INTERSTAGE COUPLING IN RESPECT OF ISOLATED STAGES

**Summary.** In the article presented and discussed were results from investigations performed on dynamic model of two-stage gear. A number of course features of dynamic coefficient value  $K_v$  in the function of rotational speed of gear input shaft were shown. Compared were course features obtained from every single stage of two-stage gear with course features obtained from particular (isolated) stages. Analysis of obtained results lead to the conclusion, that independent assessment of particular gear stages used in calculations could be simplifying assumption.

**Keywords:** gears, dynamic of multi-stage gear, simulation investigations

### 1. WPROWADZENIE

W znaczącej liczbie maszyn i urządzeń stosowanych w różnorodnych gałęziach gospodarki podstawowym zespołem mechanicznym pośredniczącym w wykonywaniu pracy użytecznej jest zespół napędowy. W zespole tym, w łańcuchu przekazywania energii mechanicznej od silnika do maszyny roboczej, istotny element stanowią różnego rodzaju

---

<sup>1</sup> Faculty of Mining and Geology, The Silesian University of Technology, Gliwice, Poland, e-mail: mariusz.kuczaj@polsl.pl.

<sup>2</sup> Faculty of Mining and Geology, The Silesian University of Technology, Gliwice, Poland, e-mail: antoni.skoc@polsl.pl.

przekładnie mechaniczne. Największe zastosowanie spośród nich znalazły przekładnie zębate, ze względu na swe podstawowe zalety, jakimi są małe gabaryty i ciężar w stosunku do przenoszonej mocy oraz wysokiej sprawności. Najczęściej są to przekładnie o większej liczbie stopni niż jeden.

Wobec określonych wymogów eksploatacyjnych stawianych przekładniom zębatym najistotniejsze to przede wszystkim trwałość oraz niezawodności ich konstrukcji, które niestety dość często istotnie odbiegają od założeń pierwotnych. To z kolei jest przyczyną awarii, których głównym źródłem są uszkodzenia zmęczeniowe lub zmęczeniowo-tribologiczne kół zębatych.

W procesie projektowania przekładni niebagatelne staje się więc uwzględnienie wielu czynników mających wpływ na właściwe określenie obciążenia obliczeniowego, a które podaje podstawowa norma do obliczania nośności kół zębatych ISO 6336 [12]. Wpływ ten jest uwzględniany przez tzw. współczynniki wpływu. Spośród tych współczynników duże znaczenie ma tzw. wewnętrzny współczynnik dynamiczny  $K_v$ . Uwzględnia on wzrost obciążenia spowodowany wewnętrznymi czynnikami związanymi z konstrukcją przekładni, a powodowanymi głównie zmiennością w czasie parametrów zazębienia, takich jak sztywność zazębienia oraz tłumienie w zazębieniu. Czynniki wewnętrzne charakteryzują się dużą częstotliwością pobudzania do drgań, dlatego też przypisuje się im znaczący wpływ na obciążenie dynamiczne przekładni.

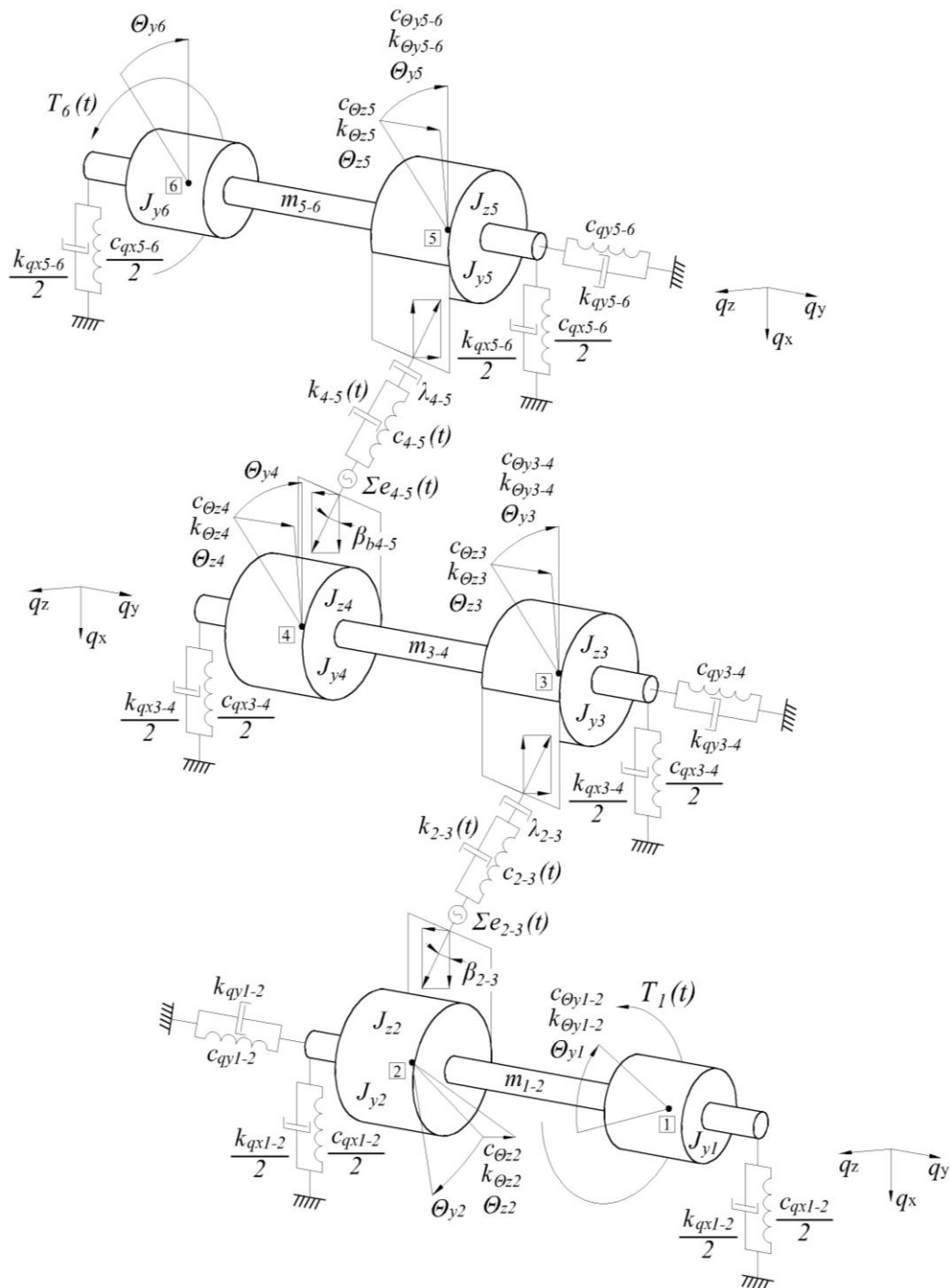
W metodach obliczeniowych nośności kół przekładni, prezentowanych w literaturze przedmiotowej oraz przede wszystkim w normie ISO 6336 (oprócz metody A), praktycznie nie uwzględnia się wzajemnego wpływu parametrów konstrukcyjnych przekładni na przebieg zjawisk dynamicznych na sąsiednich stopniach. Wydaje się jednak, że fakt występujących przecież powiązań dynamicznych jest nie do pominięcia [1, 6, 10, 11]. Niemniej odczuwalny jest brak kompleksowych badań w tym kierunku, a wiedza na ten temat nie jest dostateczna i wymaga uzupełnienia.

W związku z tym zdecydowano się na przeprowadzenie badań mających na celu rozstrzygnięcie, czy rozpatrywanie poszczególnych stopni oddzielnie, jako niezależnych przekładni jednostopniowych, znajduje swoje uzasadnienie w adekwatności natury zachowań dynamicznych tych przekładni. Ma to kolosalne znaczenie w pojmowaniu istoty działania tych mechanizmów i rzutuje na proces zarówno badawczy, jak i konstrukcyjny, a także projektowy.

## 2. METODYKA I OBIEKT BADAŃ

Uzyskanie informacji niezbędnych do rozwiązywania określonego problemu technicznego wymaga odpowiedniej metodyki badań. Aktualnie coraz większym zainteresowaniem cieszy się metoda badań symulacyjnych na modelach dynamicznych przekładni zębatych. Metoda ta bazuje bezpośrednio na badaniach eksperymentalnych, stanowiących dla niej podstawę do przeprowadzenia procesu walidacji modelu. Ze względu na kosztowność prowadzenia badań eksperymentalnych na obiekcie rzeczywistym, a także zwiększenie mocy obliczeniowej standardowych komputerów klasy PC, metoda badań symulacyjnych staje się najbardziej odpowiednia do rozpatrywania dynamiki przekładni zębatych. Dodatkowo należy zwrócić uwagę, że podjęty temat badań wymaga analizy dynamicznej nie tylko przekładni dwustopniowej, ale również jej izolowanych, pojedynczych stopni. Wszystko to sprawia, że metoda badań symulacyjnych staje się najbardziej adekwatną do przeprowadzenia badań określonych tematem niniejszego opracowania.

Chcąc ocenić obciążenie dynamiczne badanej przekładni zębatej dwustopniowej oraz jej izolowanych stopni, posłużono się dyskretnym modelem dynamicznym, który przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Model fizyczny dwustopniowej, walcowej przekładni zębatej  
Fig. 1. Physical model of two-stage spur gear

Na podstawie modelu fizycznego został wyprowadzony układ nieliniowych równań różniczkowych składających się na model matematyczny dwustopniowej walcowej przekładni zębatej o zębach śrubowych. Układ ten jest złożony z 18 równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. W równaniach różniczkowych uwzględniony jest m.in. kąt nachylenia zębów i zmieniając jego wartość, można analizować

współpracę różnych rodzajów kół zębatych, w tym także kół o zębach prostych. Ze względu na duży rozmiar układu równań, nie został on zamieszczony w tym opracowaniu. Zainteresowanych bliższym zapoznaniem się z omawianym modelem dynamicznym przekładni dwustopniowej autorzy kierują m.in. do opracowań [2 i 3], w których został on dokładnie przedstawiony. W celu uzyskania rozwiązań modelu matematycznego stworzono program komputerowy w języku MATLAB. Przeprowadzona weryfikacja kodu źródłowego pozwoliła potwierdzić poprawność wykonywanych obliczeń przez program, a stwierdzone podobieństwo wyników badań symulacyjnych i istniejących badań na obiekcie rzeczywistym – potwierdzić prawidłowość generowanych reakcji modelu.

Obiekt badań symulacyjnych stanowiła istniejąca przekładnia zębata, dwustopniowa walcowa, o zębach prostych, niekorygowanych [10]. Wyniki badań przedstawionych w publikacji stanowiły oraz stanowią podstawę do przeprowadzenia procesu walidacji modelu dynamicznego przekładni. Z konieczności dostosowania się do obiektu rzeczywistego wynikają pewne nietypowe parametry konstrukcyjne analizowanej przekładni. Podstawowe dane geometryczne oraz wartość obciążenia zębów zestawiono w tabelicy 1. Symulacje zostały przeprowadzone przy pominięciu wymuszeń kinematycznych wynikających z błędów wykonania kół zębatych.

Tabela 1

Podstawowe dane techniczne badanej przekładni

Nazwa	Oznaczenia	Wartość	Jednostka
liczba zębów zębniaka pierwszego stopnia	$z_1$	47	—
liczba zębów koła pierwszego stopnia	$z_2$	53	—
liczba zębów zębniaka drugiego stopnia	$z_3$	63	—
liczba zębów koła drugiego stopnia	$z_4$	87	—
moduł zębów	$m_1 - m_4$	0,004	m
kąt przyporu na średnicy podziałowej	$\alpha$	20	deg
szerokość wieńca zębniaka pierwszego stopnia	$b_1$	0,013	m
szerokość wieńca koła pierwszego stopnia	$b_2$	0,014	m
szerokość wieńca zębniaka drugiego stopnia	$b_3$	0,011	m
szerokość wieńca koła drugiego stopnia	$b_4$	0,012	m
masowy moment bezwładności zębniaka pierwszego stopnia	$J_1$	0,0480	kg m <sup>2</sup>
masowy moment bezwładności koła pierwszego stopnia	$J_2$	0,0683	kg m <sup>2</sup>
czołowy wskaźnik zazębienia na stopniu pierwszym	$\varepsilon_{\gamma 1}$	1,75	—
czołowy wskaźnik zazębienia na stopniu drugim	$\varepsilon_{\gamma 2}$	1,81	—
masowy moment bezwładności zębniaka drugiego stopnia	$J_3$	0,1492	kg m <sup>2</sup>
masowy moment bezwładności koła drugiego stopnia	$J_4$	0,2864	kg m <sup>2</sup>
średnica wału wejściowego przekładni	$d_{we}$	65	mm
średnica wału pośredniego przekładni	$d_{poś}$	79	mm

cd. tabeli 1

średnica wału wyjściowego przekładni	$d_{wy}$	91	mm
wskaźnik jednostkowego obciążenia zębów na pierwszym stopniu	$Q_1$	1,78	MPa
wskaźnik jednostkowego obciążenia zębów na drugim stopniu	$Q_2$	1,16	MPa

W badaniach symulacyjnych wyznaczano, jako miarę obciążenia dynamicznego, wewnętrzny współczynnik dynamiczny  $K_v$ , który umożliwia oszacowanie wartości sił dynamicznych na obu stopniach przekładni. Przedstawia on relację między całkowitym obciążeniem zęba, włączając w to wpływ obciążenia dynamicznego, a obciążeniem nominalnym zęba.

W niniejszym artykule, kierując się rozważaniami opisanymi w publikacjach [4, 5, 7, 8, 9], współczynnik dynamiczny  $K_v$  zdefiniowano za pomocą wyrażenia:

$$K_v = \frac{\max\{F^S\}}{F^{nom}}, \quad (1)$$

gdzie:

$\max\{F^S\}$  – maksymalna wartość siły międzyzębnej, będącej sumą sił statycznej i dynamicznej [N];

$F^{nom}$  – wartość nominalnej siły międzyzębnej [N].

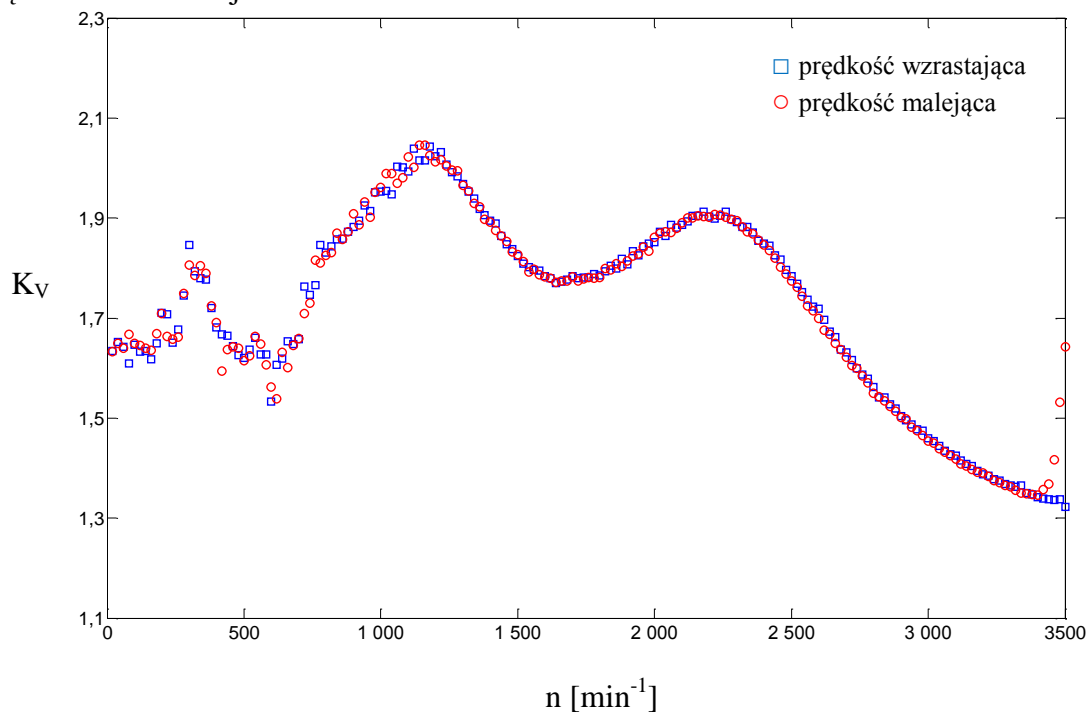
### 3. WYNIKI PRZEPROWADZONYCH SYMULACJI

W celu odpowiedzi na pytanie, czy rozpatrywanie poszczególnych stopni oddzielnie podczas projektowania przekładni wielostopniowych znajduje swoje uzasadnienie w adekwatności natury zachowań dynamicznych tych przekładni, przeprowadzono wiele badań na modelu dynamicznym (rys. 1) przekładni dwustopniowej. Następnie dokonano symulacji dla każdego stopnia oddzielnie. Mamy tutaj na myśli zastąpienie każdego stopnia ekwiwalentną przekładnią jednostopniową. Do tego celu zmodyfikowano program komputerowy, zmniejszając m.in. liczbę równań różniczkowych ruchu modelu matematycznego przekładni dwustopniowej. Przebiegi wartości wewnętrznego współczynnika dynamicznego  $K_v$  obu stopni ujęto w zakresie prędkości obrotowej wału wyjściowego przekładni, określonego na potrzeby tego etapu badawczego. Symulacje zostały przeprowadzane dla każdego stopnia, przy rosnącej oraz malejącej prędkości obrotowej, w konfiguracji dwu- i jednostopniowej.

Badania wykazały przede wszystkim, że zachowanie dynamiczne przekładni dwustopniowej jest takie samo niezależnie od tego, czy prędkość obrotową przekładni zwiększamy, czy też zmniejszamy. Reprezentują to przebiegi wartości współczynników dynamicznych  $K_v$  obu stopni, uzyskane przy rosnącej oraz malejącej prędkości obrotowej, przedstawione na rys. 2 i 3. W przypadku przekładni dwustopniowej zauważamy również zanik zjawisk nieliniowych, które cechują zachowania dynamiczne przekładni jednostopniowych. Ilustrują to z kolei wykresy porównawcze zaprezentowane na rys. 4 i 5.

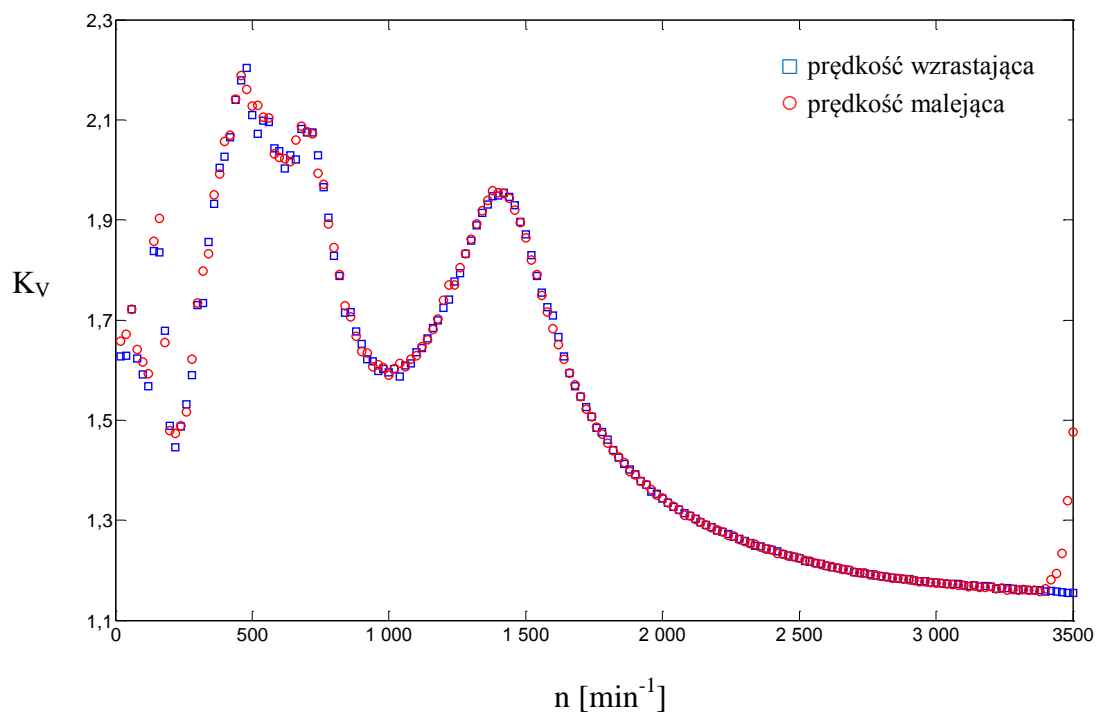
Rysunek 4 przedstawia porównanie przebiegów wartości  $K_v$  dla pierwszego stopnia przekładni dwustopniowej oraz dla jego ekwiwalentnej przekładni jednostopniowej. Natomiast rys. 5 przedstawia analogiczne wyniki uzyskane dla drugiego stopnia przekładni. W celu zwiększenia przejrzystości tego zestawienia graficznego w aspekcie porównawczym,

wyniki uzyskane dla konfiguracji dwustopniowej zaprezentowano tylko przy rosnącej prędkości obrotowej.



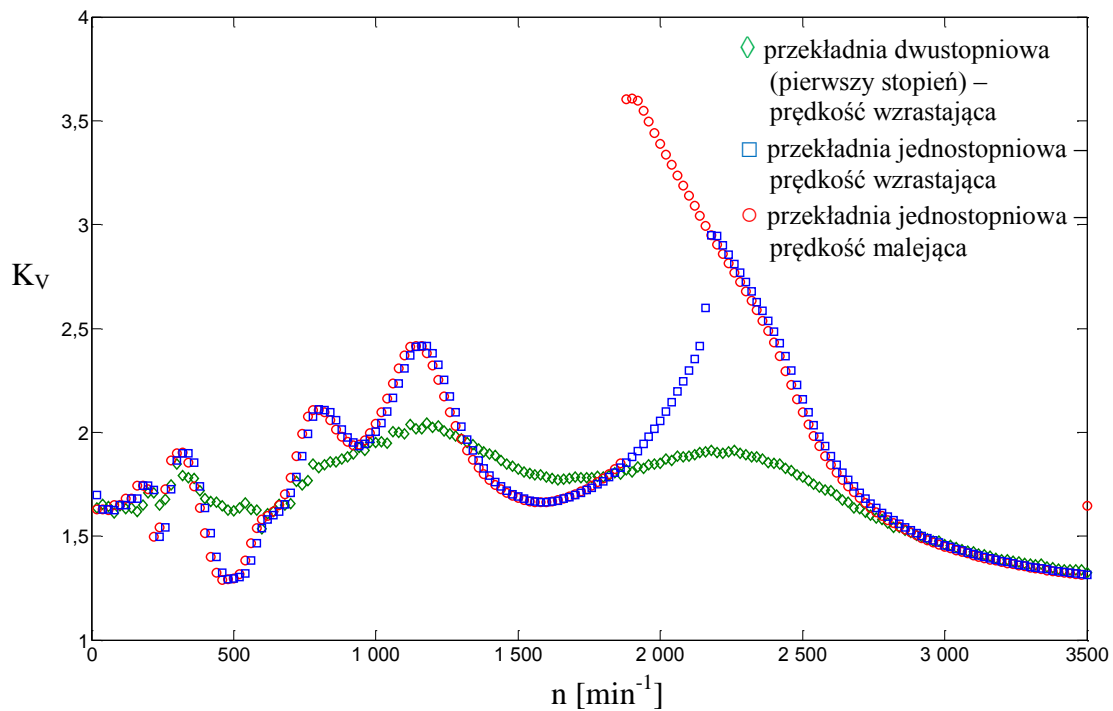
Rys. 2. Współczynnik dynamiczny  $K_V$  pierwszego stopnia przekładni dwustopniowej w funkcji prędkości obrotowej wału wejściowego, przy wzrastającej i malejącej prędkości obrotowej

Fig. 2. Dynamic coefficient  $K_V$  derived from first stage of two-stage gear in the function of rotational velocity of input shaft at growing and descending rotational velocity



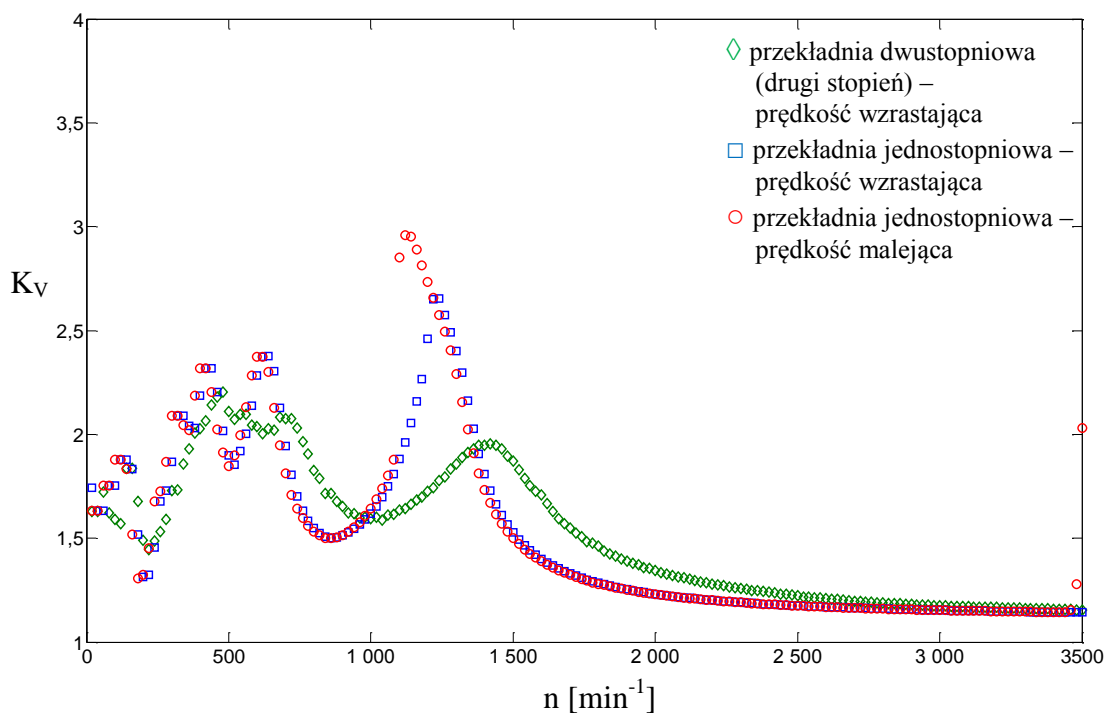
Rys. 3. Współczynnik dynamiczny  $K_V$  drugiego stopnia przekładni dwustopniowej w funkcji prędkości obrotowej wału wejściowego, uzyskany przy wzrastającej i malejącej prędkości obrotowej

Fig. 3. Dynamic coefficient  $K_V$  derived from second stage of two-stage gear in the function of rotational velocity of input shaft at growing and descending rotational velocity



Rys. 4. Współczynnik dynamiczny  $K_V$  pierwszego stopnia przekładni dwustopniowej oraz jego ekwiwalentnej przekładni jednostopniowej w funkcji prędkości obrotowej wału wejściowego

Fig. 4. Dynamic coefficient  $K_V$  derived from first stage of two-stage gear and its equivalent one-stage gear in the function of rotational velocity of input shaft



Rys. 5. Współczynnik dynamiczny  $K_V$  drugiego stopnia przekładni dwustopniowej oraz jego ekwiwalentnej przekładni jednostopniowej w funkcji prędkości obrotowej wału wejściowego

Fig. 5. Dynamic coefficient  $K_V$  derived from second stage of two-stage gear and its equivalent one-stage gear in the function of rotational velocity of input shaft

Oprócz zaniku zachowań nieliniowych przekładni dwustopniowej, które cechują przekładnie jednostopniowe, pojawiając się w ich pasmach rezonansowych, nasuwa się wiele innych, wydaje się cennych spostrzeżeń. Porównując przebiegi uzyskane w procesie symulacji dla przekładni dwustopniowej z tymi dla przypadku, gdy każdy stopień pracuje oddzielnie, tzn. jako ekwiwalentna przekładnia jednostopniowa, zaobserwowano istotne różnice wartości współczynnika dynamicznego  $K_V$  niemal w całym zakresie prędkości obrotowych. Różnice te są szczególnie istotne w pasmach rezonansów głównych obydwu stopni i są większe dla pierwszego stopnia (około 46%) niż dla stopnia drugiego przekładni (różnica około 37%). Przy czym ujawnia się pewna prawidłowość, że ekstremalne wartości współczynnika  $K_V$  w całej dziedzinie prędkości obrotowej wału wejściowego osiągają wyższy poziom dla przypadku, gdy dany stopień pracuje właśnie jako swój ekwiwalent jednostopniowy. Ponadto, łatwo również zauważyć, że wartości współczynnika dynamicznego są znacznie mniejsze dla prędkości pod- i nadrezonansowych niż w rezonansach głównych dla poszczególnych stopni. Jednak dla przekładni dwustopniowej różnice, aczkolwiek zauważalne, nie są aż tak wyraźne jak dla pojedynczych stopni. Dla prędkości nadrezonansowych wartości  $K_V$  uzyskane dla przekładni dwustopniowej i pojedynczych stopni są do siebie zbliżone.

Należy zwrócić dodatkowo uwagę, że badana przekładnia ma tak dobrane parametry konstrukcyjno-geometryczne, że uzyskano duże wzbudzenia w połowie rezonansu głównego zarówno dla pierwszego, jak i drugiego stopnia przekładni. Jest to również widoczne w przypadku ekwiwalentnych przekładni jednostopniowych. Porównując jednak wyniki uzyskane dla stopni przekładni dwustopniowej pierwszego i drugiego z ich ekwiwalentami jednostopniowymi, można zauważyć istotne różnice. W przypadku przekładni dwustopniowej maksimum globalne wartości  $K_V$  przypada w połowie rezonansu, a nie w rezonansie głównym. Natomiast w przekładniach jednostopniowych jest odwrotnie. Maksimum globalne wartości współczynnika dynamicznego  $K_V$  notuje się bowiem w rezonansach głównych. Ponadto, można zauważyć, że dla przekładni dwustopniowej rezonans główny drugiego stopnia występuje przy nieco większej prędkości obrotowej wału wejściowego niż dla jego ekwiwalentu jednostopniowego.

#### 4. WNIOSKI

Analiza porównawcza otrzymanych przebiegów pozwala stwierdzić, że dla analizowanego przypadku niezależne traktowanie poszczególnych stopni przekładni wielostopniowej jest mylnym założeniem upraszczającym wobec adekwatności jej stanu dynamicznego. Odmienność otrzymanych wyników dla konfiguracji jednostopniowych wobec konfiguracji dwustopniowej niewątpliwie implikowana jest występowaniem wzajemnego oddziaływania dynamicznego pomiędzy sąsiednimi stopniami przekładni. W związku z występowaniem tego wpływu należy sądzić, że jego całkowite pominięcie w procesie projektowania przekładni może spowodować niewłaściwe określenie wartości współczynnika dynamicznego, a tym samym i niewłaściwe wyznaczenie wartości tzw. obciążenia obliczeniowego.



**Bibliografia**

1. Al – Shhyab A., Kahraman A.: A Nonlinear Torsional Dynamic Model of Multi-Mesh Gear Trains Having Flexible Shafts. *JJMIE*, Vol. 1, No. 1, Sep. 2007, p. 31-41.
2. Grzesica P., Kuczaj M.: Dyskretny model dynamiczny dwustopniowej przekładni walcowej o zębach śrubowych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo*, z. 286, Gliwice 2008.
3. Grzesica P., Kuczaj M.: Model dynamiczny dwustopniowej przekładni walcowej o zębach śrubowych obciążonej zmiennym momentem obrotowym. *Materiały XVI Międzynarodowej Konferencji Naukowo-Technicznej „Trwałość Elementów i Węzłów Konstruktcyjnych Maszyn Górniczych”*, TEMAG 2008, Gliwice-Ustroń, 22-24 października 2008, s. 135-144.
4. Müller L.: *Przekładnie zębate – dynamika*. WNT, Warszawa 1986.
5. Müller L.: *Przekładnie zębate – projektowanie*. WNT, Warszawa 1996.
6. Osiński J.: Wybór modelu dynamicznego dla analizy obciążeń w przekładni zębatej. *Mechanika teoretyczna i stosowana*, nr 29, 1991, s. 621-634.
7. Skoć A.: *Dynamika przekładni zębatych stożkowych maszyn górniczych*. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo*, z. 226, Gliwice 1996.
8. Skoć A.: *Prognozowanie własności dynamicznych przekładni zębatych stożkowych*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
9. Wilk A., Niedziela J., Łazarz B.: *Badania stanowiskowe zużycia zębów kół walcowych*. *Proceedings of Theory, Design and Exploitation of Gear and Gearboxes Conference*, VSB – Technical University, Ostrawa 1994.
10. Zajler W.: *Siły dynamiczne w przekładniach dwustopniowych*. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1974.
11. Zimroz R.: *Metoda diagnostyki wielostopniowych przekładni zębatych w układach napędowych przenośników taśmowych z zastosowaniem modelowania*. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 2002.
12. ISO 6336:1996. *Przekładnie zębate walcowe. Obliczanie nośności kół. Podstawowe zasady i ogólne czynniki wpływające*.