

Bernard BARON<sup>\*</sup>, Joanna KOLAŃSKA-PŁUSKA<sup>\*</sup>  
Tomasz KRASZEWSKI<sup>\*\*</sup>

## ZASTOSOWANIE METOD NIEJAWNYCH RUNGEGO-KUTTY DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH SZTYWNYCH MODELU TRANSFORMATORA JEDNOFAZOWEGO W STANIE BIEGU JAŁOWEGO

Postęp techniczny w produkcji blach transformatorowych związany ze wzrostem maksymalnych dopuszczalnych indukcji magnetycznych powoduje, że współczesne transformatory posiadają coraz to mniejsze gabaryty. Pociąga to za sobą zmniejszanie prądów biegu jałowego. Dla takich warunków pojawia się problem ze stabilnością rozwiązania, ponieważ wzrasta sztywność równań różniczkowych opisujących stany nieustalone tych transformatorów. Ażeby zaradzić tego typu problemom autorzy proponują do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, modelujących stany nieustalone transformatorów, metody niejawne Rungego-Kutty.

SŁOWA KLUCZOWE: sztywne nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne, metody niejawne Rungego-Kutty, model obwodowy transformatora jednofazowego.

### 1. MODEL TRANSFORMATORA JEDNOFAZOWEGO Z NIELINIOWĄ CHARAKTERYSTYKĄ MAGNESOWANIA W STANIE BIEGU JAŁOWEGO

Mając na uwadze badanie stanów nieustalonych transformatora jednofazowego podana będzie w pierwszej kolejności znana ogólnie konstrukcja równań różniczkowych modelujących te stany.

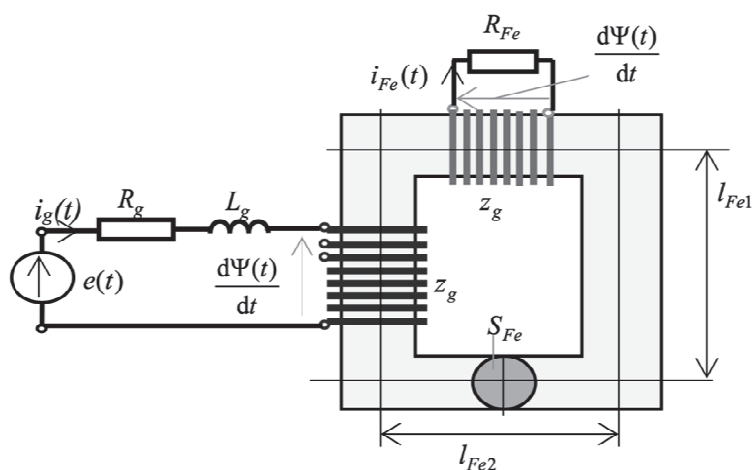
Schemat transformatora z oznaczonymi wielkościami przedstawiono na rys. 1., gdzie:  $z_g$  – liczba zwojów uzwojenia górnego,  $l_{Fe_1}$  – średnia długość słupa transformatora,  $l_{Fe_2}$  – średnia długość jarzma transformatora,  $S_{Fe}$  – przekrój poprzeczny rdzenia transformatora,  $R_{Fe}$  – rezystancja zwierająca cewkę symulująca straty mocy w rdzeniu,  $L_g$  – indukcyjność rozproszenia strony górnej transformatora,

---

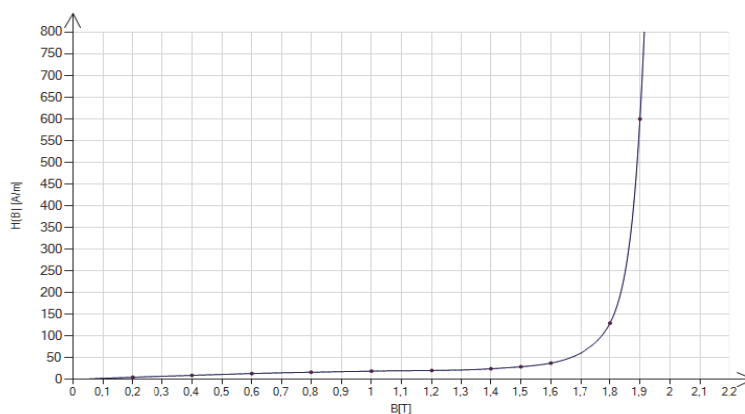
<sup>\*</sup> Politechnika Opolska

<sup>\*\*</sup> Centrum Badawczo-Rozwojowe GLOKOR Sp. z o.o.

$R_g$  – rezystancja strony górnej transformatora,  $L_S$  – indukcyjność własna zastępcza źródła zasilania,  $R_S$  – rezystancja zastępcza źródła zasilania,  $\Psi(t)$  – wartość chwilowa strumień skojarzonego z  $z_g$  zwojami strony górnej transformatora tj.  $\Psi(t) = z_g \varphi(t)$ ,  $\varphi(t)$  – wartość chwilowa strumień magnetyczny obwodu magnetycznego,  $i_g(t)$  – wartość chwilowa prądu strony górnej-pierwotnej,  $i_{Fe}(t)$  – wartość chwilowa prądu zwierającego cewkę rezystancją  $R_{Fe}$  o  $z_g$  zwojach symulujących straty mocy w rdzeniu żelaznym transformatora,  $e(t)$  – wartość chwilowa napięcia zasilania  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi_0)$ ,  $\phi_0$  – faza początkowa napięcia zasilania.



Rys. 1. Schemat transformatora jednofazowego



Rys. 2. Charakterystyka magnesowania blach transformatorowych typu Power Core H 105-30 A Company of ThyssenKrupp Electrical Steel. Balacha H 105-30, gęstość 7,65 kg/dm<sup>3</sup>, straty przy 1,7 T > 1,05 W/kg

Zakłada się znajomość charakterystyki rdzenia transformatora (rys. 2) w postaci funkcji  $H(B)$  aproksymowanej wielomianem w postaci:

$$H(B) = \sum_{k=1}^{11} a_k B^{2k-1}. \quad (1)$$

Oznacza się siły magnetomotoryczne  $\Theta(t)$  transformatora dla stanu biegu jałowego przez:

$$\Theta(t) = [i_g(t) - i_{Fe}(t)] z_g. \quad (2)$$

Zgodnie z oznaczeniami rys. 1 jako zmienne stanu transformatora jednofazowego dla stanu biegu jałowego przyjmuje się następujące wielkości:

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T = [\Psi(t), i_g(t)]^T. \quad (3)$$

Dla nieliniowego obwodu magnetycznego transformatora na mocy II prawa Kirchhoffa otrzymuje się:

$$\Theta(t) = U_m(\varphi(t)), \quad (4)$$

gdzie  $U_m(\varphi(t))$  – spadek napięcia magnetycznego obwodu magnetycznego transformatora.

Dla zadanej charakterystyki magnesowania blach transformatorowych  $H(B)$  spadek napięcia magnetycznego można w przybliżeniu wyrazić następująco:

$$U_m(\varphi(t)) = U_m \left( \frac{\Psi(t)}{z_g} \right) = H \left( \frac{\varphi(t)}{S_{Fe}} \right) l_{Fe} = H \left( \frac{\Psi(t)}{z_g S_{Fe}} \right) l_{Fe} = H \left( \frac{x_1(t)}{z_g S_{Fe}} \right) l_{Fe}. \quad (5)$$

Dla cewki symulującej straty w żelazie zwartej rezystorem  $R_{Fe}$  można zapisać:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = z_g \frac{d\varphi(t)}{dt} = R_{Fe} i_{Fe}(t). \quad (6)$$

Wyrażając prąd  $i_{Fe}(t)$  w równaniu (6) przez pochodną strumienia skojarzonego oraz uwzględniając równania (2), (4-5) i pochodną  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$  można wyrazić następującym wzorem:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = R_{Fe} i_{Fe}(t) - \frac{R_{Fe} l_{Fe}}{z_g} H \left( \frac{\Psi(t)}{z_g S_{Fe}} \right). \quad (7)$$

Na mocy II prawa Kirchhoffa po stronie górnej transformatora można zapisać następujące równania:

$$(L_g + L_S) \frac{di_g(t)}{dt} + (R_g + R_S) i_g(t) + \frac{d\Psi(t)}{dt} = e(t). \quad (8)$$

Pochodną strumienia skojarzonego  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$  w równaniu (8) wyraża się zmiennymi stanu (3) zgodnie z wzorem (7). Uwzględniając oznaczenia (3) zmiennych stanu równania (7) i (8) można zapisać w następującej postaci normalnej:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= R_{Fe}x_2(t) - \frac{R_{Fe}l_{Fe}}{z_g} H\left(\frac{x_1(t)}{z_g S_{Fe}}\right) = f_1(\mathbf{X}(t), t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{1}{L_g + L_S} \left[ -(R_g + R_S)x_2(t) - f_1(\mathbf{X}(t), t) + e(t) \right] = f_2(\mathbf{X}(t), t). \end{aligned} \quad (9)$$

Równania (9) będą podstawą badania stanów nieustalonych transformatora jednofazowego przy biegu jałowym. Równanie to można zapisać w postaci wektorowej:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}(t), t) \\ f_2(\mathbf{X}(t), t) \end{bmatrix} = F[\mathbf{X}(t), t], \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \quad (10)$$

Przykładowe rozwiązanie równań stanu (9) transformatora przy biegu jałowym oraz zerowych warunkach początkowych pokazuje, że strumień skojarzony  $\Psi(t) = x_1(t)$  ma bardzo powoli zanikającą składową stałą w kolejnych okresach napięcia zasilania przy równoczesnych dużych zmianach prądu strony górnej. Stanowi to tak zwany problem sztywny równań różniczkowych, których rozwiązanie wymaga globalnie stabilnych metod rozwiązywania.

## 2. ZASTOSOWANIE METOD NIEJAWNYCH RUNGEGO-KUTTY

Do rozwiązywania tego problemu proponuje się stosować niejawne metody Rungego-Kutty. Metody niejawne typu Runge-Kuta mają ogólnie postać:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{K}_j^{(i)}, \quad (11)$$

gdzie:  $w_j$  są stałymi, natomiast wektory  $\mathbf{K}_j^{(i)}$  wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{K}_j^{(i)} = h_i \mathbf{F} \left[ \mathbf{X}_i + \sum_{l=1}^m a_{jl} \mathbf{K}_l^{(i)}, t_i + c_j h_i \right] \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

przy czym  $h_i = t_{i+1} - t_i$  oraz  $c_l = \sum_{j=1}^m a_{lj}$ .

Dla niejawnych  $m$ -etapowych metod Rungego-Kutty istnieją pewne wybory węzłów  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , dla których można otrzymać wysokie rzędy metody. Jak wiadomo, kwadraturą o maksymalnym rzędzie aproksymacji jest kwadratura

Gaussa. Dlatego celowym jest taki wybór węzłów  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , które stanowią zera kwadratowej formuły wysokiego rzędu. W niniejszym opracowaniu przetestowany będzie wybór metod bazujących na aproksymacji kwadratury Gaussa-Legendrea i Radau pozwalające na otrzymanie rzędów metody odpowiednio  $2m$ ,  $2m-1$  i  $2m-2$  [1]. Wykazuje się, że wszystkie wymienione metody niejawne Rungego-Kutty są A-stabilne [3] a więc najbardziej przydatne do rozwiązywania równań różniczkowych sztywnych. Dla algorytmów niejawnych Rungego-Kutty opracowano formuły włożone [2, 4] pozwalające na śledzenie lokalnego błędu rozwiązania.

Autorzy opracowali bibliotekę numeryczną w język C# [1], która zawiera implementację wszystkich wariantów wymienionych powyżej. Ponadto zastosowali w oprogramowaniu [1] koncepcję estymacji błędu całkowania podaną przez Jacques J.B.de Swarta oraz Gustafa Soderlinda [5]. W myśl tej koncepcji wektor błędu  $i$ -tej iteracji jako różnicę rozwiązania  $\mathbf{X}_{i+1}$  oraz przybliżenia  $\tilde{\mathbf{X}}_{i+1}^{(1)}$ :

$$E_i = E_i(t_i + h_i, h_i) \cong \mathbf{X}_{i+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{i+1}^{(1)}, \quad (13)$$

można otrzymać [1, 5]:

$$E_i(t_i + h_i, h_i) = \left[ 1 - \gamma h_i \mathbf{J}(\mathbf{X}_{i+1}, t_i + h_i) \right]^{-1} \left[ \sum_{j=0}^m e_j \mathbf{K}_j^{(i)} - \gamma h_i \mathbf{F}(\mathbf{X}_{i+1}, t_i + h_i) \right] \quad (14)$$

gdzie:  $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$  – macierz Jacobiego funkcji wektorowej  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ,

$$e_j = \begin{cases} -\tilde{w}_0 & \text{dla } j=0 \\ \tilde{w}_0 v_{j1} + \gamma p_j & \text{dla } j=1, 2, \dots, m \end{cases}, \quad p_i = \sum_{j=1}^m v_{ij}$$

oraz  $v_{ij}$  - elementy macierz odwrotnej Vandermonde'a  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mm} \end{bmatrix} \text{ oraz} \quad (15)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_m \\ (c_1)^2 & (c_2)^2 & (c_3)^2 & \cdots & (c_m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_1)^{m-1} & (c_2)^{m-1} & (c_3)^{m-1} & \cdots & (c_m)^{m-1} \end{bmatrix}$$

Wykazuje się, że aby metoda włożona była stabilna musi zachodzić warunek  $\left| \frac{\tilde{w}_0}{\gamma} \right| < 1$ . Badania teoretyczne [1] oraz własne badania eksperymentalne wykaza-

ły, że obszar stabilności metody włożonej przy parametrach:  $\left| \frac{\tilde{w}_0}{\gamma} \right| = 0,067$ ,

$\tilde{w}_0 = 0,01$ , zbliża się do obszaru stabilności metod niejawnych Rungego-Kutty. Opracowana biblioteka numeryczna zastosowana została w konstrukcji oprogramowania zorientowanego obiektowo do badania dynamiki transformatora w stanie biegu jałowego.

### 3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Dla obliczeń testujących przyjęto następujące dane transformatora jednofazowego (patrz rys. 1).

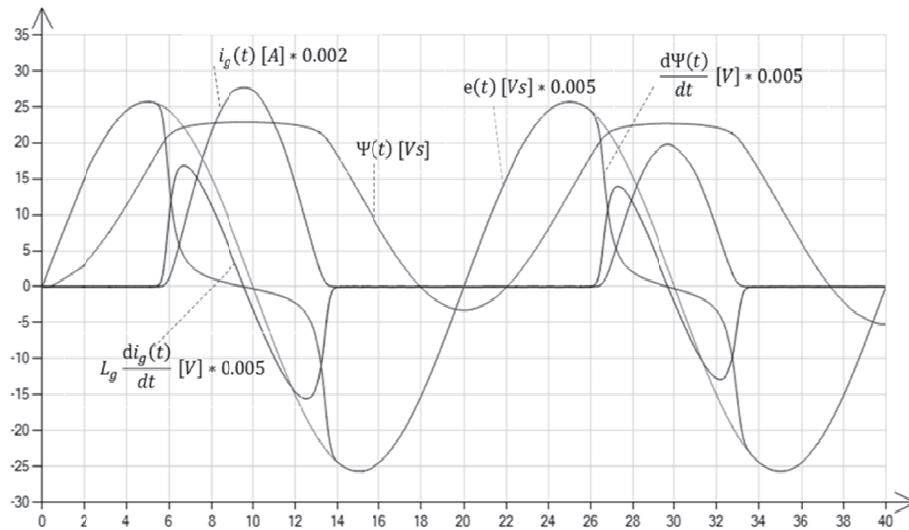
Tabela 1. Dane modelu transformatora do eksperymentu numerycznego.

Napięcie znamionowe górne $U_{ng} = 3637 V$	Napięcie zasilania $U_s = 3637 V$
Napięcie znamionowe dolne $U_{nd} = 156 V$	Faza początkowa napięcia zasilania $\phi_0 = 79^\circ$
Prąd znamionowy górny $I_{ng} = 1100 A$	Reaktancja zastępcza sieci $X_s = 0,1 \Omega$
Liczba zwojów strony górnej $z_g = 93$	Rezystancja zastępcza sieci $R_s = 0,04 \Omega$
Straty mocy w miedzi $\Delta P_{Cu} = 25 kW$	Długość słupa $l_{Fe2} = 1,4 m$
Straty mocy w żelazie $\Delta P_{Fe} = 8 kW$	Długość jarzma $l_{Fe1} = 0,76 m$
Napięcie zwarcia $U_{zw} = 5\%$	Częstotliwość napięcia sieci zasilającej $f = 50 Hz$
Przekrój rdzenia $S_{Fe} = 0,110565 m^2$	

Do testów obliczeniowych wybrano blachę transformatorową typu Power Core H 105-30 A company of ThyssenKrupp Elektrial Steel (rys.2).

Tabela 2. Współczynniki funkcji  $H(B)$  (1) otrzymane z rozwiązania zadania estymacji w oparciu o dane blach transformatorowych typu Power Core H 105-30.

$i$	$a_i$	$i$	$a_i$
1	29,9624271037522	7	1516,77585894405
2	-76,4912078883278	8	-630,577358829122
3	420,867774746849	9	160,397849549712
4	-1274,37623231261	10	-22,7840824031901
5	2196,27285444425	11	1,38472183966324
6	-2301,93260519503		



Rys. 3. Przebiegi czasowe napięcia zasilania  $e(t)$  oraz zmiennych stanu  $i_g(t)$ ,  $\Psi(t)$  siły elektromotorycznej indukowanej w uzwojeniu górnym  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$ , siły elektromotorycznej indukowanej na indukcyjności rozproszenia cewki górnej  $L_g \frac{di_g(t)}{dt}$  dla 2 okresów  $T_0 = 20 \text{ ms}$

Na rys. 3 podano rozwiązanie zmiennych stanu  $i_g(t)$ ,  $\Psi(t)$  z rozwiązania układu równań różniczkowych (9) w przedziale całkowania trzech okresów napięcia zasilania z fazą początkową napięcia  $\phi_0 = 79^\circ$  z automatycznym doborem kroku całkowania przy zadanym błędzie absolutnym  $\varepsilon_a = 10^{-7}$  oraz względnym  $\varepsilon_w = 10^{-11}$ . Z pokazanych przebiegów wynika, że prąd strony górnej transformatora  $i_g(t)$  posiada w każdym okresie impuls stopniowo zanikający. Eksperyment

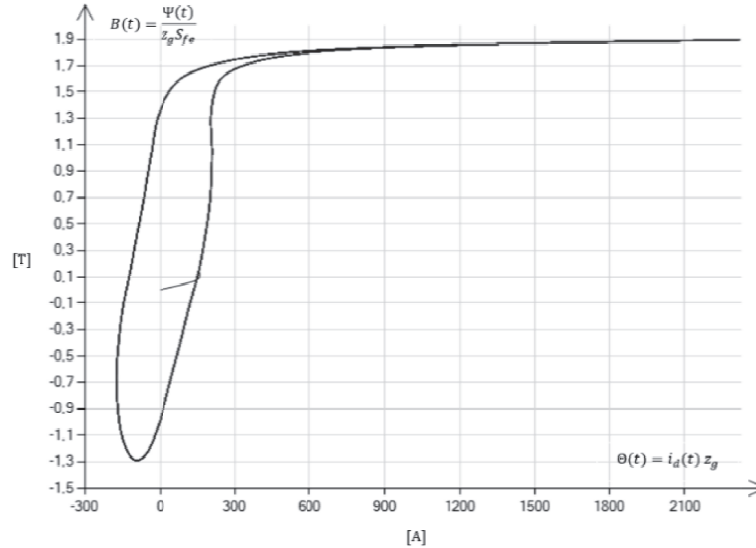
całkowania po okresie pokazuje (rys. 3) bardzo powolny zanik składowej stałej strumienia skojarzonego  $\Psi(t)$  oraz impulsów prądu  $i_g(t)$ . Badanie stanu nieustalonego z zerowymi warunkami początkowymi i automatycznym doborze kroku całkowania przeprowadzono dla różnych metod bazujących na aproksymacji kwadratury Gaussa-Legendrea i Radau. Badania te przeprowadzono dla wariantu 5 – etapowego tych metod przy fazie początkowej napięcia zasilania  $\phi_0 = 79^\circ$ , z automatycznym doбором kroku całkowania i zadaniem błędzie absolutnym  $\varepsilon_a = 10^{-7}$  oraz względnym  $\varepsilon_w = 10^{-11}$ . W tabeli 3 podano liczbę iteracji niezbędnych do wykonania całkowania w przedziale czasowym trzech okresów napięcia zasilania przez wymienione metody jak to przedstawiono na rys. 3. Z eksperymentu tego wynika, że najmniejszą liczbę iteracji wykonują metody Radau IIA.

Tabela 3. Wyniki pomiarów.

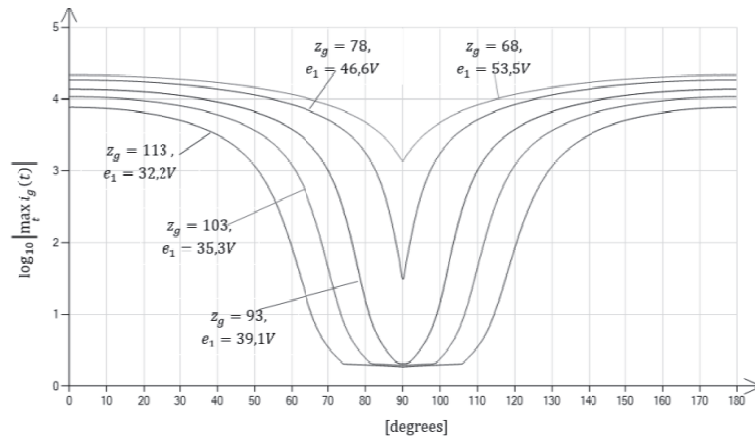
Metoda	Liczba etapów	Rząd metody	Liczba iteracji
Gaussa-Legendrea	5	10	337
Radau IA	5	9	616
Radau IIA	5	9	140

Dla pokazania powolnego zbliżania się zmiennych  $i_g(t)$ ,  $\Psi(t)$  do stanu ustalonego proponuje się pokazać te zmienne w postaci pewnej płaszczyzny fazowej, dla której na osi pionowej odkłada się indukcję magnetyczną rdzenia jako  $B(t) = \frac{\Psi(t)}{z_g S_{Fe}}$  natomiast na osi poziomej przepływ magnetyczny w postaci  $\Theta(t) = i_g(t) z_g$ . Na rys. 4 pokazano rozwiązanie dla zerowych warunków początkowych dla przedziału całkowania stanowiącego trzy okresy napięcia zasilania oraz przy fazie początkowej napięcia zasilania wynoszącej  $\phi_0 = 80^\circ$ . Jak wynika z tej prezentacji, po szybkim wyjściu z zerowych warunków początkowych trajektoria szybko zbliża się do pewnego cyklu granicznego. Nie oznacza to jednak, że jest to cykl graniczny stanowiący stan ustalony układu.





Rys. 4. Płaszczyzna fazowa stanu nieustalonego biegu jałowego transformatora od zerowych warunków początkowych w przedziale trzech okresów napięcia zasilania



Rys. 5. Logarytm dziesiętny maksymalnych wartości impulsów prądowych strony górnej transformatora  $|\max_t i_g(t)|$  w zależności od fazy początkowej napięcia zasilania

O sztywności układu równań różniczkowych (9) świadczą wielkości impulsów prądowych przebiegu prądu strony górnej  $i_g(t)$  (rys. 3). Wielkości tych impulsów prądowych zależą od fazy początkowej  $\phi_0$  napięcia zasilania  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi_0)$  i osiągają maksymalne wartości dla zerowej fazy początkowej  $\phi_0 = 0$  co odpowiada zerowej wartości początkowej napięcia zasilania

$e(0) = 0$  (rys. 5). Przeprowadzone eksperymenty numeryczne pokazują również (rys. 3), że wielkość impulsów prądowych jest tym większa im większe jest napięcie przypadające na jeden zwój w transformatorze. O wartości tej wielkości decyduje projektant ustalając w zasadzie do jakiego punktu nasycenia może dochodzić punkt pracy transformatora. Ogólnie można więc stwierdzić, że im większe nasycenie magnetyczne rdzenia transformatora tym większe przy załączeniu transformatora wystąpią impulsy prądowe.

Na rys. 3 pokazano przebiegi zmiennych stanu  $i_g(t)$ ,  $\Psi(t)$  oraz wielkości wyrażone przez ich pochodne tj. siłę elektromotoryczną indukowaną w uzwojeniu górnym  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$ , siłę elektromotoryczną indukowaną na indukcyjności roz-

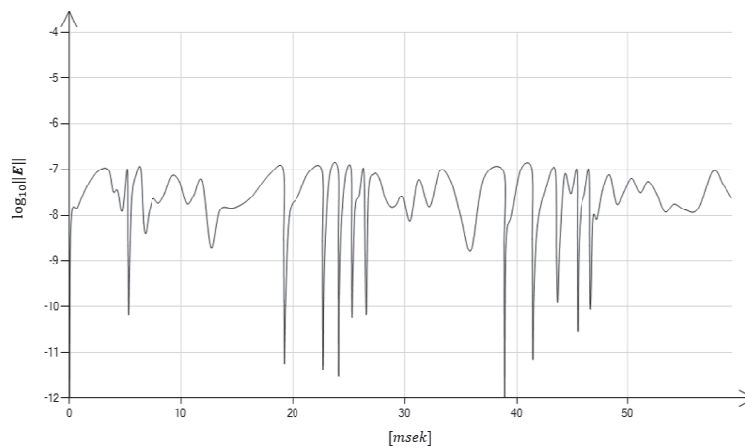
proszczenia cewki górnej  $\frac{L_g di_g(t)}{dt}$  jak również napięcie zasilania  $e(t)$ . W obliczeniach założono zerowe warunki początkowe, zerową fazę początkową, liczbę zwojów cewki górnej  $z_g = 93$ , napięcie skuteczne zasilania 3637 V oraz przedział całkowania dwóch okresów napięcia zasilania. Rozwiązanie to odpowiada najbardziej krytycznemu stanowi pracy transformatora oraz bardzo dużej sztywności opisujących go równań różniczkowych. Dla zestawienia wszystkich wielkości na jednym rysunku zastosowano różne współczynniki skali.

Zaczynając od zerowych warunków początkowych oraz zerowego napięcia zasilania strumień magnetyczny skojarzony z  $z_g$  zwojami  $\Psi(t)$  powoli narasta wraz ze wzrostem napięcia zasilania  $e(t)$ . Towarzyszy temu niewielki wzrost prąd  $i_g(t)$  od zera do kilku amperów niewidoczny na rysunku w przedziale od zera do sześciu milisekund. Prąd ten jednak wytwarza przepływ generujący strumień skojarzony  $\Psi(t)$ , którego pochodna jest siłą elektromotoryczną  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$  indukowaną w cewce strony górnej niewiele różniący się od napięcia zasilania  $e(t)$  co powoduje na rys. 3 pokrywanie się tych przebiegów. Po upływie 6 ms narastania strumień skojarzony  $\Psi(t)$  powoduje stopniowe nasycenie się indukcji magnetycznej w rdzeniu co przy dalszym wzroście prądu  $i_g(t)$  daje niewielki wzrost strumienia, który po pewnym czasie osiąga maksimum. Pochodna tego strumienia, czyli siła elektromotoryczna indukowana w cewce gwałtownie maleje w tym przedziale czasowym co powoduje gwałtowny wzrost prądu  $i_g(t)$ , który osiąga maksimum w chwili przejścia strumienia  $\Psi(t)$ , przez maksimum. Impuls prądowy pojawiający się w tym przedziale czasowym powoduje powstanie bardzo dużej siły elektromotorycznej samoindukcji na indukcji rozproszenia transformatora i zastępczej indukcji źródła zasilania co z malejącą siłą elektro-

motoryczna cewki  $\frac{d\Psi(t)}{dt}$  jest równe napięciu zasilania. Proces ten powtarza się w kolejnych przedziałach czasowych napięcia zasilania i zanika po kilkudziesięciu okresach. Czas zaniku tych impulsów zależy przede wszystkim od wartości rezystancji zastępczej układu zasilania  $R_S$ .

Realizacja procesu całkowania w długich przedziałach czasowych, celem osiągnięcia stanu ustalonego transformatora mimo sztywności jego równań różniczkowych (9), jest możliwa ze względu na absolutną stabilność metod niejawnych stosowanych w procesie obliczeniowym.

Stosowana do realizacji obliczeń własna biblioteka numeryczna [1] jest wyposażona dodatkowo w metody rejestrujące błąd estymowany zarówno w procesie obliczeń ze stałym krokiem całkowania jak przy jego automatycznym wyborze.



Rys. 6. Logarytm dziesiętny z normy wektora błędu estymowanego w procesie obliczeń zgodnie z wzorem (14) dla rozwiązania przedstawionego na rys. 5

Na rys. 6 pokazano logarytm dziesiętny z normy wektora błędu estymowanego w procesie obliczeń dla przypadku rozwiązania z rys. 3. W przypadku tym proces obliczeń realizowano z automatyczny doбором kroku całkowania przy zadanym błędzie absolutnym  $\varepsilon_a = 10^{-7}$  oraz względnym  $\varepsilon_w = 10^{-11}$ . Z danych pokazanych na tym rysunku wynika, że algorytm utrzymuje zadany błąd absolutny. W badaniach stanu nieustalonego transformatora we wszystkich przypadkach obliczeń a szczególnie dla dużych przedziałów czasowych całkowania, algorytm utrzymywał zadany błąd absolutny obliczeń zmiennych stanu.

#### 4. PODSUMOWANIE

Do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych modelujących stany nieustalone transformatorów przy biegu jałowym zastosowano metody niejawne Rungego-Kutty z kwadraturą o maksymalnym rzędzie aproksymacji dla formuł Gaussa-Legendrea i Radau [2–4]. Na bazie własnej biblioteki numerycznej [1] opracowano w języku C# oprogramowanie zorientowane obiektowo pozwalające na badanie dynamiki transformatora w stanie jałowym z różnych punktów widzenia. Zaprezentowane wyniki mogą być pomocne projektantom transformatorów przy doborze znamionowego punktu pracy na charakterystyce magnesowania w zależności od zastosowanej blachy transformatorowej.

#### LITERATURA

- [1] Baron B., Kolańska-Płuska J. Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych w języku C#. Wydawnictwo Politechniki Opolskiej 2015, ISBN 978 83 65235 30 5 (in Polish).
- [2] Dos Passos W., Numerical Methods Algorithms and Tools in C#. CRC Press, 2010 by Taylor & Francis Group LLC, Boca Raton London New York.
- [3] Dekker K., Verwer J.G., Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland Amsterdam-New York – Oxford 1984.
- [4] Hairer E., Wanner G., Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-algebraic Problems, 2nd revised ed., Springer, Berlin, 1996.
- [5] de Swart J. J.B., Söderlind G., On the construction of error estimators for implicit Runge-Kutta methods. Journal of Computational and Applied Mathematics 86, 1997, pp. 347–358.

#### APPLICATION OF RUNGE-KUTTA'S IMPLICIT METHODS TO SOLVE STIFF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A PERIPHERAL MODEL OF A SINGLE-PHASE TRANSFORMER

Technological progress in the production of transformer sheets associated with the increasing of maximum permissible magnetic inductions causes that modern transformers have smaller and smaller dimensions. Also, idling currents are decreasing. For such conditions, the problem with stability of the solution of numerical calculation could occur because the stiffness problem of differential equations describing transient states of these transformers increases. In order to remedy such problems, authors propose to solve ordinary differential equations modeling transient states of transformers by Runge-Kutta's implicit methods.

*(Received: 18.02.2019, revised: 07.03.2019)*