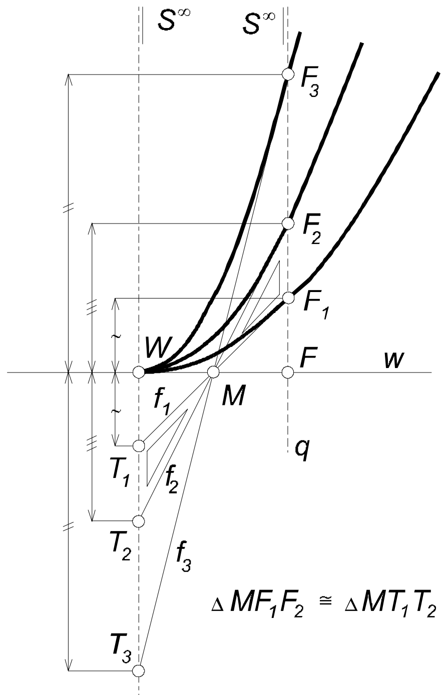
Marian PALEJ
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Śląska

ELEMENTARNE UZASADNIENIE JEDNOLITEJ KONSTRUKCJI STYCZNYCH I PUNKTÓW STYCZNOŚCI KRZYWYCH STOPNIA DRUGIEGO

Zauważmy następującą własność pasma parabol, którego bazą są dwie pary zjednoczonych stycznych: styczna niewłaściwa s^{∞} wraz z punktem styczności S^{∞} /środek/ oraz dowolna styczna t wraz z punktem styczności T.
Z dobrze znanej konstrukcji stycznej f do paraboli w punkcie F wynika, że gdy punkt ten, należący do kolejnych parabol pasma porusza się po średnicy zajmując kolejne położenia F_i - odpowiednie styczne w tych punktach stanowią promienie pęku o środku W, leżącym na wspólnej stycznej wierzchołkowej w. Punkt W połowi odległość punktu F_i od osi.

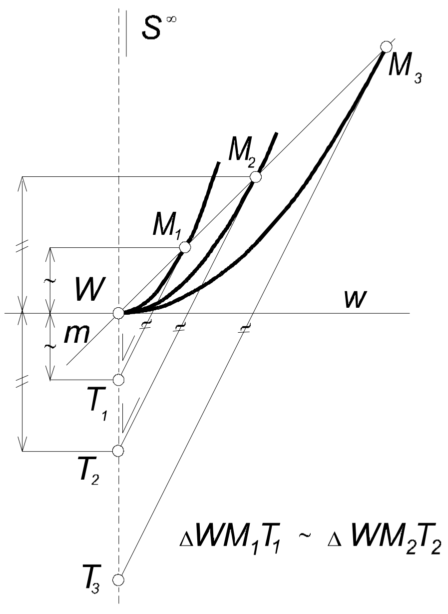
Oznacza to prawdziwość następującego spostrzeżenia, którego dowód sprowadzić można do wskazania przystawania trójkątów zakreślonych na rysunku 1:



Rys. 1

pasmo parabol o wspólnym środku S^{∞} *i wierzchołku* **W** *posiada tę własność, że proste pęku* **(M)** *o środku* **M** *różnym od punktu* **W** *i leżącym na stycznej wierzchołkowej* **w** *stykają się z kolejnymi parabolami pasma w punktach współliniowych; prosta przechodząca przez poszczególne punkty styczności jest średnicą parabol pasma* ..../1/

Podobnie prosto można wyprowadzić kolejne spostrzeżenie dotyczące pęku parabol o wspólnym środku S^{∞} i wspólnym wierzchołku W /rys.2/ :



Rys. 2

pęk parabol o wspólnym środku S^{∞} *i wierzchołku* **W** *posiada tę własność, że w punktach szeregu, którego podstawą jest dowolna, różna od osi parabol oraz nieidentyczna z styczną* **w** *prosta* **m** *przechodząca przez wierzchołek - styczne do poszczególnych parabol pęku są do siebie równoległe* ..../2/

Prawdziwość spostrzeżenia /2/ wynika z podobieństwa trójkątów zakreślonych na rysunku 2. Nie trudno przy tym zauważyć, że obydwa spostrzeżenia są dwoiste.

Załóżmy teraz, że rozpatrywane pasmo /pęk/ parabol poddajemy przekształceniu rzutowemu. Pękowi prostych ***(M)*** z rys.1 odpowie pęk ***(M ')***, którego baza, powstała z przekształcenia bazy pasma parabol zawierać będzie dwie pary zjednoczonych prostych stycznych, tj. dwie proste styczne wraz z punktami styczności. W rozpatrywanym przekształceniu nie ulegnie naruszeniu relacja przynależności i styczności, przy czym z parabol powstać mogą zarówno elipsy jak i hiperbole. Wynika stąd, że zauważone spostrzeżenia /1/ i /2/ ważne będą w ogólniejszej redakcji obok parabol także i dla pozostałych rodzajów stożkowych i że w rezultacie można sformułować następujące, dwoiste, ogólniejsze twierdzenia:

"pasmo stożkowych, którego baza składa się z dwóch par zjednoczonych stycznych $\boldsymbol{a=b}$ *i* $\boldsymbol{c=d}$ *ma tę własność, że proste pęku* $\boldsymbol{(M)}$*, którego środek leży na jednej z tych stycznych np.* $\boldsymbol{a=b}$ *stykają się z kolejnymi stożkowymi pasma w punktach współliniowych: prosta* $\boldsymbol{q}$ *zawierająca te punkty przechodzi przez punkt wspólny pozostałych stycznych* $\boldsymbol{c=d}$ *........../3/*

oraz

"pęk stożkowych, którego baza składa się z dwóch par zjednoczonych punktów $\boldsymbol{A=B}$ *i* $\boldsymbol{C=D}$ *ma tę własność, że styczne w punktach szeregu, którego podstawa zawiera jeden z zjednoczonych punktów bazy np.* ***A=B*** *, przechodzą przez jeden punkt wspólny* ***Q****: punkt taki leży na prostej ustalonej przez pozostałe dwa punkty bazy* $\boldsymbol{C=D}$ *............./4/*

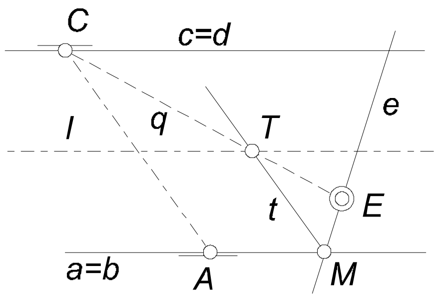
Twierdzenia powyższe są szczególnym przypadkiem uogólnionego twierdzenia, będącego uogólnieniem niektórych własności ognisk stożkowych ujawnionych przez prof.S.Szerszenia za pomocą perspektografu de la Fresnaye'a /1/, /2/.

Z twierdzeń /3/ i /4/ wynika następujący sposób
a/ kreślenia stycznej
b/ wyznaczania punktu styczności
krzywych stopnia drugiego określonych alternatywnie przez pięć punktów lub pięć stycznych przy założeniu jednoczenia się dwóch par zadanych elementów.

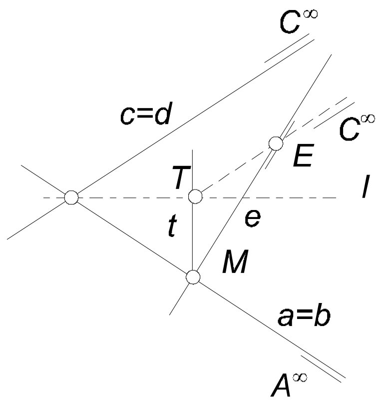
Ad a/:

Niech dana będzie stożkowa $\boldsymbol{s^2}$ określona przez styczne $\boldsymbol{a=b}$ i $\boldsymbol{c=d}$ oraz styczną ***e*** /rys 3,4/. Skonstruować punkt styczności ***E*** prostej ***e***.

Konstrukcja:
Uwzględniając twierdzenie /3/ wyznaczmy:
1/ punkt wspólny ***M*** stycznych ***e*** i $\boldsymbol{a=b}$,
2/ przynależną do punktu ***M*** - styczną ***t*** do jednej z stożkowych pasma /$\boldsymbol{a=b}$, $\boldsymbol{c=d}$/ ; jeżeli przyjąć, że ***t*** // ***AC*** /gdzie $\boldsymbol{A=a \cap b}$ i $\boldsymbol{C=c \cap d}$ / łatwo ustalić jej punkt styczności ***T*** jako wynik przecięcia prostych ***t*** oraz ***l***, gdzie ***l*** jest średnicą sprzężoną z ***AC***,
3/ prostą ***q*** łączącą punkty ***T*** oraz ***C***.



Rys. 3



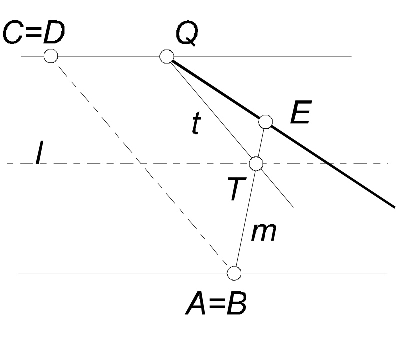
Rys. 4

Prosta $\boldsymbol{q}$ /por.tw.3./ wyznacza na stycznej e szukany punkt styczności $\boldsymbol{E}$.
Rysunek 3 ilustruje opisaną konstrukcję w przypadku kiedy stożkowa $\boldsymbol{s^2}$ jest elipsą. Na rys.4 przedstawiono tę samą konstrukcję dla hiperboli określonej asymptotami o punktach niewłaściwych $\boldsymbol{A^\infty}$ i $\boldsymbol{C^\infty}$ i styczną $\boldsymbol{e}$.

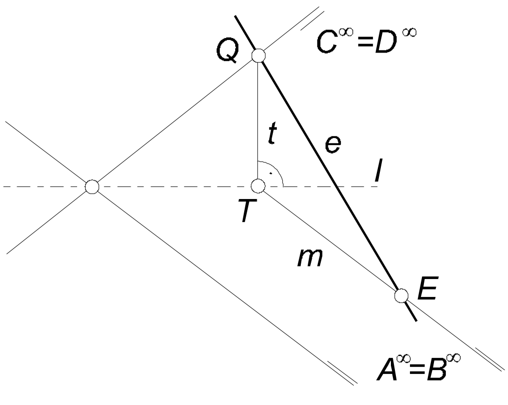
Ad b/:

Niech dana będzie stożkowa $\boldsymbol{s^2}$ określona przez punkty $\boldsymbol{A = B}$, $\boldsymbol{C = D}$ oraz punkt $\boldsymbol{E}$. Należy wyznaczyć styczną $\boldsymbol{e}$ do stożkowej w punkcie $\boldsymbol{E}$ /rys.5, 6/ .

Konstrukcja:
Korzystając z twierdzenia /4/ można zrealizować następujące , kolejne działania:
1/ poprowadzić prostą m łączącą punkt $\boldsymbol{E}$ z punktem $\boldsymbol{A = B}$,
2/ ustalić taki punkt prostej $\boldsymbol{m}$ z którego łatwo jest poprowadzić styczną do jednej z stożkowych pęku /$\boldsymbol{A = B}$, $\boldsymbol{C = D}$/; w rozpatrywanym przykładzie może to być punkt wspólny $\boldsymbol{T}$ prostej m z prostą $\boldsymbol{l}$ sprzężoną z kierunkiem $\boldsymbol{AC}$; styczna w punkcie $\boldsymbol{T}$ jest równoległa do $\boldsymbol{AC}$ i wyznacza na prostej $\boldsymbol{C = D}$ punkt $\boldsymbol{Q}$.
3/ połączyć punkt $\boldsymbol{Q}$ z punktem $\boldsymbol{E}$. Prosta $\boldsymbol{QE}$ jest szukaną styczną stożkowej $\boldsymbol{s^2}$ w punkcie $\boldsymbol{E}$.



Rys. 5



Rys. 6

Podobnie jak w a/ rysunek 5 ilustruje przypadek, w którym stożkowa s^2 jest elipsą, a rysunek 6 przedstawia rozwiązanie dla stożkowej s^2 będącej hiperbolą. W rozważaniach pominięto przypadek paraboli, gdyż w obydwu konstrukcjach odwołanie się do wspomnianej na wstępie konstrukcji stycznych oferuje rozwiązanie najprostsze.

LITERATURA :

[1] M.Palej: "O pewnej konstrukcji uzupełniającej stożkowe pasma i pęku", Biuletyn Polskiego Towarzystwa Geometrii i Grafiki Inżynierskiej, zeszyt nr 6, Gliwice, 1999.

[2] S.Szerszeń: "Niektóre własności ognisk stożkowych ujawnione za pomocą perspektografu de la Fresnaye'a" , Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego - seria: prace matematyczne I.2, 1955

AN ELEMENTARY PROOF OF AN UNIFORM CONSTRUCTION OF THE CONICS TANGENTS AND POINTS OF TANGENCY

Using the classic construction of a parabola's tangent some properties of a conics streak and pencil are proved. These properties as a theorem in a more general case were published in the paper [1].The possibility of utilizing the theorem to construct the tangents and points of tangency to ellipse defined by the conjugated diameters and to hyperbola defined by its asymptotes is shown.