

# **Metoda wyznaczania średniego czasu dojścia do stanu pochłaniającego jednorodnego łańcucha Markowa**

**Włodzimierz KWIATKOWSKI**

Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,  
ul. Gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa  
w.kwiatkowski@ita.wat.edu.pl

**STRESZCZENIE:** Rozpatrywany jest jednorodny łańcuch Markowa o wielu stanach pochłaniających. Przedstawiona jest metoda wyznaczania średniego czasu dojścia do wybranego stanu pochłaniającego. Metoda oparta jest na rozszerzeniu zadanego łańcucha Markowa o nowe stany. Dla łańcucha rozszerzonego definiowana jest funkcja wypłat towarzysząca tranzycjom. Szczególne podejście do analitycznego rozwiązania problemu związane jest z zależnością wypłaty nie tylko od tranzycji, ale także od czasu. Rozpatrywane w artykule zadanie pojawia się przy projektowaniu interfejsów, protokołów, planowania etapowych przedsięwzięć o charakterze transportowym, produkcyjnym itp.

**SŁOWA KLUCZOWE:** łańcuch Markowa, łańcuch Markowa z dochodami, analiza niezawodności, analiza osiągalności.

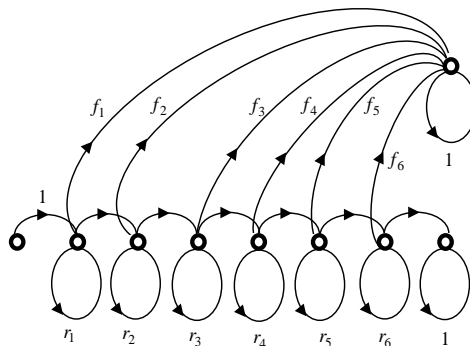
## **1. Modele Markowa**

Modele Markowa znajdują szczególne zastosowanie w zadaniach analizy osiągalności stanów, zwłaszcza zadaniach analizy czasowej procesu dochodzenia do wyróżnionych stanów. Modele te są wykorzystywane przy planowaniu etapowych przedsięwzięć o charakterze transportowym, produkcyjnym i innym (np. przy projektowaniu protokołów transmisji). Zwarte przedstawienie problemów dotyczących wykorzystania procesów Markowa i procesów semi-markowskich do modelowania gotowości i niezawodności urządzeń zawiera monografia F. Grabskiego [3], a także – w odniesieniu do urządzeń

transportowych – praca J. Jaźwińskiego i F. Grabskiego [6]. Bogaty przegląd modeli Markowa wykorzystywanych w zadaniach projektowania i oceny interfejsu człowiek – komputer jest przedstawiony w pracach A. Donigiewicza [1, 2]. Interesujący obszar zastosowań zauważono także w pracy A. Wiśniewskiego [9].

Zastosowanie łańcucha Markowa polega na przedstawieniu zachowania się analizowanego systemu w postaci diagramu przejść (tranzycji) stanów. Zasady tranzycji stanów w czasie są opisane w postaci charakterystyk probabilistycznych. Wynikami analizy są zwykle rozkłady prawdopodobieństwa badanych wielkości. Za podstawową pracę wyczerpująco omawiającą problematykę skończonych procesów Markowa i ich zastosowań uznaje się pracę M. Josifescu [7].

Znaczenie modeli Markowa istotnie zwiększyły prace R. A. Howarda [4, 5]. Podstawą zaproponowanych w tych pracach modeli jest określenie funkcji wypłaty towarzyszącej procesowi zmian stanów. Takie podejście umożliwia wyznaczania różnorodnych charakterystyk badanego procesu jako wartości oczekiwanych wypłat (definiowanych na stanach i tranzycjach). Zastosowanie modeli Markowa z dochodami w zadaniach transmisji danych jest przedstawione w pracy W. Mąki [8].



Rys. 1. Przykład modelu podstawowego w postaci jednorodnego łańcucha Markowa z 2 stanami pochłaniającymi

## 2. Model podstawowy – oznaczenia

Wśród  $n$  stanów łańcucha Markowa wyróżnimy  $m$  stanów pochłaniających i  $l = n - m$  stanów przejściowych w ten sposób, aby macierz przejść łańcucha miała postać:

$$\mathbf{M}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{l \times l} & \mathbf{R}_{l \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times l} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Przyjmujemy, że macierz przejść łańcucha jest niezależna od czasu (czyli łańcuch jest jednorodny).

Przykładowy diagram przejść dla łańcucha Markowa spełniającego sformułowane warunki został przedstawiony na rys. 1. Macierz przejść  $\mathbf{M}$  w tym przypadku ma postać:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 & 0 & f_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 & p_6 & f_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:  $p_i$  – prawdopodobieństwo przejścia (*pass*) do następnego etapu,  $r_i$  – prawdopodobieństwo powtarzania (*repeat*) etapu,  $f_i$  – prawdopodobieństwo zakończenia całego przedsięwzięcia niepowodzeniem (*fail*) na  $i$ -tym etapie, przy czym  $p_i + r_i + f_i = 1$ . Osiągnięcie stanu 8. (*success*) oznacza zakończenie przedsięwzięcia sukcesem, stanu 9. zaś – niepowodzeniem (*fail*). Postać blokowa macierzy  $\mathbf{M}_{9 \times 9}$  jest następująca:

$$\mathbf{M}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 & 0 & f_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 & p_6 & f_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{7 \times 7} & \mathbf{R}_{7 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 7} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

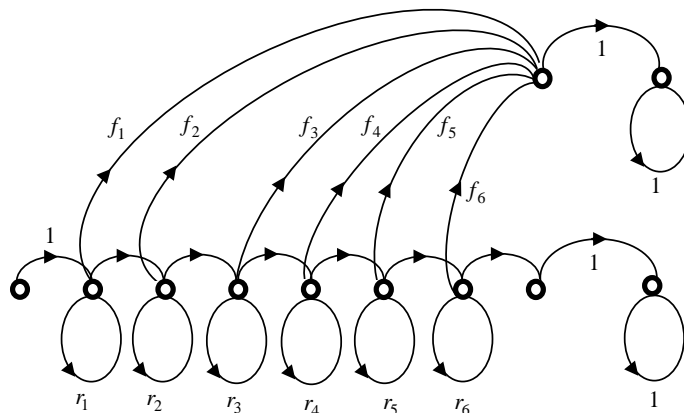
gdzie:

$$\mathbf{Q}_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{7 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_1 \\ 0 & f_2 \\ 0 & f_3 \\ 0 & f_4 \\ 0 & f_5 \\ p_6 & f_6 \end{bmatrix}$$

Rozkład prawdopodobieństwa w chwili  $k$  na stanach łańcucha oznaczamy następująco:

$$\boldsymbol{\pi}(k) = [\Pr\{\text{stan}(k) = 1\}, \Pr\{\text{stan}(k) = 2\}, \dots, \Pr\{\text{stan}(k) = n\}] = [\boldsymbol{\pi}_{tr}(k) \boldsymbol{\pi}_{ab}(k)] \quad (4)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\pi}_{tr}(k) = [\Pr\{\text{stan}(k) = 1\}, \Pr\{\text{stan}(k) = 2\}, \dots, \Pr\{\text{stan}(k) = l\}]$  oznacza wektor prawdopodobieństw stanów przejściowych (tranzycyjnych), natomiast  $\boldsymbol{\pi}_{ab}(k) = [\Pr\{\text{stan}(k) = l+1\}, \dots, \Pr\{\text{stan}(k) = n\}]$  – wektor prawdopodobieństw stanów pochłaniających (absorpcyjnych).



Rys. 2. Model rozszerzony dla przykładu z rys. 1

### 3. Model rozszerzony

Rozszerzenie modelu podstawowego polega na zwiększeniu liczby stanów przez zastępowanie stanu pochłaniającego parą stanów. Celem takiego

postępowania jest uzyskanie możliwości zdefiniowania wypłaty towarzyszącej przejściu ze stanu pierwszego pary do stanu drugiego pary. W przypadku obliczania czasu dojścia do stanu pochłaniającego wypłata ta jest równa wartości czasu, w którym następuje przejście. Pozostałe przejścia i stany nie generują żadnych wypłat.

Diagram przejść dla rozszerzenia omawianego wcześniej łańcucha Markowa został przedstawiony na rys. 2. Macierz przejść  $\mathbf{M}$  tego łańcucha ma postać:

$$\mathbf{M}_{11 \times 11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 & 0 & f_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 & p_6 & f_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{9 \times 9} & \mathbf{R}_{9 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 9} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 & 0 & f_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 & p_6 & f_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{9 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. Obliczenie granicznego rozkładu prawdopodobieństwa na stanach

Podstawą obliczeń jest równanie Chapmana–Kolmogorowa, z którego otrzymuje się zależność:

$$\boldsymbol{\pi}(k+1) = \boldsymbol{\pi}(k)\mathbf{M} = \boldsymbol{\pi}(0)\mathbf{M}^k \quad (6)$$

Do analitycznego wyznaczenia funkcji  $\boldsymbol{\pi}(k)$  wykorzystamy przekształcenie  $\mathcal{Z}$ . Niech  $\mathbf{F}(z)$  oznacza transformatę  $\mathcal{Z}$  funkcji  $\mathbf{f}(k)$ , tzn.

$$\mathbf{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}(k)z^{-k} \quad (7)$$

Niech

$$\mathbf{f}(k) = \mathbf{M}^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Mamy:  $\mathbf{f}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{f}(k)$ , przy czym  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{I}$ . Z definicji przekształcenia  $\mathcal{Z}$  mamy:  $z[\mathbf{F}(z) - \mathbf{f}(0)] = \mathbf{M}\mathbf{F}(z)$ . Stąd:

$$\mathbf{F}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \quad (8)$$

Wykonując niezbędne obliczenia dla macierzy  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(z) &= z(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \\ &= z \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{Q} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & (z-1)\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} & (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \frac{1}{z-1} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{z-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Granice przy  $k$  dążącym do nieskończoności obliczymy według wzoru:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathbf{F}(z) \quad (10)$$

gdzie

$$(z-1)\mathbf{F}(z) = (z-1)z(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = z \begin{bmatrix} (z-1)(z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} & (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Wynika stąd, że jeśli macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$  jest nieosobliwa, to istnieje granica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(k) = \mathbf{M}^{\infty} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (12)$$

W przypadku wyróżnienia stanów przejściowych (tranzycyjnych) i stanów pochłaniających (absorpcyjnych) mamy następujący wzór określający rozkład prawdopodobieństwa na stanach:

$$[\pi_{tr}(k+1) \quad \pi_{ab}(k+1)] = [\pi_{tr}(0) \quad \pi_{ab}(0)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^k \quad (13)$$

Stąd wzór określający rozkład graniczny prawdopodobieństwa na stanach jest następujący:

$$\begin{aligned} [\pi_{tr}(\infty) \quad \pi_{ab}(\infty)] &= [\pi_{tr}(0) \quad \pi_{ab}(0)] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{0} \quad \pi_{tr}(0)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} + \pi_{ab}(0)] \end{aligned} \quad (14)$$

Jeśli stanem początkowym nie jest stan pochłaniający, czyli  $\pi_{ab}(0) = \mathbf{0}$ , to

$$\pi_{ab}(\infty) = \pi_{tr}(0)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \quad (15)$$

Dla startu procesu ze stanu pierwszego rozkład  $\pi_{ab}(\infty)$  będzie określał pierwszy wiersz macierzy  $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R}$ .

## 5. Wyznaczenie czasu dojścia do stanu pochłaniającego jako dochodu łańcucha Markowa

Rozwiązywane zadanie polega na wyznaczeniu wartości oczekiwanej czasu dojścia łańcucha Markowa do wskazanego stanu pochłaniającego. Rozwiązanie bazuje na modelu rozszerzonym. Rozszerzenie modelu polega na zastąpieniu stanu pochłaniającego parą stanów. Przejściu ze stanu pierwszego pary do stanu drugiego pary towarzyszy jednorazowa wypłata równa wartości czasu, w którym następuje przejście. Pozostałe przejścia i stany nie generują żadnych wypłat.

W opisanej sytuacji można przyjąć, że w chwili  $k$  oczekiwane wypłaty w poszczególnych stanach opisuje wektor  $\mathbf{u}(k)$ . Dla przedstawionego wcześniej przykładu modelu rozszerzonego wektor ten ma następującą postać:

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Powyższe wzory znajdują zastosowanie odpowiednio: wzór z lewej strony, jeśli obliczany jest czas dojścia do stanu ósmego (*success*), wzór z prawej strony – jeśli obliczany jest czas dojścia do stanu dziewiątego (*fail*). Ogólnie możemy zapisać:

$$\mathbf{u}(k) = k\mathbf{q} \quad (17)$$

gdzie:  $\mathbf{q}$  – wektor wypłat niezależny od czasu.

Model jest tu mechanizmem wypłat: w chwili  $k$  realizowana jest wypłata zależna od stanu. Wartość oczekiwana wypłaty w chwili  $k$  zależy od rozkładu prawdopodobieństwa na stanach łańcucha. Równanie oczekiwanej wypłaty ma postać:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{M}^k \mathbf{u}(k+1) \quad (18)$$

gdzie wektor

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \dots \\ v_{11}(k) \end{bmatrix} \quad (19)$$

oznacza oczekiwaną wypłatę za  $k$  kroków, a  $\mathbf{u}(k)$  – oczekiwaną wypłatę w poszczególnych stanach.

Do wyznaczenia funkcji  $\mathbf{v}(k)$  wykorzystamy przekształcenie  $\mathcal{Z}$ . Transformatę  $\mathcal{Z}$  tej funkcji oznaczymy następująco:

$$\mathbf{V}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}(k)z^{-k} \quad (20)$$

Z definicji funkcji  $\mathbf{v}(k)$  mamy:



$$z(\mathbf{V}(z) - \mathbf{v}(0)) = \mathbf{V}(z) + \mathbf{S}(z)\mathbf{q} \quad (21)$$

gdzie:  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S}(z)$  – transformata  $\mathcal{Z}$  funkcji  $\mathbf{s}(k) = (k+1)\mathbf{M}^k$ . Zatem

$$(z-1)\mathbf{V}(z) = \mathbf{S}(z)\mathbf{q} \quad (22)$$

i w rezultacie

$$\mathbf{V}(z) = \frac{1}{z-1}\mathbf{S}(z)\mathbf{q} \quad (23)$$

Z definicji transformaty  $\mathcal{Z}$  mamy:

$$\mathbf{S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mathbf{M}^k z^{-k} = z(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}^i \quad (24)$$

Wykorzystanie uzyskanego wzoru uniemożliwia fakt nieistnienia granicy

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \mathbf{M}^i$ . W celu potwierdzenia tego faktu rozpatrzmy funkcję:

$\mathbf{g}(k) = \sum_{i=0}^k \mathbf{M}^i$ . Obliczymy transformatę  $\mathcal{Z}$  tej funkcji:  $\mathbf{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}(k)z^{-k}$ .

Ponieważ  $\mathbf{g}(k+1) = \mathbf{I} + \mathbf{M}\mathbf{g}(k)$ , zatem  $z(\mathbf{G}(z) - \mathbf{g}(0)) = \frac{z}{z-1}\mathbf{I} + \mathbf{M}\mathbf{G}(z)$ .

Otrzymujemy stąd, że  $\mathbf{G}(z) = \frac{z^2}{z-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ . Dla  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$  nie istnieje

granica  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}(k)$ , bo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathbf{G}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ , a macierz

$\mathbf{I} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{Q} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  jest osobliwa.

Rozwiązanie tego problemu opiera się na rozdzieleniu wektora wypłat  $\mathbf{q}$  na dwa wektory: wektor wypłat  $\mathbf{q}_{tr}$  dla stanów przejściowych i wektor wypłat  $\mathbf{q}_{ab} = \mathbf{0}$  dla stanów pochłaniających:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{q}_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Rozważmy funkcję:  $\mathbf{w}(k) = \sum_{i=0}^k \mathbf{M}^i \mathbf{q}$ . Transformata  $\mathcal{Z}$  tej funkcji jest równa:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(z) &= \frac{z^2}{z-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{q} = \frac{z^2}{z-1} \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} & (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \frac{1}{z-1} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{z-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{q}_{ab} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} & \frac{z^2}{(z-1)^2} (z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \frac{z^2}{(z-1)^2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{q}_{ab} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\mathbf{q}_{ab} = \mathbf{0}$ , zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \cdot z(z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} & \frac{z}{(z-1)^2} \cdot z(z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & z \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \cdot z(z\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Stąd

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Wykorzystując uzyskany wynik, mamy:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}^i \mathbf{q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(z) &= \frac{1}{z-1} \mathbf{S}(z) \mathbf{q} = \frac{1}{z-1} z(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}^i \mathbf{q} = \\ &= \frac{z}{z-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Stąd

$$\mathbf{V}(z) = \frac{z}{z-1} (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{z}{z-1} \begin{bmatrix} (z\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} & (z\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \frac{1}{z-1} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{z-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie poszukiwana granica jest równa:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 6. Interpretacja wyników

Wektor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{q}_{tr} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

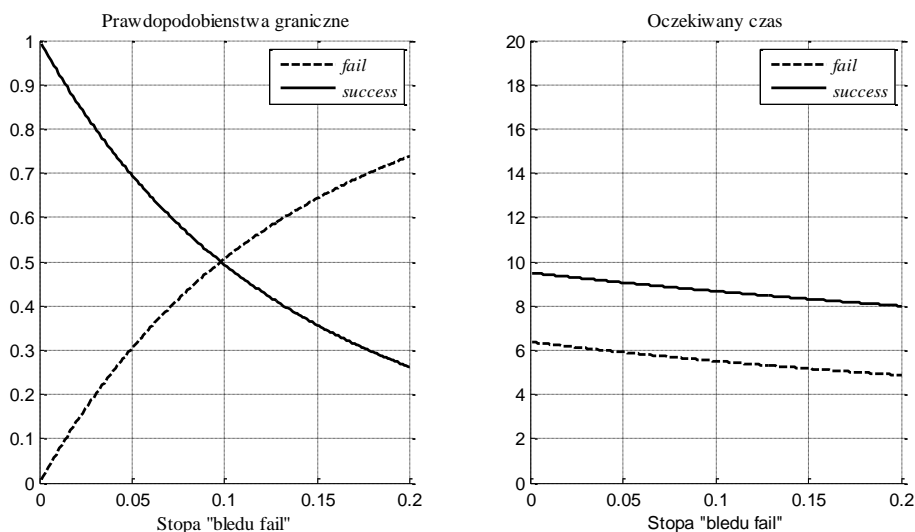
przedstawia wartość oczekiwaną wpłat dla startu łańcucha z poszczególnych stanów. Przy starcie ze stanów tranzycyjnych oczekiwana wypłata może być zapisana jako wektor:

$$\mathbf{v}_{tr}(k) = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{q}_{tr} \quad (32)$$

Trzeba zauważyć, że wektor  $\mathbf{v}_{tr}(k)$  określa oczekiwaną (średnią) sumę wpłat niezależnie od tego, czy łańcuch doszedł do badanego stanu pochłaniającego, czy nie (inaczej mówiąc, wypłaty zerowe też były uśredniane). Np. przy starcie łańcucha ze stanu pierwszego pierwszy element wektora  $\mathbf{v}_{tr}(k)$  jest równy:  $v_{tr1}(k) = czas_b \times \pi_b(\infty)$ , gdzie:  $czas_b$  – oczekiwany czas dojścia do badanego stanu pochłaniającego  $b$ ,  $\pi_b(\infty)$  – prawdopodobieństwo dojścia do stanu  $b$  (przy starcie ze stanu pierwszego – tranzycyjnego). Stąd poszukiwana wartość czasu dojścia do badanego stanu jest równa:

$$czas_b = \frac{v_{tr1}(k)}{\pi_b(\infty)} \quad (33)$$

Wyniki obliczeń numerycznych dla omawianego w pracy przykładu zostały przedstawione na rys. 3. Obliczenia zostały wykonane dla modelu rozszerzonego o diagramie jak na rys.2. We wzorach (2) i (5) do obliczeń przyjęto następujące wartości parametrów:  $f_i = f$ ,  $p_i = p$ ,  $r_i = 1 - p_i - f_i$ , gdzie:  $f$  – stopa błędu *fail*,  $p = 0,8$  – stopa przejścia (*pass*) do następnego etapu.



**Rys. 3.** Z lewej: zależności prawdopodobieństwa osiągnięcia stanu pochłaniającego *success* i stanu *fail* od stopy błędu *fail*. Z prawej: zależność oczekiwanego czasu dojścia do stanu pochłaniającego *success* i stanu *fail* od stopy błędu *fail*.

## 7. Wnioski końcowe

Modele Markowa, w tym łańcuchy Markowa z dochodami, są silnym narzędziem analizy niezawodności i osiągalności stanów systemów, w których występują łańcuchy zdarzeń. Fundamentem tego sposobu modelowania są zależności czasowe, określające momenty czasu osiągnięcia etapu przedsięwzięcia lub fazy badanego procesu. Zakres stosowania modeli Markowa cały czas wzrasta w związku z pojawianiem się coraz doskonalszych narzędzi programowych analizy, a także z coraz większymi możliwościami wykorzystywania danych statystycznych zbieranych w czasie eksploatacji urządzeń (transmisji danych, interfejsów itp.). Mimo ogromnych możliwości metod symulacyjnych poszukiwanie rozwiązań analitycznych jest nadal celowe. Uzyskiwane rozwiązania dają całościowy i elegancki ogląd problemu, mogą być także wykorzystywane do weryfikacji wyników eksperymentalnych.

## Literatura

- [1] DONIGIEWICZ A. M., *Application of Markov chains to quality evaluation of information entering by a computer system user*, Control and Cybernetics, vol.33 (2004), No. 4.

- [2] DONIGIEWICZ A. M., *Modelowanie interakcji człowiek - komputer: problemy oceny jakości i niezawodności*, Wyd. 2, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2005.
- [3] GRABSKI F., *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji*, IBS PAN, seria Badania systemowe, tom 30, Warszawa 2002.
- [4] HOWARD R. A., *Dynamic programming and Markov processes*. Cambridge, Massachusetts: The M.I.T. Press., 1960.
- [5] HOWARD R. A., *Dynamic probabilistic systems. Volume II: Semi-Markov and decision processes*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- [6] JAŻWIŃSKI J., GRABSKI F., *Niektóre problemy modelowania systemów transportowych*, Biblioteka Problemów Eksploatacji, Wydawnictwo i Zakład Poligrafii Instytutu Technologii Eksploatacji, Warszawa-Radom, 2003.
- [7] JOSIFESCU M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*. PWN, Warszawa 1988.
- [8] MAKA W., *Metody oceny jakości transmisji w systemach teleinformatycznych (rozprawa doktorska)*, Warszawa, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 1991.
- [9] WIŚNIEWSKI A., *Kojarzenie namiarów w procesie przetwarzania informacji radiolokacyjnej o obiektach zakłócających metodą identyfikacji struktury układu pomiarowego (rozprawa doktorska)*, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 1990.

### **A method to determine the average time to reach an absorbing state of a homogeneous Markov chain**

**ABSTRACT:** A homogeneous Markov chain with many absorbing states is considered. A method to obtain an average time to reach a selected absorbing state is presented. The method is based on an extension of the given Markov chain with new states. For the extended Markov chain a reward function associated with transitions is defined. A particular approach to the analytical solution of the problem is based on the dependence of rewards not only on transitions, but also on time. The task considered in this paper emerges during the design of interfaces, protocols, planning of staged transport or production projects etc.

**KEYWORDS:** Markov chain, Markov chain with rewards, phased-mission models, time-based reliability analysis, time-based availability analysis.

*Praca wpłynęła do redakcji: 15.10.2012*