MINUT 2020 (2), s. 78–83
ISSN 2719-3063

Barbara BIŁY[1]

[1]Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland

Liczby algebraiczne i przestępne

Streszczenie.
W artykule przedstawione są definicje liczby algebraicznej i przestępnej, rys historyczny ich wprowadzenia, przykłady oraz niektóre ze znanych twierdzeń dotyczących istnienia pewnych szczególnych liczb przestępnych. Zacytowano twierdzenia Liouville'a oraz twierdzenie Gelfonda-Schneidera. Osobny rozdział poświęcony jest dowodowi przestępności liczby e, który wymaga znajomości rachunku całkowego.

1. Wstęp

Wszystkie liczby rzeczywiste (a także zespolone) dzielą się na dwie klasy — liczby algebraiczne i przestępne. Liczba nazywa się algebraiczną, jeżeli jest ona pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych (można przyjąć, nie zmieniając ogólności, że współczynniki są całkowite). W przeciwnym razie liczba nazywa się przestępną. Istnienie liczb przestępnych wykazał pierwszy Liouville w 1855 r. W 1873 r. również Cantor przedstawił dowód istnienia liczb przestępnych, posługując się metodami teorii mnogości. Trudniejszym zadaniem od dowodu istnienia liczb przestępnych jest stwierdzenie, czy konkretna liczba jest przestępna lub algebraiczna. Z ciekawszych dowodów mamy dowód przestępności liczby e, podany przez Hermite'a, który będzie zaprezentowany w artykule oraz dowód przestępności liczby π, przeprowadzony przez Lindemanna. Wynik Lindemanna jest dowodem na to, że tzw. zagadnienie kwadratury koła, polegające na możliwości zbudowania za pomocą cyrkla i linijki kwadratu, którego pole równa się polu koła o promieniu $r = 1$, jest nierozwiązywalne.

2. Liczby algebraiczne

Definicja 1. *Mówimy, że wielomian ϕ jest pierwszy w danym ciele liczbowym K, jeżeli jest stopnia dodatniego i nie istnieja w tym zbiorze takie wielomiany ϕ_1 i ϕ_2 stopni dodatnich, takie że $\phi = \phi_1 \cdot \phi_2$.*

Pozostałe wielomiany stopni dodatnich nazywamy złożonymi.

Przykłady.

Autor korespondencyjny: B. Biły (Barbara.Bily@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 27.03.2020.

1. Wielomiany stopnia pierwszego są pierwsze w każdym ciele liczbowym.

2. Wielomian $\phi(x) = x^2 + 1$ jest pierwszy w zbiorze liczb rzeczywistych, ale jest złożony w ciele liczb zespolonych:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i).$$

3. Wielomian $x^2 - 2$ jest pierwszy w ciele liczb wymiernych, ale jest złożony w ciele liczb rzeczywistych:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Definicja 2. *Liczbę rzeczywistą lub zespoloną nazywamy algebraiczną, jeśli jest ona pierwiastkiem równania w postaci*

$$\phi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

gdzie współczynniki a_i sa wymierne.

Przykłady liczb algebraicznych [1]:

1. Liczba $-\dfrac{11}{17}$ jest pierwiastkiem równania $17x + 11 = 0$.
2. Liczba $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ jest pierwiastkiem równania $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3 = 0$.
3. Liczba zespolona $x = i$ jest pierwiastkiem równania $x^2 + 1 = 0$.
4. Liczba niewymierna $x = \sqrt{2}$ jest pierwiastkiem równania $x^2 - 2 = 0$.

Można pokazać że:

Twierdzenie 1. *Istnieje dokładnie jeden wielomian pierwszy w zbiorze liczb wymiernych w postaci*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

gdzie współczynniki a_i sa wymierne, którego pierwiastkiem jest dana liczba algebraiczna x_0 i który ma najwyższy współczynnik równy 1.

Uwaga 1. Liczba n nazywa się stopniem liczby algebraicznej x_0, a powyższy wielomian jej wielomianem minimalnym.

Przykłady:

1. Każda liczba algebraiczna x_0 stopnia 1 jest wymierna, bo jest pierwiastkiem równania $x - x_0 = 0$.

2. Liczba $x = \sqrt{3}$ jest liczbą algebraiczną stopnia 2, gdyż jest pierwiastkiem równania $x^2 - 3 = 0$. Wielomian $x^2 - 3$ jest jej wielomianem minimalnym.

3. Liczba $x = i$ jest liczbą algebraiczną stopnia 2, gdyż jet pierwiastkiem równania $x^2 + 1 = 0$.

4. Liczba $\sqrt[n]{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest liczbą algebraiczną stopnia n. Wielomian $x^n - p$ jest jej wielomianem minimalnym.

3. Liczby przestępne

Definicja 3. *Liczbę rzeczywistą lub zespoloną nazywamy przestępną, jeżeli nie jest liczbą algebraiczną.*

Istnienie liczb przestępnych wykazał po raz pierwszy francuski matematyk Liouville w 1855 r. W 1873 r. również Cantor przedstawił dowód istnienia liczb przestępnych, posługując się metodami teorii mnogości. W 1872 r. Charles Hermite wykazał przestępność liczby e, a w 1882 Ferdinand Lindermann udowodnił, że liczba π jest przestępna.

Ciekawą liczbą przestępną jest liczba, której kolejne cyfry dziesiętne tworzą kolejne liczby naturalne:

$$0.12345678910111213141516\ldots \quad .$$

Jej odkrywcą był angielski matematyk i ekonomista David Champernowne, a jej przestępność wykazał Kurt Mahler.

Zagadnienie zbadania przestępności liczb postaci a^b, gdzie $(a \neq 0 \wedge a \neq 1)$, a i b są algebraiczne, i b jest liczbą niewymierną, postawił Hilbert w 1900 r. Ten trudny problem rozwiązali niezależnie od siebie w 1934 r. Aleksander Gelfond i w 1935 r. Theodor Schneider.

Twierdzenie 2. *Twierdzenie Gelfonda-Schneidera [4].*

Jeżeli a i b $(a \neq 0 \wedge a \neq 1)$ są algebraiczne oraz b nie jest liczbą wymierną, to każda wartość a^b jest liczbą przestępną.

Zatem liczbami przestępnymi są np. $2^{\sqrt{2}}$ i $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

3.1. Liczby przestępne Liouville'a

Konstrukcja liczb przestępnych Liouville'a opiera się na następującym twierdzeniu o liczbach algebraicznych:

Twierdzenie 3. *Twierdzenie 1 Liouville'a [3].*

Niech x_0 będzie liczbą algebraiczną rzeczywistą stopnia $n > 1$. Wówczas istnieje taka stała c, że dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$ zachodzi nierówność:

$$|x_0 - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}.$$

Korzystając z powyższego twierdzenia Liouville pokazał, że pewne liczby przedstawione w postaci sumy odpowiedniego szeregu sa przestępne.

Twierdzenie 4. *Twierdzenie 2 Liouville'a [3].*

Liczby, wyrażone jako suma szeregu:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}}, \qquad \text{gdzie} \quad c_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

są przestępne.

Liczby te nazywane są liczbami przestępnymi Liouville'a.

4. Przestępność liczby e

Hermite udowodnił, że liczba e jest przestępna. Poniższy dowód prezentowany jest w [2].

Dowód.

Przypuśćmy, że e jest pierwiastkiem równania:

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_m e^m = 0, \tag{1}$$

którego współczynniki są liczbami całkowitymi.

Stosujemy uogólniony wzór na całkowanie przez części.

$$\int_a^b u \cdot v^{(n+1)} dx = \left[u \cdot v^{(n)} - u' \cdot v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n \cdot u^{(n)} \cdot v\right]\Big|_a^b + (-1)^{n+1} \cdot \int_a^b u^{(n+1)} v \cdot dx,$$

gdzie $u = f(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia n, a $v = (-1)^{n+1} \cdot e^{-x}$.

Wtedy dla $a = 0$ wzór ten przyjmie postać:

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x) \cdot e^{-x} dx = \Big[f(x) \cdot (-1)^{2n+1} \cdot e^{-x} - f'(x) \cdot (-1)^{2n} \cdot e^{-x} + \\ + \ldots + (-1)^n \cdot f^{(n)}(x) \cdot (-1)^{n+1} \cdot e^{-x}\Big]\Big|_0^b + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^b 0 \cdot v dx \\ = -e^{-x} \cdot \Big[f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n)}(x)\Big]\Big|_0^b \quad ,\end{aligned}$$

gdyż $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Oznaczając krótko: $f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = F(x)$ mamy:

$$\int_0^b f(x) e^{-x} dx = -e^{-b} \cdot F(b) + F(0) \qquad \Big/ \cdot e^b$$

$$e^b \cdot \int_0^b f(x) e^{-x} dx + F(b) = e^b \cdot F(0) \quad .$$

Podstawiając w tym wzorze kolejno $b = 0, 1, 2, \ldots, m$, mamy

dla $b = 0$: $F(0) = F(0)$,

dla $b = 1$: $e^1 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot e^{-x} dx + F(1) = e \cdot F(0)$,

dla $b = 2$: $e^2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot e^{-x} dx + F(2) = e^2 \cdot F(0)$,

$\vdots$

dla $\quad b = m \quad : \quad e^m \cdot \int\limits_0^m f(x) \cdot e^{-x} dx + F(m) = e^m \cdot F(0).$

Mnożymy otrzymane równości odpowiednio przez $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_m$ i dodajemy stronami:

$$\begin{aligned} & c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_mF(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot e^i \cdot \int\limits_0^i f(x) \cdot e^{-x} dx \\ =& c_0F(0) + c_1eF(0) + c_2e^2F(0) + \ldots + c_me^mF(0) = \qquad (2) \\ =& F(0)(c_0 + c_1e + c_2e^2 + \ldots + c_me^m) = 0 \qquad / \text{ z założenia (1) } /. \end{aligned}$$

Równość ta powinna być spełniona dla dowolnego wielomianu $f(x)$.
Pokażemy, że można tak dobrać wielomian $f(x)$, dla którego równość (2) jest niemożliwa, tym samym twierdzenie będzie udowodnione.

Rozpatrzmy w tym celu wielomian:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \cdot (x-1)^p \cdot \ldots \cdot (x-m)^p,$$

gdzie p jest liczbą większą zarówno od m, jak i od $|c_0|$. (Jest to wielomian stopnia $p-1+pm = p(m+1)-1$.) Pochodne tego wielomianu rzędu wyższego od $(p-1)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych, podzielnych przez p. Wynika to bezpośrednio z tego, że iloczyn p kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $p!$. Dlatego dla dowolnej całkowitej wartości x wszystkie te pochodne przyjmą wartości całkowite będące wielokrotnościami p. Ponieważ dla $x = 1, 2, \ldots m$ wielomian $f(x)$ i jego pierwszych (p-1) pochodnych przyjmują wartość 0, więc liczby $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ są całkowite i podzielne przez p. Inaczej jest z $F(0)$. W punkcie $x = 0$ sa równe zeru tylko wielomian $f(x)$ i $(p-2)$ kolejnych jego pochodnych, a więc:

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots \quad .$$

Wiadomo, że wszystkie składniki tej sumy poczynając od drugiego są całkowitymi wielokrotnościami liczby p. Jednakże

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \cdot m! \quad ,$$

a zatem $F(0)$ nie jest podzielne przez p.
Ponieważ przy przyjętych założeniach o liczbie p również c_0 nie jest podzielne przez p, zatem pierwsza suma w równości (2), czyli $c_0 \cdot F(0)$ jest liczbą niepodzielną przez p, a więc na pewno różną od zera.
Druga suma w równości (2), czyli $c_1 \cdot F(1)$. W przedziale $\langle 0, m \rangle$ mamy:

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} \cdot m^{p-1} \cdot \underbrace{m^p \cdot m^p \cdot \ldots \cdot m^p}_{m \text{ razy}} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \quad ,$$

a stąd:

$$\Big| \int\limits_0^i f(x) \cdot e^{-x} dx \Big| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \cdot \int\limits_0^i e^{-x} dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \quad ,$$

gdyż

$$\int\limits_0^i e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^i = -\frac{1}{e^i} + 1 < 1.$$

Jeżeli sumę $|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_m|$ oznaczymy przez C, to

$$\left| \sum_{i=0}^{m} \left(c_i \cdot e^i \cdot \int\limits_0^i f(x) \cdot e^{-x} dx \right) \right| \quad < \quad C \cdot e^m \cdot \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \quad = \quad C \cdot e^m \cdot m^m \cdot \frac{\left(m^{m+1}\right)^{p-1}}{(p-1)!} \quad .$$

Ostatni czynnik dąży do 0, gdy $p \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad\qquad \text{gdzie } c > 0 \quad ,$$

a więc wartość bezwzględna drugiej sumy w (2) jest przy dostatecznie dużym p mniejsza od pierwszej sumy. Zatem ich suma nie może być równa zeru i w ten sposób mamy sprzeczność. □

Literatura

1. A.Białynicki-Birula, *Zarys algebry.* Warszawa, PWN, 1987
2. G.M.Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, T.2.* Warszawa, PWN, 1978
3. A.Mostowski, M.Stark, *Elementy algebry wyższej.* Warszawa, PWN, 1977
4. Twierdzenie Gelfonda-Schneidera
   https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie Gelfonda-Schneidera, dostęp 2020-III