



## Nośność dźwigara kratowego ze względu na cykliczne obciążenia impulsowe

ANETA BRZUZY

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji, Instytut Inżynierii Lądowej, 00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, aneta.brzyzy@wat.edu.pl

**Streszczenie.** W pracy rozważono problem zachowania stalowego dźwigara kratowego, wewnętrznie jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego pod wpływem skupionego obciążenia węzłowego. Obciążenie to miało charakter dynamicznego impulsu prostokątnego  $I = P \cdot \tau_0$ , powtarzającego się cyklicznie. Przyjmowano taką intensywność obciążenia, która wywoływała reakcję sprężysto-plastyczną. Przy ustalonym  $\tau_0$  poszukiwano takiej wartości  $P = P^{przyst}$ , która w kolejnych cyklach obciążania prowadziła do zaniku dyssypacji energii plastycznej. Obciążenie to było nośnością graniczną z uwagi na przystosowanie. Wyboru kratownicy do analizy dokonano poprzez odpowiednie kryterium optymalizacji w celu ukształtowania dźwigara jako plastycznie ciągliwego. Wskazano na rozszerzenie interpretacji klasycznej teorii na sytuacje obciążeń natury wyjątkowej według nieodwracalnego stanu granicznego użyteczności.

**Słowa kluczowe:** teoria przystosowania, cykliczne obciążenie, obciążenie impulsowe, dźwigar kratowy

DOI: 10.5604/12345865.1168890

### 1. Wstęp

Oddziaływanie obciążenia o charakterze cyklicznym wiąże się z naprzemiennymi procesami obciążania i odciążania materiału. Jeżeli liczba cykli jest bardzo duża, to mogą one skutkować zniszczeniem zmęczeniowym. Do analiz tego typu wymagane jest stosowanie modeli odkształceniowych materiałów, w których ogólnie są rozróżniane prawa wyężenia materiału przy obciążeniu i odciążeniu. Prawa te odzwierciedlają się jako pętle histerezy wyrażające kumulację mikrodefektów materiału [1]. W przypadku liczności znacznie mniejszej niż właściwa zagadnieniom

zmęczeniowym możliwe jest rozważenie obciążeń cyklicznych, którym towarzyszące niesprężyste efekty fizykalne mogą być opisane idealnie sprężysto-plastycznym modelem odkształceniowym. W modelu tym przyjmuje się, że moduły odkształcenia w procesach obciążania i odciążania zachowują swoje wartości. Efekty oddziaływania cyklicznego mogą być wówczas prognozowane teorią przystosowania [2, 3]. Przedmiotem analiz tej teorii jest wartość obciążenia, którą interpretujemy jako nośność graniczną na przystosowanie —  $P^{Przys}$ . Zakłada się, że obciążenie ma ustalony profil zmienności w czasie. Jego działanie w początkowych cyklach obciążania konstrukcji wywołuje reakcję w zakresie sprężysto-plastycznym, ale przyrosty odkształceń plastycznych w kolejnych cyklach obciążania zanikają. W konstrukcji powstają wewnętrzne siły rezydualne. Przy obciążeniu nieprzekraczającym nośności na przystosowanie siły te mają korzystny wpływ na kolejny proces obciążenia konstrukcji, pomimo że w konstrukcji zachowują się pewne deformacje trwałe. Powinny one podlegać ocenie w zakresie dopuszczalnych deformacji. Zwróćmy uwagę, że potrzeby takiej poprzednio nie akcentowano, z uwagi na trudności wyznaczenia końcowych efektów trwałych na skutek obciążania cyklicznego.

Jeżeli nośność graniczna na przystosowanie zostanie przekroczona, to kolejne cykle obciążenia spowodują ciągłe narastanie deformacji plastycznych i doprowadzą do stanu odzwierciedlającego zniszczenie konstrukcji.

W dotychczasowej literaturze znajdujemy przykłady wyznaczenia nośności na przystosowanie, które obejmowały belki ciągłe, ramy, kratownice pod działaniem obciążeń cyklicznych o charakterze statycznym. U podstaw metody plastycznego wyrównania momentów powszechnie stosowanej do obliczeń statycznych belek ciągłych również odnajdujemy koncepcję związaną z teorią przystosowania.

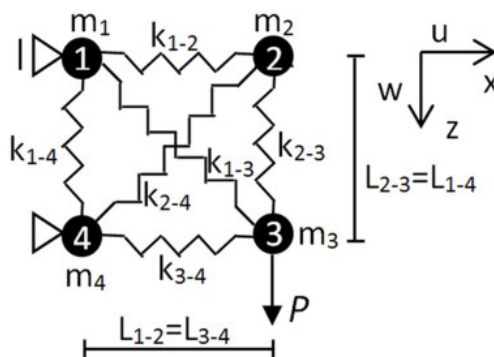
W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie zagadnienia z uwagi na przystosowanie pod działaniem cyklicznego obciążenia impulsowego zgodnie z klasyczną definicją teorii przystosowania. Zaprezentujemy również modyfikację klasycznej definicji przystosowania poprzez przyjęcie założenia o skończonej krotkości cykli impulsu, ale przypiszemy tej krotkości wartość dopuszczalnych deformacji trwałych określonych jako największe odkształcenia w materiale czy też niesprężyste przemieszczenia konstrukcji. Można uważać, że ta druga definicja mieści się w pojęciu nieodwracalnego stanu granicznego użyteczności według PN-EN 1990 [4]. Taka nośność na przystosowanie uzależniona od krotkości obciążenia z ograniczeniem efektów trwałych może być interpretowana, jako odnosząca się do sytuacji występowania obciążeń wyjątkowych. Przy tego typu sytuacjach obciążeniowych może zachodzić potrzeba rozstrzygnięcia dopuszczalności skończonej krotkości oddziaływania ponadnormatywnego, przy założeniu, że każdy cykl obciążenia narusza warunek nośności długotrwałej i obniża stopień bezpiecznego dalszego użytkowania konstrukcji.

Z racjonalnym rozwiązaniem takiego zagadnienia wiąże się więc potrzeba ukształtowania konstrukcji w sposób gwarantujący jej zdolność do przeniesienia

relatywnie znacznych odkształceń plastycznych. Określimy więc taką konstrukcję jako ciągliwą plastycznie.

## 2. Przedmiot analizy

Poszukujemy dynamicznego obciążenia granicznego na przystosowanie przesytywnionego, stalowego dźwigara kratowego poddanego działaniu impulsowego obciążenia skupionego  $P$  działającego w jednym z jego węzłów. O dźwigarze zakładamy, że jest jednokrotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalny. Dyskretny model dynamiczny dźwigara jest przedstawiony na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Model dynamiczny

Poszukiwanie rozwiązania dynamicznego zagadnienia przystosowania dźwigara poprzedzimy odpowiednim ukształtowaniem kratownicy z uwagi na obciążenie statyczne.

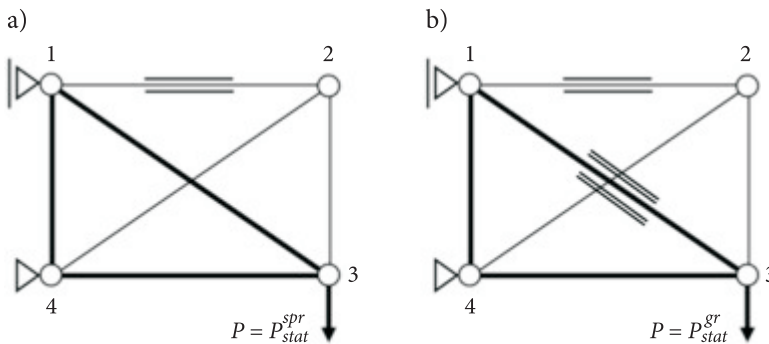
Zakładamy, że pręty dźwigara są wykonane ze stali o modelu odkształceniowym idealnie sprężysto-plastycznym. Nie analizujemy niesprężystego zachowania węzłów. Dźwigarowi przypisujemy statyczną nośność sprężystą  $P_{stat}^{spr}$  oraz statyczną nośność graniczną  $P_{stat}^{gr}$ . Przy wzroście statycznego obciążenia  $P$  ponad nośność sprężystą  $P_{stat}^{spr}$  część energii nadwyżki obciążenia zewnętrznego ponad tę nośność:  $\Delta P = P - P_{stat}^{spr}$  jest dyssypowana na odkształceniach plastycznych. Skoncentrujemy się na takim ukształtowaniu dźwigara, by mógł być on określony jako ciągliwy plastycznie. Poszukiwania takiego dźwigara przeprowadzimy według niżej przedstawionej procedury optymalizacyjnej.

Tworzymy zbiór sześcioprętowych  $\{n = 6\}$  kratownic  $\{K_R\}$ . Pręty wybieramy losowo spośród przyjętego zbioru  $KK = 91$  profili — rur okrągłych. Profile charakteryzują się przekrojami  $A_K$  i promieniami bezwładności  $I$  i  $K$ .

$$\{K_R\} = \{A_K |_{K=1, \dots, n}\} \Big|_{R=\binom{KK+n-1}{KK}}. \quad (2.1)$$

W pracy [5] dokonano analizy możliwych ścieżek wyczerpania rozważanego dźwigu do stanu wyczerpania nośności granicznej. Stwierdzono, że wszystkie ścieżki wyczerpania nośności kończące się utworzeniem mechanizmu zniszczenia mogą być ujęte w czterech grupach. O naturze tych ścieżek decydują sposoby osiągnięcia stanów nośności sprężystej i granicznej. Za wystąpienie obydwu stanów mogą odpowiadać uplastyczniające się pręty rozciągane lub doznające wybočenja pręty ściskane. Nośność tych drugich wyznaczano według normy [6].

Stwierdzono, że tylko jedna grupa spełnia warunek zupełnej ciągłości plastycznej, tzn. że o nośności sprężystej i granicznej decydują tylko pręty rozciągane. W grupie tej można wyróżnić pewną podgrupę — takie dźwigary kratowe, w których nośność sprężysta  $P_{stat}^{spr}$  jest osiągnięta z uplastycznieniem pręta rozciąganego 1-2, a mechanizm wyczerpania nośności przy  $P = P_{stat}^{gr}$  tworzy się z osiągnięciem siły uplastyczniającej w pręcie rozciągającym 1-3 (rys. 2.2). Pozostałe pręty dźwigu nie biorą aktywnego udziału w dyssypacji energii narastającego obciążenia zewnętrznego. Siły w prętach 1-2, 2-3 i 2-4 nie reagują na nadwyżkę obciążenia  $\Delta P = P - P_{stat}^{spr}$ , zachowują swoje wyężenie właściwe obciążeniu  $P = P_{stat}^{spr}$ . Siły we wszystkich prętach ściskanych 2-4 oraz w prętach 1-4 i 3-4 nie naruszają warunku nośności z uwzględnieniem wybočenja, co jest konsekwencją odpowiedniego doboru przekrojów tych prętów.



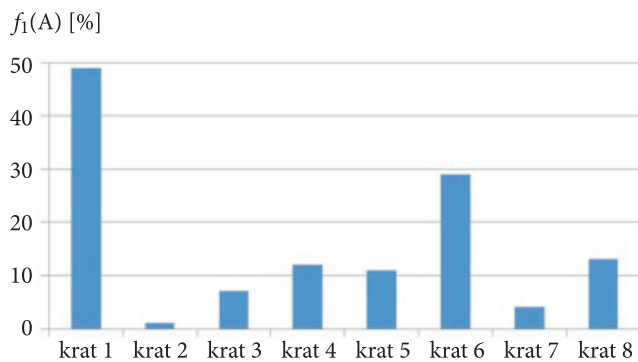
Rys. 2.2. Schemat dźwigu o charakterystyce zupełnej ciągłości plastycznej: a) osiągnięcie nośności sprężystej przez uplastycznienie pręta 1-2; b) wyczerpanie nośności dźwigu przez uplastycznienie pręta 1-3

Stosując losowy sposób konstruowania dźwigarów, poddano procedurom klasyfikowania ścieżek wyężenia zbiór  $5E+05$  różnie ukształtowanych dźwigarów. Liczba ta nie wyczerpuje wszystkich możliwych przypadków. Stwierdzono, że liczność podgrupy dźwigarów  $\{K_r\}$  spełniających warunek zupełnej ciągłości według przyjętej kolejności uplastycznienia prętów rozciąganych wynosiła 47. Pośród tej

podgrupy dźwigarów dokonano selekcji dźwigara optymalnego według następującego kryterium:

$$f_1(K_r) = \sup \left( \frac{E^{dys}}{W_p} \right) \cdot 100 \quad [\%]. \quad (2.2)$$

W kryterium (2.2)  $E^{dys}$  jest energią rozproszoną na odkształceniach plastycznych do osiągnięcia stanu granicznego nośności, a więc przy wzroście obciążenia  $P$  od wartości nośności sprężystej  $P_{stat}^{spr}$  do statycznej nośności granicznej  $P_{stat}^{gr}$ . Wielkość  $W_p$  jest całkowitą pracą wykonaną przez obciążenie zewnętrzne  $P$  do osiągnięcia stanu wyczerpania nośności granicznej. Takie kryterium może być nazwane „dobrocią dyssypatywną” kratownicy, a wartość kryterialna według (2.2) może być traktowana jako stopień sygnalizacji zniszczenia ustroju, co jest ważnym wskaźnikiem bezpiecznego użytkowania konstrukcji. Wybrane wyniki uzyskane przy poszukiwaniu dźwigara optymalnego przedstawiono na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Kratownice ciągliwe plastycznie według kryterium (2.2)

Największa wartość ilorazu  $\frac{E^{dys}}{W_p}$  wskazuje na dźwigar kratowy nr 1, który uznajemy za optymalny. Został on ukształtowany z profili zamieszczonych w tabeli 1.

Przykładem kratownicy, która charakteryzuje się bardzo małymi zdolnościami dyssypatywnymi i bardzo niskim stopniem sygnalizacji osiągnięcia stanu granicznego nośności, jest dźwigar nr 2 (tab. 2.2). Należy ocenić ją jako nieodpowiednią z uwagi na przystosowanie w sensie definicji klasycznej.

TABELA 2.1

Charakterystyka kratownicy optymalnej

	Pręty i profile	$P_{stat}^{spr}$ [kN]	$P_{stat}^{gr}$ [kN]
Kratownica 1	1-2 R101.6 / 3.2 2-3 R108 / 6.3 3-4 R168.3 / 6.3 1-4 R139.7 / 4 1-3 2R101.6 / 3.6 2-4 R133 / 6.3	416,0	487,0
Wymiary	$L_{1-2} = L_{3-4} = 4 \text{ m}, L_{1-4} = L_{2-3} = 3 \text{ m}$		
Materiał	stal St4S		

TABELA 2.2

Charakterystyka kratownicy nr 2

	Pręty i profile	$P_{stat}^{spr}$ [kN]	$P_{stat}^{gr}$ [kN]
Kratownica 2	1-2 R88.9 / 8.8; 2-3 R101.6 / 4.0 3-4 R82.5/ 6.3 1-4 R88.9 / 10 1-3 2R88.9 / 4.0 2-4 R88.9 / 10	566,0	567,0
Wymiary	$L_{1-2} = L_{3-4} = 4 \text{ m}, L_{1-4} = L_{2-3} = 3 \text{ m}$		
Materiał	stal St4S		

### 3. Algorytm poszukiwania nośności granicznej na przystosowanie

Rozważamy sytuację obciążeniową, w której prostokątny impuls obciążenia  $I = P_{dyn} \tau_0$  stanowi obciążenie cykliczne występujące z okresem powtarzalności co  $\tau_f$ . Czas trwania obciążenia  $\tau_0$  jest zadany. Intensywność obciążenia zewnętrznego  $P_{dyn}$  ustalono tak, aby jego pierwszemu cyklowi działania towarzyszyły drgania w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych.

Stwierdzono analizami numerycznymi, że należy rozważać wartości  $P_{dyn}$  z zakresu

$$\frac{P_{stat}^{spr}}{k_d^{spr}} < P_{dyn} < \frac{P_{stat}^{gr}}{k_d^{gr}}, \quad (3.1)$$

gdzie współczynniki dynamiczności dla jednokrotnego impulsu obciążenia są równe  $k_d^{spr} = 2,49$  oraz  $k_d^{gr} = 1,87$ .

Wartości  $P_{dyn}^{przyszt}$  należy poszukiwać w przedziale określonym nierównościami (3.1).

Poszukujemy nośności dźwigara z uwagi na przystosowanie, wartości  $P_{dyn}^{przyszt}$ , rozwiązując numerycznie przemieszczeniowe równania dynamicznej równowagi węzłów układu dyskretnego podanego na rysunku 2.1. W stadium reakcji pod obciążeniem impulsowym,  $(0 \leq \tau \leq \tau_0)$ , równania te są następujące:

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{w}_1 + S_{1-4} + S_{1-3} \sin \alpha = 0 \\ -m_2 \ddot{w}_2 + S_{2-3} + S_{2-4} \sin \alpha = 0 \\ -m_2 \ddot{u}_2 + S_{1-2} - S_{2-4} \cos \alpha = 0 \\ -m_3 \ddot{w}_3 - S_{2-3} - S_{1-3} \sin \alpha = -P_{dyn} \\ -m_3 \ddot{u}_3 - S_{3-4} - S_{1-3} \cos \alpha = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

gdzie:  $m_i$  — masa skupiona w węźle  $i$ ;

$$\sin \alpha = \frac{L_{2-3}}{L_{2-4}} = \frac{L_{1-4}}{L_{1-3}}.$$

W równaniach (3.2) przemieszczenia „ $i$ -tego” węzła oznaczono  $(u_i, w_i)$ . Przemieszczenia węzłów pręta  $i-k$  decydują o sile  $S_{i-k}$ , której wartość jest zależna od rodzaju reakcji pręta, zgodnie z idealnym modelem odkształcenia sprężysto-plastycznego. W prętach rozciąganych reakcja ta może być czysto sprężysta, charakteryzować się idealnym płynięciem plastycznym, albo być wtórnie sprężysta według liniowego prawa odciążenia. Pręty ściskane reagują sprężysto jako pręty proste, ponieważ z założenia są tak ukształtowane, że nie podlegają wyboczeniu.

Rozwiązania układu równań (3.2) poszukujemy, stosując metodę różnicową z jawnym schematem całkowania względem czasu. Algorytm metody w przypadku równania dynamicznej równowagi węzła  $i$  można przedstawić jak niżej.

1. Znając w chwili  $t^n$  przemieszczenia węzłów  $r_i^n = (w_i^n, u_i^n)$  oraz historię ich zmian, wyznaczamy siły w prętach. W przypadku rozciągania wykorzystujemy formułę przyrostową

$$S_{i-k}^n = S_{i-k}^{n-1} + K_{i-k} \cdot (\Delta \bar{r}_k^{n-1,n} - \Delta \bar{r}_i^{n-1,n}) \leq S_{0,i-k}, \quad (3.3)_1$$

gdzie:  $K_{i-k}$  jest sztywnością pręta

$$K_{i-k} = \begin{cases} \frac{EA_{i-k}}{L_{i-k}} & \text{zakres sprężysty} \\ 0 & \text{zakres plastyczny} \end{cases} \quad (3.3)_2$$

wartości  $\Delta\bar{r}_k^{n-1,n}$ ,  $\Delta\bar{r}_i^{n-1,n}$  są rzutami przyrostów przemieszczeń węzłów  $k$  oraz  $i$  na kroku czasowym  $\Delta t = t^n - t^{n-1}$  na kierunek pręta  $i-k$ , a  $S_{0,i-k}$  jest siłą uplastyczniającą przekrój  $A_{i-k}$  pręta. Równania (3.3)<sub>1</sub> są poprawne zarówno w zakresie czysto sprężystej reakcji pręta, jak również wtórnie sprężystej. Wymagają odpowiedniej korekty w przypadkach, jeżeli uplastycznienie albo zakończenie płynięcia plastycznego następuje w chwili pośredniej pomiędzy  $t^{n-1}$  i  $t^n$ .

W przypadku ściskania stosujemy analogiczny sposób wyznaczenia wartości siły ściskającej  $S_{i-k}^n$ , uwzględniając, że jest ona kontynuacją reakcji sprężystą pręta przy wyłączeniu poniżej naprężeń krytycznych na wyboczenie. Siły w prętach ścisłanych określimy

$$S_{i-k}^n = K_{i-k} \cdot (\bar{r}_k^n - \bar{r}_i^n), \quad (3.4)$$

gdzie wartości  $\bar{r}_k^n$ ,  $\bar{r}_i^n$  są rzutami przemieszczeń węzłów  $k$  oraz  $i$  w chwili  $t^n$ .

2. Na podstawie znanych sił  $S_{i-k}^n$  z równań równowagi każdego węzła określamy wartości stosownych przyspieszeń,  $\ddot{r}_i^n$ .
3. Wykorzystując trzypunktową, paraboliczną aproksymację przemieszczeń w przód, czyli w przedziale czasu  $(t^{n-1}, t^{n+1})$ , wyznaczamy  $r_i^{n+1}$  na podstawie znanych  $r_i^{n-1}$  i  $r_i^n$  oraz wyznaczonych  $\ddot{r}_i^n$ ,

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta r_i^{n-1,n} + \ddot{r}_i^n (\Delta t)^2. \quad (3.5)$$

4. Wyznaczone przemieszczenia  $r_i^{n+1}$  umożliwiają powtórzenie procedury od punktu 1, po zamianie chwil  $t^{n+1}$  na  $t^n$ .

Stadium działania obciążenia impulsowego kończy się w chwili  $\tau_0$ . Węzły mają końcowe wartości prędkości przemieszczeń i przemieszczeń, którym towarzyszą siły w prętach kratownicy

$$(\dot{u}_i, \dot{w}_i)|_{\tau_0}, (u_i, w_i)|_{\tau_0}, S_{i-k}|_{\tau_0}. \quad (3.6)$$

Wartości te są warunkami początkowymi dla drugiego stadium reakcji kratownicy. W naturalnych sytuacjach następuje wytlumienie drgań, co jest powodowane właściwościami materiału oraz oporami środowiska zewnętrznego.

#### 4. Stadium tłumienia drgań

W celu osiągnięcia stanu wytłumienia energii kinetycznej, którą dźwigar uzyskał w chwili  $\tau = \tau_0$ , wykorzystujemy tłumienie materiałowe sztucznie wprowadzone do dalszej procedury numerycznej. Zakładamy, że pręty kratownicy począwszy od chwili  $\tau = \tau_0$  reagują zgodnie z prawem fizykalnym właściwym lepkością.



Będzie to odpowiadało założonej sytuacji, że dyssypacja energii plastycznej zakończyła się podczas stadium obciążenia impulsowego. Przyjmujemy, że siły w prętach reagujących w zakresie czysto albo wtórnie sprężystym będą zmieniały się zgodnie z prawem fizykalnym Kelvina-Voigta. Zapiszemy to prawo w uogólnionej postaci przyrostowej

$$S_{i-k}^n = S_{i-k}^{n-1} + K_{i-k} \cdot (\Delta \bar{r}_k^{n-1,n} - \Delta \bar{r}_i^{n-1,n}) + \eta_{i-k} \cdot (\Delta \dot{\bar{r}}_k^{n-1,n} - \Delta \dot{\bar{r}}_i^{n-1,n}), \quad (4.1)$$

gdzie wartości  $\Delta \bar{r}_k^{n-1,n}, \Delta \bar{r}_i^{n-1,n}$  są rzutami przyrostów przemieszczeń na kierunek pręta  $i-k$ , a  $\Delta \dot{\bar{r}}_k^{n-1,n}, \Delta \dot{\bar{r}}_i^{n-1,n}$  to rzuty przyrostów prędkości przemieszczeń węzłów  $k$  oraz  $i$  zachodzących na kroku czasowym  $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ .

Zaproponujemy formułę na współczynniki tłumienia lepkiego  $\eta_{i-k}$  występujące w (3.1) w postaci

$$\eta_{i-k} = \beta \cdot K_{i-k} \cdot \Delta t. \quad (4.2)$$

Sprawdzono poprzez doświadczenia numeryczne, że satysfakcjonujące efekty tłumienia uzyskujemy przy  $\beta > 0$  (przyjęto  $\beta = 2$ ). Z (4.2) wynika, że współczynniki tłumienia lepkiego będą proporcjonalne do sztywności sprężystej poszczególnych prętów i stałe w procedurze numerycznego tłumienia drgań dźwigara.

Inną propozycją wytłumienia energii kinetycznej dźwigara mogłaby być koncepcja stosowana w [7]. Tłumienie w tej pracy wykorzystano do przekształcenia rozwiązania dynamiki w rozwiązanie statyki. Miało ono charakter nadkrytycznego tłumienia zewnętrznego, jednolitego dla całego układu drgającego.

Równania drgań tłumionych w stadium drugim w okresie  $\tau_0 < \tau \leq \tau_f$  mają postać jak równania (3.2), w których należy przyjąć  $P_{dyn} = 0$ . Rozwiązując te równania, będziemy stosowali algorytm podany w punkcie 3 przy wykorzystaniu związków fizykalnych (4.1), jednolitych dla prętów rozciąganych i ściskanych. W procedurze numerycznej stadium tłumienia sprawdzano, czy nie występowały efekty dyssypacji w prętach rozciąganych, i kontynuowano sprawdzenie wyężenia prętów ściskanych poniżej sprężystych naprężeń krytycznych. Zupełne wytłumienie procedurą numeryczną energii kinetycznej układu uzyskanej w uprzednim stadium działania obciążenia impulsowego umożliwiło wyznaczenie przemieszczeń trwałych poszczególnych węzłów oraz stanu rezydualnych sił w prętach,

$$(\dot{u}_i = 0, \dot{w}_i = 0) \Big|_{\tau_f}, (u_i^r, w_i^r) \Big|_{\tau_f}, S_{i-k} \Big|_{\tau_f}. \quad (4.3)$$

Warunki (4.3) są warunkami początkowymi do analizy zachowania dźwigara w kolejnym cyklu obciążenia impulsowego.

## 5. Wyniki bezpośredniego poszukiwania nośności na przystosowanie

W celu przeprowadzenia analizy numerycznej zbudowano własny program numeryczny, przy pomocy którego poszukiwano nośności na przystosowanie kratownicy nr 1 ukształtowanej według danych podanych w tabeli 2.1. Założono  $\tau_0 = 2,67$  s. Program składał się z dwóch głównych części. Pierwsza część programu opisywała dynamiczną reakcję sprężysto-plastyczną wywołaną działaniem obciążenia  $P_{dyn} > \frac{P_{stat}^{spr}}{k_{dyn}^{spr}}$  w czasie od  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ . Druga część obejmowała opis zupełnego tłumienia uprzednich efektów kinematycznych reakcji sprężysto-plastycznej dźwigara w okresie po usunięciu obciążenia zewnętrznego. Ten sam program umożliwił wyznaczenie rozwiązań w obydwu stadiach reakcji dźwigara podczas jednego cyklu. Obydwie części programu ujęte były w pętlę czasową. Rozwiązanie numeryczne w kolejnym cyklu uwzględniało warunki początkowe wyznaczone jako warunki końcowe cyklu poprzedniego (4.3).

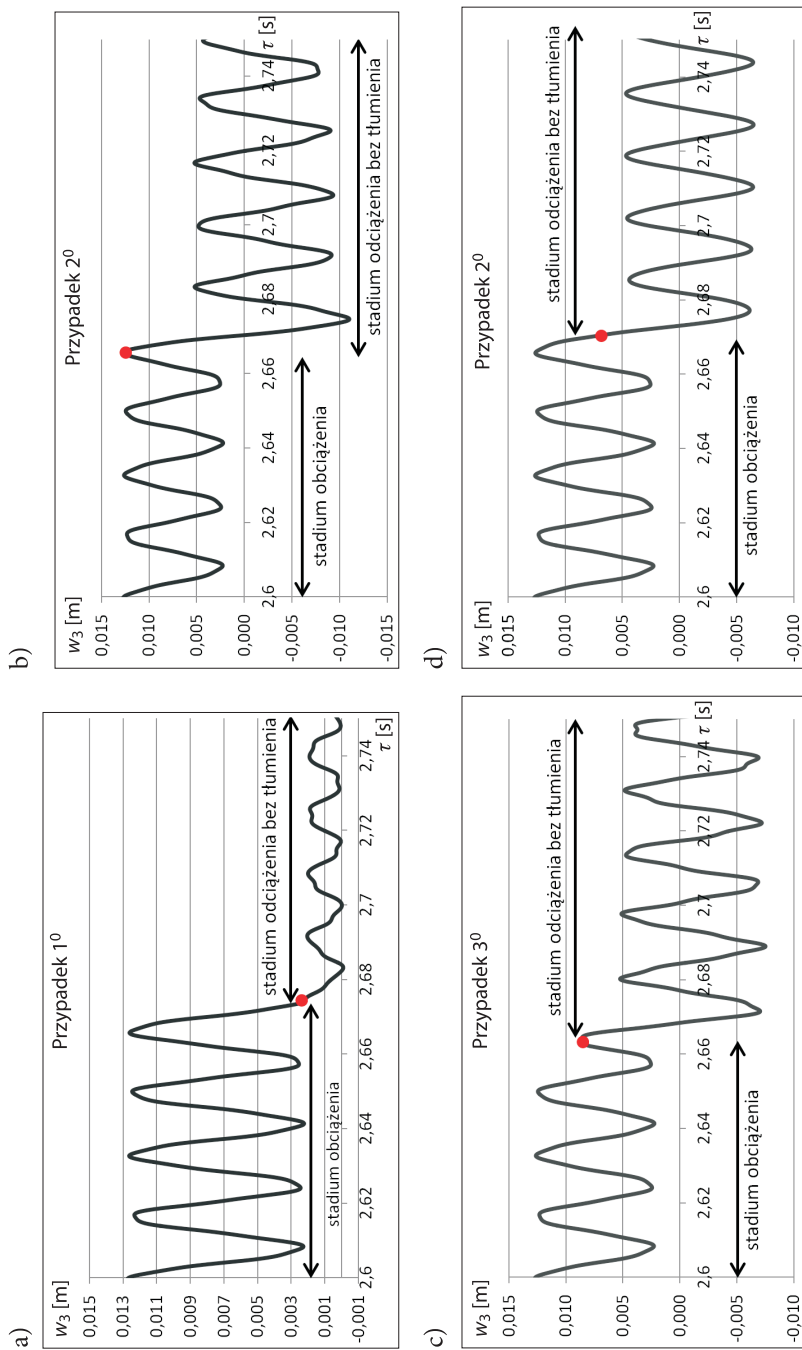
W drugiej części programu wyznaczono dynamiczne zachowanie kratownicy po usunięciu obciążenia węzłowego  $P_{dyn}$ , z jednoczesnym wprowadzeniem tłumienia drgań według równań (4.1). Charakter reakcji przemieszczeniowej dźwigara kratowego przy przejściu ze stadium pierwszego do drugiego silnie zależał od chwili zakończenia stadium pierwszego. Uzasadnieniem tego spostrzeżenia jest to, że chwila ta ma wpływ na całkowitą energię kinetyczną układu, która w stadium drugim podlega wytlumieniu. Przykłady tego wpływu na przebieg przemieszczeń w stadium tłumienia podano na rysunku 5.1.

Przedstawiono przebieg przemieszczenia węzła 3 w otoczeniu chwili  $\tau_0$ , której wartość nieznacznie zmieniano. Przyjmowano, że odpowiada ona osiągnięciu:

$$\begin{aligned} 1^0; \{ \dot{w}_3 = 0, ..\ddot{w}_3 = \max \} & \quad 2^0; \{ \dot{w}_3 = 0, ..\ddot{w}_3 = \min \} \\ 3^0; \{ \dot{w}_3 = \max, ..\ddot{w}_3 = \min \} & \quad 4^0; \{ \dot{w}_3 = \min, ..\ddot{w}_3 = \min \} \end{aligned}$$

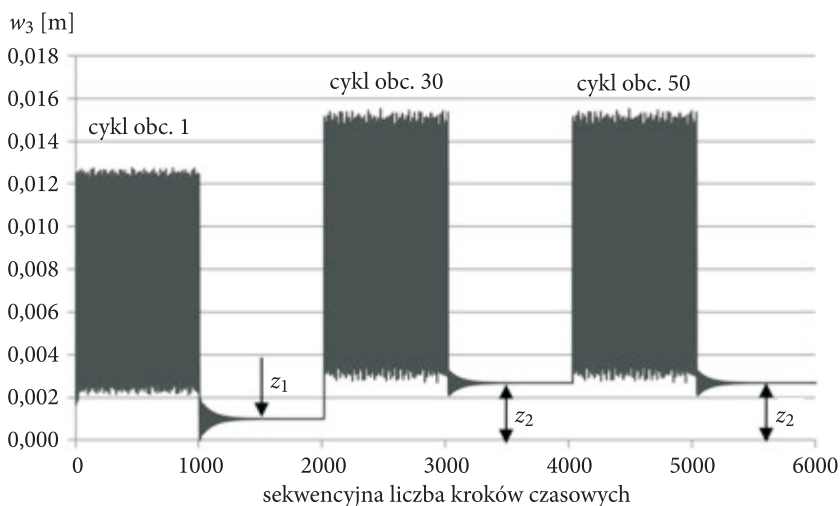
W wymienionych przypadkach charakter przebiegu nietłumionych drgań ilustrują wykresy na rysunkach 5.1a-5.1d.

Obserwowane w każdym przypadku zmniejszenie się poziomu ugięć średnich węzła 3 jest spowodowane odciążeniem dźwigara — usunięciem siły  $P_{dyn}$  w chwili oznaczonej czerwoną kropką. Tylko w przypadku 1<sup>0</sup> nastąpiło zmniejszenie energii kinetycznej. Gdyby układ był układem o jednym stopniu swobody, to wówczas  $E_{kin} = 0$  i ruch takiego prostego oscylatora zanikłby z chwilą  $\tau_0$ . W pozostałych przypadkach energia kinetyczna masy węzłowej  $m_3$  wzrosła. Powyższe wyniki analizy dynamicznej ilustrują zachowanie się dźwigara po ustaniu działania obciążenia impulsowego rozpoczynającego fazę tłumienia drgań.



Rys. 5.1. Przemieszczenie węzła 3 w otoczeniu chwili  $\tau_0$  zdjęcia obciążenia  $P_{dyn}$ : a) przypadek 1<sup>0</sup>; b) przypadek 2<sup>0</sup>; c) przypadek 3<sup>0</sup>; d) przypadek 4<sup>0</sup>

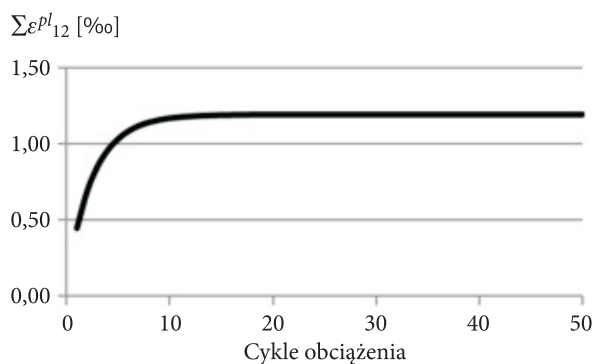
Szukając możliwości przystosowania dla kratownicy nr 1 ukształtowanej według kryterium dobroci dyssypatywnej (4.1), otrzymano wyniki zaprezentowane na rysunku 5.2. Przedstawiają one dynamiczną zmienność przemieszczenia węzła 3: nietłumioną w okresie do  $\tau \leq \tau_0$  oraz tłumioną w okresie  $\tau > \tau_0$ . Wyniki dotyczą wybranych cykli obciążania i wskazują na przystosowanie się dźwigara przy  $P_{dyn}^{przys} = 222$  kN. Przy obciążeniu tym stwierdzono stabilizację przemieszczenia węzła 3 — po 14 cyklach ustanie płynięcie plastyczne pręta 1-2. Największe ugięcie trwałe kratownicy po przystosowaniu wynosi  $w_3 = 2,7$  mm.



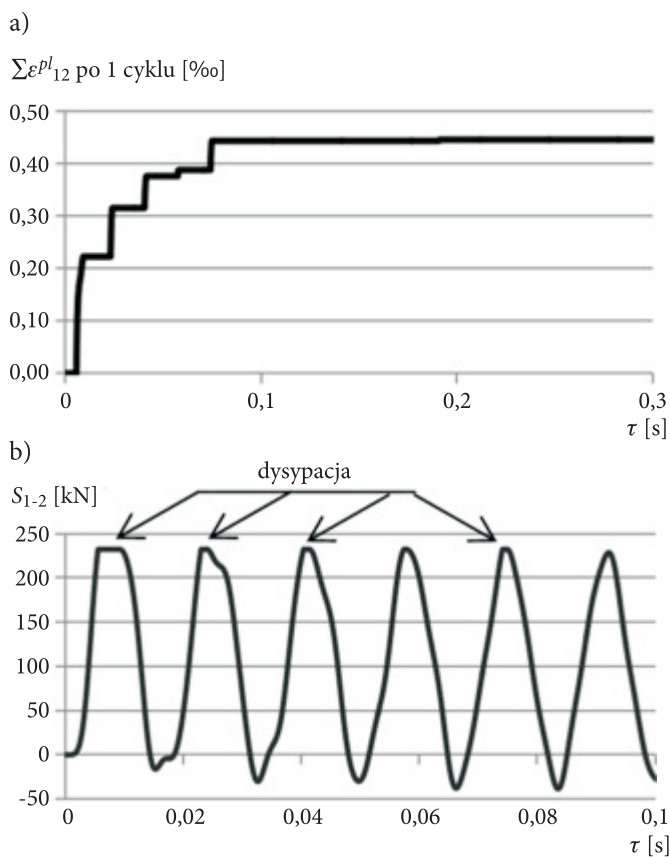
Rys. 5.2. Symptomy przystosowania się kratownicy pod obciążeniem  $P_{dyn}^{przys} = 222$  kN,  $\tau_0 = 2,67$  s;  $z$  — poziom drgań tłumionych identyfikowany z ugięciami trwałymi węzła 3,  $z \rightarrow z_2$

Ewolucję narastania odkształcenia plastycznego w tym pręcie ilustruje krzywa sumy odkształceń plastycznych  $\sum \varepsilon_{1-2}^{pl}$  podana na rysunku 5.3. Wartość ta nieznacznie przekracza największe odkształcenie sprężyste stali przyjętej do analiz w niniejszej pracy,  $\varepsilon_{max}^{spr} = 1,15$  ‰.

Istotę przystosowania dźwigara do cyklicznego obciążania impulsowego wyjaśnia zachowanie pręta 1-2 odpowiedzialnego za deformacje plastyczne przy obciążeniach do  $P_{dyn}^{przys}$  włącznie. Deformacje plastyczne generują się tylko w pręcie 1-2. Ewolucję narastania tych odkształceń przedstawiono w stadium działania obciążenia impulsowego pierwszego cyklu obciążania (rys. 5.4a). Odpowiadającą temu stadium zmienność siły  $S_{1-2}$  podano na rysunku 5.4b. Z wykresu tego wynika, że w tym początkowo rozciągającym pręcie w stadium obciążenia impulsowego ze wzrostem odkształceń plastycznych generują się siły ściskające. W kolejnych cyklach to te siły ściskające będą decydowały o zaniku dalszych przyrostów odkształceń trwałych i o przystosowaniu się dźwigara.

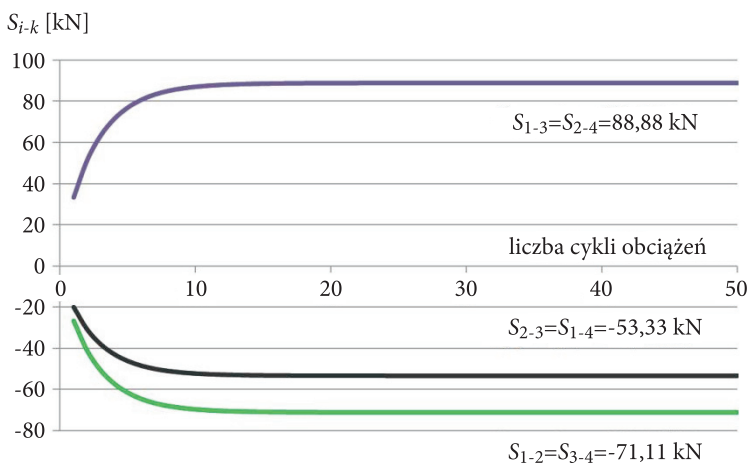


Rys. 5.3. Suma odkształceń plastycznych w kolejnych cyklach obciążeń w pręcie 1-2 przy obciążeniu  $P_{dyn}^{przys} = 222$  kN



Rys. 5.4. Ilustracje zachowania pręta 1-2 w pierwszym cyklu obciążenia  $P = P_{dyn}^{przys} = 222$  kN: a) narastanie odkształcenia plastycznego; b) zmienność siły  $S_{1-2}$

W przystosowanym dźwigarze do przenoszenia założonego obciążenia impulsowego ukształtował się stan sił rezydualnych zilustrowany na rysunku 5.5.



Rys. 5.5. Rozwój sił rezydualnych w poszczególnych prętach kratownicy

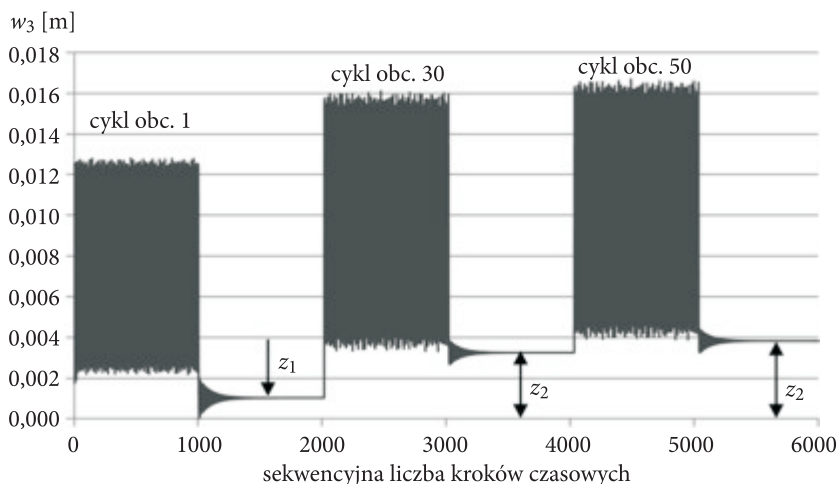
Zauważymy, że w prętach rozciąganych 1-2 i 2-3 powstały siły ściskające, które zwiększają ich nośność na rozciąganie w przypadku kolejnego cyklu obciążania. Przystosowanie też wpływa korzystnie na nośność ściskanego pręta 2-4, w którym zachowuje się siła rozciągająca. Wyteżenie typu rezydualnego jest niekorzystne w przypadku pręta 1-3. W tym pręcie rozciągającym na skutek obciążania cyklicznego tworzy się niekorzystna resztkowa siła rozciągająca. Podobnie niekorzystna sytuacja wyteżeniowa dotyczy ściskanego pręta 3-4, w którym zachowuje się resztkowa siła ściskająca.

Na rysunku 5.6 przedstawiono efekty przemieszczenia węzła 3 przy nieznacznym, o 1 kN przekroczeniu nośności  $P_{dyn}^{przys}$ . Powoduje to narastanie efektów trwałych.

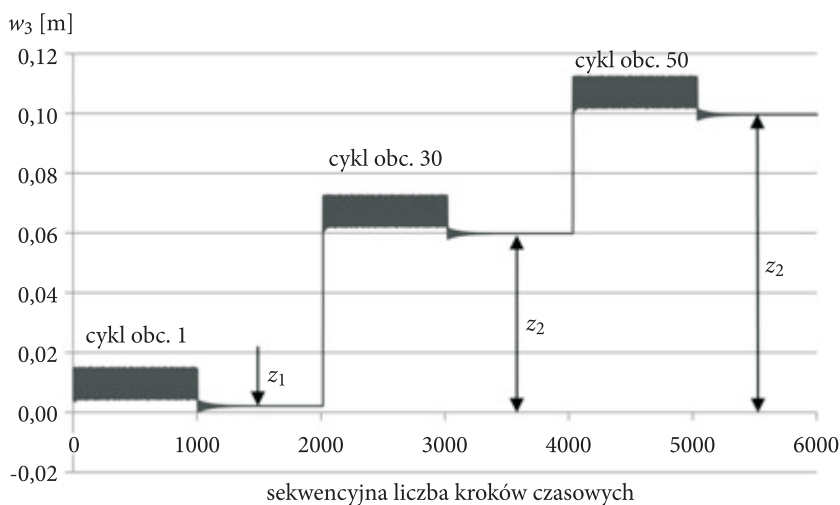
Obciążenie  $P_{dyn} = 260$  kN może być uznane za dynamiczną nośność graniczną w przypadku rozważanego obciążenia impulsowego,  $P_{dyn}^{gr}$ . Jego oddziaływanie powoduje uplastycznienie zarówno pręta 1-2, jak również pręta 1-3. Tak znaczne przekroczenie nośności na przystosowanie według definicji klasycznej tworzy warunki do rozwoju mechanizmu zniszczenia dźwigara w kolejnych cyklach obciążania. W konsekwencji istotnie narastają ugięcia trwałe węzła 3 (rys. 5.7).

Narastanie całkowitych odkształceń plastycznych w kolejnych cyklach obciążania kratownicy w prętach 1-2 oraz 1-3 przedstawiono na rysunku 5.8.

Jeżeli przyjmując sygnalizowaną na wstępie modyfikację kryterium przystosowania i poszukiwać liczby cykli, przy których wartość odkształcenia plastycznego w prętach kratownicy będzie ograniczona do założonej, to możliwe jest przyjęcie wartości obciążenia powyżej  $P_{dyn}^{przys}$ . Z wartością tą będzie stowarzyszona również

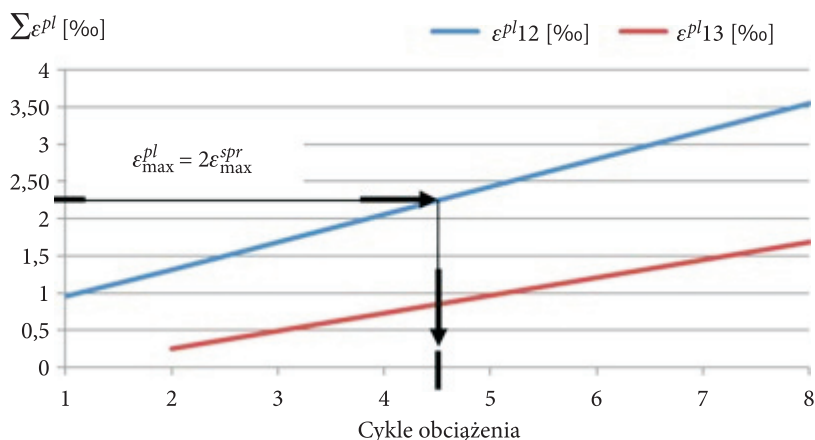


Rys. 5.6. Symptomy nieprzystosowania się kratownicy pod obciążeniem  $P = 223$  kN,  $\tau_0 = 2,67$  s;  $z$  — narastający poziom drgań tłumionych identyfikowany z ugięciami trwałymi węzła 3



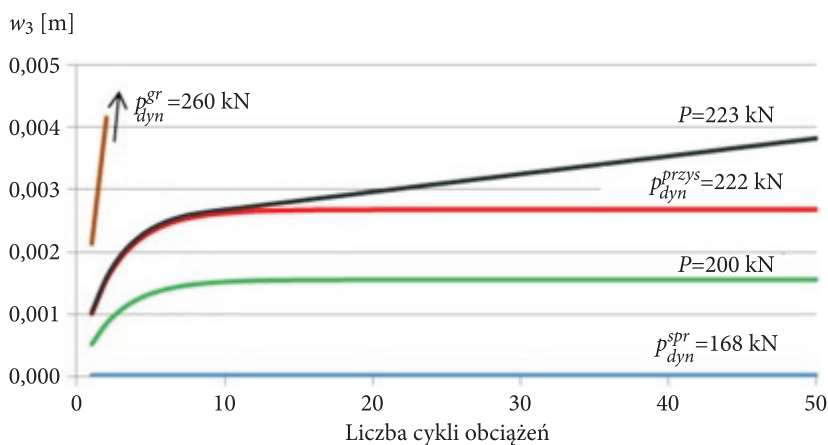
Rys. 5.7. Symptomy nieprzystosowania się kratownicy pod obciążeniem  $P_{dyn}^{gr} = 260$  kN,  $\tau_0 = 2,67$  s;  $z$  — poziom drgań tłumionych identyfikowany z ugięciami trwałymi węzła 3

prognozowana wartość nieodwracalnych ugięć trwałych. Przykładowo, zakładając wartość obciążenia  $P = P_{dyn}^{gr} = 260$  kN i wymagając  $\epsilon_{max}^{pl} \leq 2\epsilon_{max}^{spr} = 2,3\%$ , można na podstawie danych z rysunku 5.8 wnioskować o liczbie cykli  $n \approx 4$ , po których nastąpi naruszenie nośności długotrwałej. Przyjętej krotności obciążania odpowiada ugięcie trwałe równe  $w_3^{tr} \approx \frac{L}{40} = 0,1$  m. Dźwigar ten będzie zdolny do przynajmniej czterokrotnego przeciążenia ponad nośność na przystosowanie w sytuacji wyjątkowej.



Rys. 5.8. Suma odkształceń plastycznych w kolejnych cyklach obciążeń w przęcie 1-2 oraz 1-3 przy obciążeniu  $P = P_{dyn}^{gr} = 260$  kN

Zbiorcze efekty trwale cyklicznego obciążania kratownicy przy różnych wartościach siły  $P$  przedstawiono na rysunku 5.9. Przeszczenia trwale węzła 3 w kolejnych cyklach obciążania ujawniają się po przekroczeniu dynamicznej nośności sprężystej dźwigara,  $P > P_{dyn}^{spr} = 168$  kN.



Rys. 5.9. Zależność przemieszczeń trwałych węzła 3 kratownicy od liczby cykli i różnych wartości obciążenia  $P$

W przypadku obciążenia przekraczającego wartość nośności na przystosowanie może być analizowane oddziaływanie typu wyjątkowego, któremu można przypisać liczbę cykli wynikającą z kryterium największego ugięcia trwałego. Ugięcie to można traktować jako wielkość wyrażającą nieodwracalny stan użyteczności z konsekwencjami naruszenia trwałości konstrukcji.



Jak widać z przedstawionego rysunku, dla obciążeń powyżej dynamicznej nośności sprężystej  $P > P_{dyn}^{spr} = 168$  kN do  $P > P_{dyn}^{spr} = 222$  kN, w kolejnych początkowych cyklach obciążeń następowały przyrosty przemieszczeń węzła 3 będące wynikiem okresowego płynięcia plastycznego pręta 1-2. W następnych cyklach obciążania impulsowego przyrosty te zanikały — przemieszczenie węzła 3 nie ulegało zmianie, co oznacza, że w tych cyklach nie rosła energia dyssypacji. W kratownicy ukształtował się stan rezydualnych sił, które spełniały kryterium przystosowania. Począwszy od obciążenia  $P = 223$  kN następuje nieograniczony wzrost ugięcia  $w_3$  oznaczający przekroczenie nośności kratownicy na przystosowanie z powodu ciągłej kumulacji odkształceń plastycznych w kolejnych cyklach obciążeń.

## 6. Zakończenie

W pracy poszukiwano nośności granicznej stalowego dźwigara kratowego na przystosowanie pod wpływem cyklicznego obciążenia impulsowego. Stosowano bezpośrednią analizę numeryczną, wykorzystując własny program komputerowy. Założono, że efekty każdorazowego działania impulsowego podlegają wytlumieniu. Do opisu tłumienia drgań wykorzystano reologiczny model materiału lepkosprężystego według Kelvina-Voigta. Pozwoliło to na wyznaczenie wartości ugięcia trwałego i rezydualnych sił w prętach kratownicy zdeformowanej plastycznie po zaniku obciążenia.

Analizę możliwości przystosowania kratownicy poprzedzono procedurą racjonalnego ukształtowania dźwigara pod działaniem obciążenia statycznego. Zaproponowano w tym celu podejście optymalizacyjne na podstawie kryterium dobroci dyssypatywnej. W podejściu tym nie uwzględniono warunku projektowania na wymagane obciążenie obliczeniowe. Skoncentrowano się tylko na kształtowaniu dźwigara spośród założonego zbioru profili prętów według przyjętego kryterium dużych zdolności dyssypatywnych przy wykorzystaniu generatora liczb losowych.

Wskazano na możliwość rozszerzenia problematyki teorii przystosowania o zagadnienia właściwe nieodwracalnym stanom granicznym użyteczności konstrukcji w przypadkach sytuacji obciążeniowych określanych jako wyjątkowe. W zagadnieniach tych rozważamy cykliczne obciążenia zewnętrzne o intensywności większej niż nośność na przystosowanie. Poszukujemy skończonej krotności cykli, przy których nie zrealizuje się przystosowanie, ale jednocześnie nie nastąpi przekroczenie założonej wartości ugięcia trwałego, uznawanego za dopuszczalne w sensie rozważanej sytuacji wyjątkowej.

Praca powstała w ramach PBS nr 855.

Artykuł wpłynął do redakcji 6.05.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 16.06.2015 r.

## LITERATURA

- [1] KOCAŃDA S., *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa, 1978.
- [2] KÖNIG J. A., *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*, PWN, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1987.
- [3] ŻUKOWSKI S., *Ocena bezpieczeństwa płaskich konstrukcji prętowych w aspekcie teorii przystosowania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2006.
- [4] PN-EN 1990, *Podstawy projektowania konstrukcji*.
- [5] BRZUZY A., BĄK G., *Ścieżki wyłączenia stalowego dźwigara kratowego*, Biul. WAT, 2, Warszawa, 2015.
- [6] PN-EN 1993-1-1, *Projektowanie konstrukcji stalowych*, Część 1-1. *Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
- [7] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyłączenia belek żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Inżynieria i Budownictwo, 5, 2012, 267-269.

## A. BRZUZY

**Dynamic bearing capacity of a lattice girder in regard to cyclical impulse loads**

**Abstract.** This paper discusses the behavior of the statically single undetermined steel lattice girder under the pointed node load. This load action has the nature of the repeating cycles of the pulse  $I = P \cdot \tau_0$ . For the assumed time  $\tau_0$ , such a value of the load was established that the response of the lattice girder during the initial action cycle caused the plastification of the one rod. It is due to the dynamic action that the mentioned rod receives an elastic-plastic deformation. The purpose is to find such a value of the load  $P = P_p$  that would induce the vanishment of the plastic energy dissipation in the succeeding cycles. It is namely the load bearing capacity, resulting from the shakedown of the lattice girder to the assumed impulsive loading that constitutes the searched value.

**Keywords:** theory of shakedown, lattice girder, cyclical load, impulse load

**DOI:** 10.5604/12345865.1168890