MINUT 2023 (5), s. 227-236
ISSN 2719-3063

Katarzyna SAWICZ

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Rozwiązywanie układów równań za pomocą wzorów Cramera

Streszczenie. Artykuł ma na celu przedstawienie jednej z metod rozwiązywania pewnych układów równań liniowych. Jest przeznaczony głównie dla studentów pierwszego roku studiów licencjackich i inżynierskich na kierunkach technicznych. W artykule przedstawiono wzory Cramera oraz podano przykłady ilustrujące ich zastosowanie w rozwiązywaniu układów równań. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania.

Słowa kluczowe: układ równań liniowych, wzory Cramera,wyznacznik, macierz.

1. Wstęp

Z rozwiązywaniem układów równań student spotkał się już w szkole podstawowej i średniej. Wówczas te układy rozwiązywał metodą podstawiania lub metodą przeciwnych współczynników. Zazwyczaj były to układy dwóch równań z dwoma niewiadomymi, rzadziej układy trzech równań z trzema niewiadomymi. Najczęściej układy takie były potrzebne do rozwiązywania prostych zadań z treścią. Układy równań liniowych są użyteczne w modelowaniu różnych zjawisk w wielu dziedzinach. Ciekawe przykłady zastosowania układów liniowych m.in. w ekonomii, zarządzaniu, chemii, obwodach elektrycznych, demografii, gospodarce leśnej, algorytmach pozycjonowania stron w sieci można znaleźć w [1].

W artykule przedstawimy jedną z metod rozwiązywania pewnych układów równań, mianowicie za pomocą wzorów Cramera. Zakładamy, że czytelnik potrafi już liczyć wyznaczniki. Metody liczenia wyznaczników w przystępny sposób zostały podane w [8].

Na początku artykułu czytelnik znajdzie definicję układu równań Cramera oraz twierdzenie Cramera. W rozdziale trzecim podamy przykłady układów równań, które rozwiążemy za pomocą wzorów Cramera. Na końcu artykułu Czytelnik znajdzie zadania do samodzielnego rozwiązania oraz odpowiedzi do tych zadań.

Autor korespondencyjny: K. Sawicz (Katarzyna.Sawicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 08.09.2023 r.

2. Definicja układu równań Cramera i twierdzenie Cramera

W rozdziale tym przedstawimy definicję układu równań liniowych Cramera oraz twierdzenie Cramera. Podstawowe wiadomości na temat układów równań liniowych można znaleźć m.in. w [2], [3], [5].

W artykule skupimy się na układach równań w których liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, czyli do układów równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq n$ oraz $1 \leq j \leq n$, natomiast x_1,x_2,x_3,...,x_n są niewiadomymi ($n \in \mathbb{N}$).

Powyższy układ równań liniowych możemy zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, a B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych. Można rozważać także układy równań liniowych, w których macierze A, X, B są zespolone.

Układ równań liniowych postaci

$$AX = \mathbb{O},$$

gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, natomiast $\mathbb{O}$ jest macierzą zerową wymiaru $m \times 1$, nazywamy układem jednorodnym. Układ równań postaci

$$AX = B,$$

w którym B jest macierzą niezerową nazywamy układem równań niejednorodnym.

Uwaga: Jednym z rozwiązań układu jednorodnego $AX = \mathbb{O}$ jest macierz zerowa

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

wymiaru $n \times 1$, gdzie n oznacza liczbę kolumn macierzy A. Rozwiązanie to nazywamy rozwiązaniem trywialnym (nie trzeba być biegłym matematykiem, aby zauważyć, że układ ma takie rozwiązanie).

Definicja 1. *Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych*

$$AX = B,$$

w którym A jest macierzą kwadratowa nieosobliwą (tzn. $\det A \neq 0$).

Twierdzenie 1. *Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Elementy macierzy X są postaci*

$$x_k = \frac{W_k}{W} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $W = \det A$ to wyznacznik główny układu, natomiast W_k to wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez wstawienie kolumny wyrazów wolnych w miejsce k-tej kolumny.

Dowód. Założyliśmy, że $\det A \neq 0$, więc istnieje macierz A^{-1}. Mamy:

$$AX = B \quad |A^{-1}\cdot$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B.$$

Macierz odwrotną do macierzy nieosobliwej A można wyznaczyć ze wzoru $A^{-1} = \frac{1}{W}\hat{A}$, gdzie $\hat{A}$ jest transpozycją macierzy dopełnień algebraicznych. Jeśli przez A_i^j oznaczymy dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}, to

$$X = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \ldots & A_n^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} b_1A_1^1 + b_2A_2^1 + \ldots + b_nA_n^1 \\ b_1A_1^2 + b_2A_2^2 + \ldots + b_nA_n^2 \\ \vdots \\ b_1A_1^n + b_2A_2^n + \ldots + b_nA_n^n \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$x_k = \frac{1}{W}(b_1A_1^k + b_2A_2^k + \ldots + b_nA_n^k).$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze mamy rozwinięcie według k-tej kolumny pewnego wyznacznika:

$$x_k = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{W_k}{W}.$$

$\square$

Uwaga: powyższe wzory na x_k nazywamy wzorami Cramera.

Bardzo ważne

Wzory Cramera możemy stosować tylko do układów równań, w których:

1) macierz główna jest macierzą kwadratową (liczba równań jest równa liczbie niewiadomych),

2) wyznacznik macierzy głównej jest różny od zera.

3. Przykłady

W tym rozdziale podamy kilka przykładów rozwiązywania układu równań za pomocą wzorów Cramera.

Przykład 1. Rozwiążemy za pomocą wzorów Cramera następujący układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \\ 2a - b\sqrt{6} = 0. \end{cases}$$

Zapiszmy ten układ w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz główna jest macierzą kwadratową stopnia drugiego. Sprawdzimy, czy jej wyznacznik jest różny od zera:

$$W = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{6} \end{vmatrix} = -\sqrt{12} - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest różny od zera, a zatem możemy stosować wzory Cramera. Obliczymy teraz wyznaczniki W_a oraz W_b:

$$W_a = \begin{vmatrix} 2\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{vmatrix} = -12,$$

$$W_b = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{6} \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{6}.$$

Podstawiając teraz te wartości do wzorów Cramera, otrzymujemy:

$$a = \frac{W_a}{W} = \frac{-12}{-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad b = \frac{W_b}{W} = \frac{-4\sqrt{6}}{-4\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$.

Przykład 2. Rozwiążemy za pomocą wzorów Cramera następujący układ równań

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + 5y + 3z = -1 \\ -x + 3y + 4z = -5. \end{cases}$$

Możemy ten układ równań zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że nasz układ równań ma 3 równania i 3 niewiadome, więc spełnia pierwszy warunek układu Cramera. Następnie musimy sprawdzić, czy wyznacznik główny układu jest różny od zera. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz A jest stopnia trzeciego, więc jej wyznacznik możemy obliczyć np. z reguły Sarrusa:

$$W = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 12 + 3 + 10 - 9 + 8 = 44.$$
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix}$$

Ponieważ wyznacznik macierzy głównej jest różny od zera, rozważany układ równań jest układem Cramera i możemy go rozwiązać za pomocą wzorów Cramera. W naszym przypadku wzory Cramera będą miały postać:

$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}, \quad z = \frac{W_z}{W}.$$

Teraz należy obliczyć wyznaczniki W_x, W_y, W_z. Wyznaczniki te policzymy z reguły Sarrusa, analogicznie jak wyznacznik W:

$$W_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 15 - 6 + 50 + 9 - 4 = 44,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 20 - 2 + 15 + 8 = 0,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -25 - 1 - 6 - 5 + 3 - 10 = -44.$$

Podstawiając teraz te wartości do wzorów Cramera, otrzymujemy:

$$x = \frac{44}{44} = 1, \quad y = \frac{0}{44} = 0, \quad z = \frac{-44}{44} = -1.$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

Przykład 3. Rozwiążemy teraz kolejny układ równań:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4. \end{cases}$$

Zapiszmy go w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Macierz główna tego układu jest macierzą kwadratową stopnia 4. Zbadamy najpierw, czy jej wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

jest różny od zera. Wyznacznik ten jest stopnia czwartego, więc tak go przekształcimy, aby móc go rozwinąć względem jakiejś kolumny lub wiersza. Można na przykład przekształcić tak kolumnę trzecią, aby otrzymać w niej trzy zera. Wystarczy do kolumny trzeciej dodać kolumnę czwartą. Wówczas

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 2 - 1 - 1 + 4 = -3.$$

Wyznacznik główny jest różny od zera, zatem możemy zastosować wzory Cramera.

Obliczamy cztery odpowiednie wyznaczniki. Pierwszy z nich to

$$W_x = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik ten jest stopnia czwartego, więc obliczymy go korzystając z rozwinięcia Laplace'a. Zauważmy (jak w wyznaczniku W), że gdy dodamy do kolumny trzeciej kolumnę czwartą, to otrzymamy w kolumnie trzeciej trzy zera, następnie rozwiniemy go względem kolumny trzeciej i obliczymy ten wyznacznik. Mamy:

$$W_x = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 1 - 4 + 4 + 2 = -3.$$

Analogicznie liczymy wyznacznik W_y:

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=} 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 8 + 1 - 4 + 8 = -6.$$

- W kroku pierwszym do kolumny trzeciej dodajemy kolumnę czwartą (wówczas w kolumnie trzeciej mamy trzy zera).

- W kroku 2 stosujemy rozwinięcie Laplace'a według trzeciej kolumny.

Teraz policzymy wartość wyznacznika W_z:

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=}$$

$$\overset{krok\ 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \overset{krok\ 3}{=} 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 18 - 9 - 3 + 36 = -9.$$

- W kroku pierwszym od wiersza trzeciego odejmujemy wiersz czwarty.
- W kroku 2 mnożymy kolumnę trzecią przez 2 i dodajemy ją do kolumny 4 (wówczas w wierszu trzecim otrzymujemy 3 zera).
- W kroku 3 stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza.

Liczymy teraz wyznacznik W_t:

$$W_t = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{krok\ 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{krok\ 2}{=}$$

$$\overset{krok\ 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 13 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -13 & 4 \end{vmatrix} \overset{krok\ 3}{=} 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -13 \end{vmatrix} = -(13 + 8 + 2 \cdot 12 + 13 + 4 - 4 \cdot 12) = -12.$$

- W kroku pierwszym od wiersza trzeciego odejmujemy wiersz czwarty.
- W kroku 2 od kolumny trzeciej odejmujemy kolumnę czwartą przemnożoną przez 3 (wówczas w wierszu trzecim otrzymujemy 3 zera).
- W kroku 3 stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza.

Podstawiając teraz te wartości do wzorów Cramera, otrzymujemy:

$$x = \frac{-3}{-3} = 1, \quad y = \frac{-6}{-3} = 2, \quad z = \frac{-9}{-3} = 3, \quad t = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań są liczby $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$.

Przykład 4. Rozwiążemy za pomocą wzorów Cramera kolejny układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Widzimy, że jest to układ równań jednorodny. Zapiszemy go w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz główna układu jest macierzą kwadratową stopnia 5. Sprawdzimy, czy jej wyznacznik jest liczbą różną od 0. Zauważmy, że macierz główna jest macierzą trójkątną, więc najprościej możemy policzyć jej wyznacznik mnożąc wszystkie elementy na głównej przekątnej.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy głównej jest różny od zera, rozważany układ równań jest układem Cramera i możemy go rozwiązać za pomocą wzorów Cramera. Policzymy teraz wyznaczniki W_1,W_2, W_3, W_4 ,W_5. Wartości tych wyznaczników są równe zero, ponieważ w każdym z tych wyznaczników jest kolumna zerowa:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Podstawiając teraz te wartości do wzorów Cramera, otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_2 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_3 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_4 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_5 = \frac{0}{6} = 0.$$

Widzimy, że rozwiązaniem tego układu równań są same zera (istnieje tylko rozwiązanie trywialne).

W tym przykładzie macierz główna układu jest macierzą trójkątną, więc szybko policzyliśmy jej wyznacznik. Zauważmy, że gdyby macierz A nie była trójkątna, ale jej wyznacznik byłby różny od zera, to ze wzorów Cramera i tak otrzymalibyśmy same zera. Możemy więc sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Układ jednorodny $AX = \mathbb{O}$, w którym A jest macierzą* ***kwadratową nieosobliwą****, jest oznaczony i jego jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie trywialne.*

4. Podsumowanie

W przykładach przedstawionych w tym artykule układy równań miały „ładne” współczynniki. Gdyby te współczynniki były inne, to i tak rozwiązanie układu sprowadzałoby się do policzenia pewnej liczby wyznaczników (idea pozostaje ta sama). Analizując te przykłady, możemy stwierdzić, że:

- układy Cramera są łatwe do rozwiązania (wystarczy umieć liczyć wyznaczniki);
- jeżeli mamy układ n równań liniowych z n niewiadomymi, to obliczamy najpierw wyznacznik główny tego układu; jeśli ten wyznacznik jest różny od zera, to następnie obliczamy n wyznaczników stopnia n (i to może być czasochłonne, na szczęście mamy programy, które liczą wyznaczniki);
- jeśli wyznacznik główny układu jest równy zero, to nie możemy zastosować wzorów Cramera (musimy wówczas zastosować inne metody).

W artykule [9] została przedstawiona bardziej uniwersalna metoda rozwiązywania układów równań liniowych, mianowicie metoda eliminacji Gaussa.

5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Korzystając ze wzorów Cramera, rozwiąż podane układy równań:

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = -2 \\ x + y - 3z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 3z + t = 1 \\ x + y + z + 2t = 3 \\ -x - 2y + +3z + t = -2 \\ 2x + z - t = -3. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 15 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 14 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$

Odpowiedzi

a) $x = -1, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad z = -\frac{5}{3}$

b) $x = -\frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}$

c) $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0, \quad t = 1$

d) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 =, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1$

Więcej zadań można znaleźć np. w [4]– [7].

Literatura

1. K. Adrianowicz, I. Nowak, *Po co nam ta matematyka? Cz. 1, Zastosowanie algebry liniowej nie tylko dla studentów pierwszych lat studiów technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2016.
2. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej, cz. 1*, Wydawnictwo Naukowo–Techniczne, Warszawa 2002
3. A. Białynicki-Birula,*Algebra*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1971.
4. M. Biedrońska, *Zbiór zadań z odpowiedziami i rozwiązaniami*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
5. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
6. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2001.
7. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises, part 2*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020.
8. K. Sawicz, *Obliczanie wyznaczników*, MINUT 2021 (3), pp. 142–152.
9. K. Sawicz, *Rozwiązywanie ukadów równań metodą eliminacji Gaussa*, MINUT 2023 (5), s. 237–245.