



Deformacja siatki numerycznej w modelowaniu maszyn objętościowych

Józef Rak

*Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny
Katedra Termodynamiki, Teorii Maszyn i Urządzeń Ciepłych
E-mail: jozef.rak@pwr.edu.pl*

REKOMENDACJA: *dr hab. inż. Sławomir Pietrowicz, prof. PWr*

STRESZCZENIE

Stosowanie metod numerycznych do modelowania zjawisk zachodzących w maszynach objętościowych wymaga odwzorowania zasady ich działania w modelu. Zmiana objętości komory roboczej powoduje zmianę własności termodynamicznych czynnika wewnątrz. Taka modyfikacja geometrii w czasie pociąga za sobą konieczność transformacji obszaru obliczeniowego. Celem pracy było zbadanie wpływu zmiany jakości siatki numerycznej na wyniki obliczeń uwzględniających deformacje obszaru numerycznego. W tym celu wykonano model walca wypełnionego gazem oraz poddano go cyklicznej deformacji. Zaprezentowano technikę generowania siatek numerycznych, założenia modelu oraz uzyskane wyniki. Pokazano, że błędy numeryczne powstałe poprzez deformowanie geometrii nie są pomijalne, a wręcz mogą mieć znaczący wpływ na jakość wyników.

SŁOWA KLUCZOWE: *CFD, maszyny objętościowe, remesh*

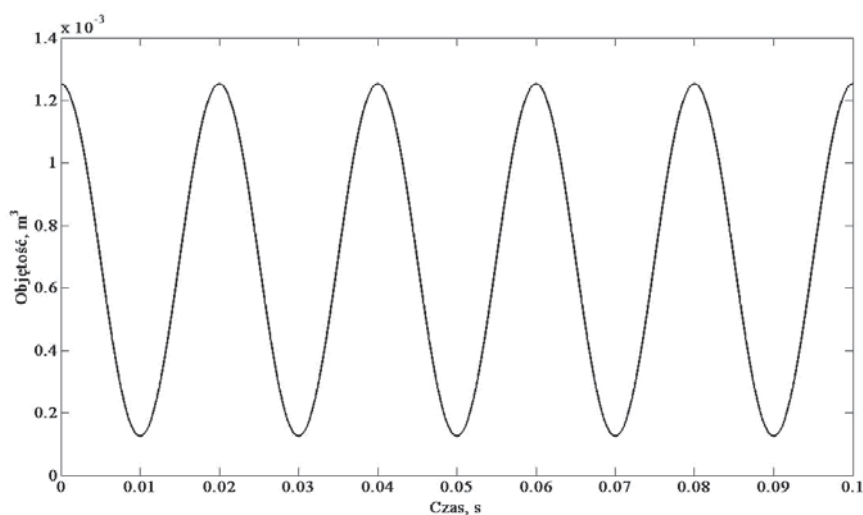
1. WPROWADZENIE

Dzięki numerycznym metodom obliczania parametrów płynu w układach o zmiennej geometrii, możliwe jest modelowanie przemian termodynamicznych w maszynach objętościowych. Do tych ostatnich zalicza się wszelkie maszyny, których zasada działania opiera się na zmianie wymiarów komory roboczej, w której znajduje się płyn. Przykładami takich konstrukcji są m.in.: sprężarki i ekspandery tłokowe, spiralne, wielołopatkowe, Wankla, itp. Innym polem zastosowań deformacji siatki jest FSI (Fluid Structure Interaction), gdzie badaniom podlegają wzajemne wpływy pomiędzy plastycznym ciałem stałym a otaczającym go czynnikiem (np. skrzydło samolotu i jego dynamiczne

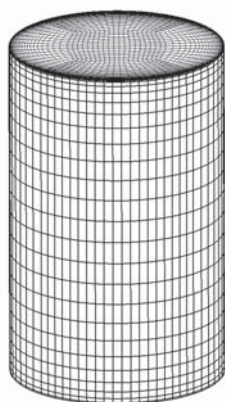
odkształcenia). Ze względu na naturę procesów obliczenia zawsze dotyczą stanów nieustalonych. Warunki brzegowe muszą uwzględniać zmianę geometrii komory, a siatka numeryczna powinna zostać odkształcona. Deformacja siatki numerycznej, oprócz zmiany położenia węzłów przypisanych do ścian ograniczających komorę, uwzględnia również przesunięcia wszystkich węzłów siatki. W przypadku bardzo dużych deformacji szybko dochodzi do sytuacji, w której jakość siatki numerycznej (związana z jej ortogonalnością) ulega obniżeniu. Powoduje to powstawanie błędów numerycznych, a w skrajnych przypadkach prowadzi do pojawiania się ujemnych wartości objętości w obszarze obliczeniowym. Jeżeli jakość siatki staje się niezadowalająca, niezbędne jest wygenerowanie nowej, a następnie interpolowanie na nią otrzymanych wcześniej wyników. Dzięki temu w następnym kroku czasowym obliczenia można kontynuować bez zakłóceń. Wadą takiego rozwiązania jest ryzyko powstawania błędów w procesie interpolacji. Położenie węzłów nowej siatki nie pokrywa się z poprzednimi, więc nawet przy zachowanej topologii siatki odwzorowanie pól parametrów jest jedynie przybliżone. W pracy wykorzystano pakiet Ansys CFX oraz moduł do tworzenia siatek numerycznych ICEM CFD [1].

2. ZAŁOŻENIA DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

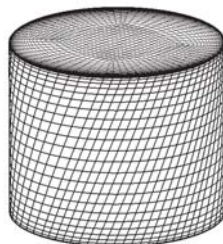
W obliczeniach zastosowano geometrię cylindra o zmiennej wysokości. Wybór uzasadniony jest tym, że konstrukcja taka posiada bardzo regularny kształt, składa się z jednej komory roboczej, a także pozwala na porównanie wniosków z pracą [4]. Dodatkową zaletą geometrii walcowej jest stosunkowa łatwość sterowania procesem deformacji siatki numerycznej. Wymiary początkowe cylindra to promień podstawy $r = 5$ mm oraz wysokość maksymalna $H_{\max} = 150$ mm. W trakcie obliczeń wysokość zmienia się sinusoidalnie od wartości maksymalnej do minimalnej $H_{\min} = 16$ mm ze stałą częstotliwością 50 Hz. W związku z tym objętość komory zmieniała się dynamicznie, co przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1: Objętość komory roboczej w czasie



Rys. 2: Skrajna górna pozycja tłoka



Rys. 3: Pośrednie położenie tłoka



Rys. 4: Skrajne dolne położenie tłoka

Do obliczeń wykorzystano blokowo-strukturalną siatkę numeryczną dopasowaną do geometrii walca. Ruchomy warunek brzegowy na ścianie tłoka zakłada zmianę jego pozycji w jednym, pionowym kierunku. Sama siatka numeryczna jest jednak dodatkowo skręcana poprzez obrót siatki ze stałą prędkością. Podstawa walca pozostaje w spoczynku, dzięki czemu obszar obliczeniowy cyklicznie przyjmuje kształt zbliżony do helisy (rys. 2–4). Dodatkowe zniekształcenie siatki nie ma wpływu na fizyczne warunki brzegowe, dlatego w idealnym przypadku, nie powinno rzutować na wynik obliczeń [3].

Wynika to z faktu, że w układach z ruchomymi warunkami brzegowymi stosuje się geometryczną zasadę zachowania (ang. *Geometric Conservation Law*) [2, 5]. W równaniu 1 zaprezentowano formę całkową tej zasady. Jej spełnienie oznacza, że w obliczeniach zapewniono, że rozwiązanie jednostajne jest zachowane po transformacji do innego obszaru obliczeniowego [6].

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \int_S W_j dn_j = 0 \quad (1)$$

gdzie: V – objętość komórki numerycznej, t – czas, W – składowa prędkości ściany komórki numerycznej w kierunku normalnym, dn – wektor normalny do ściany komórki.

W modelu rozwiązywano równania ciągłości, pędu i energii, (równ. (2)–(4)) które uzupełniono o człon związany z ruchem ścian komórek numerycznych W_j .

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_S \rho(U_j - W_j) dn_j = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho U_i dV + \int_S \rho(U_j - W_j) U_i dn_j = - \int_S P dn_j + \int_S \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) dn_j \quad (3)$$

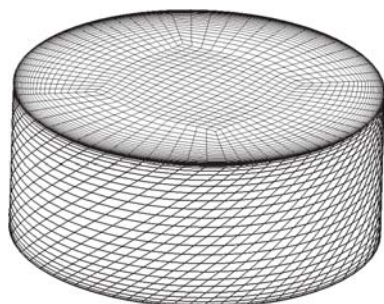
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \phi dV + \int_S \rho(U_j - W_j) \phi dn_j = \int_S \Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dn_j \quad (4)$$

Ze względu na te właściwości możliwe jest dokładne zaobserwowanie wpływu degeneracji siatki numerycznej na poprawność wyników. Im częściej wyniki obliczeń są interpolowane, tym niższy jest przewidywany spadek jakości siatki numerycznej, ponieważ nowo tworzone siatki docelowo powinny być przynajmniej tak dobre, jak początkowa. Parametrami przydatnymi do opisu siatki są skośność (ang. *orthogonality*), definiowana jako maksymalna odchyłka od kąta prostego pomiędzy krawędziami komórki numerycznej, oraz wydłużenie (ang. *aspect ratio*), które wyrażone jest stosunkiem długości najdłuższej do najkrótszej krawędzi komórki. Dla stabilności i precyzji obliczeń najlepsze są siatki złożone z komórek o równych bokach i kątach [7]. Wykonano dwie serie obliczeń (szczegółowo opisano je w tabeli 1).

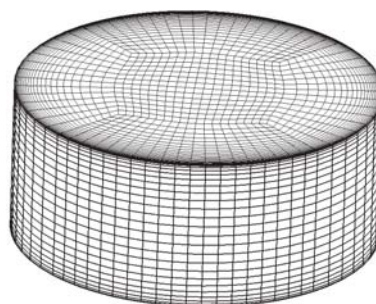
Tabela 1: Obliczone warianty symulacji cylindra

No.	RM5	RM10	RM20	S50	S200	S1000
krok czasowy $\Delta t \cdot 10^{-4}$, s	2	2	2	8	2	0.4
liczba kroków do remeshu	5	10	20	x	x	x
czynnik	powietrze, gaz doskonały					
wymiana ciepła	adiabaticzne					
prędkość tłoka	50 Hz					
model turbulencji	SST					
maks. obrót tłoka	45°					
liczba elementów siatki	104421					
ciśnienie początkowe	1 atm					

Seria RM – z zastosowaniem remeshingu – dla stałego kroku czasowego, zmieniano częstotliwość generowania nowych siatek. *Seria S* - bez remeshingu - dla różnych kroków czasowych. W serii obliczeń RM nowe siatki numeryczne są generowane automatycznie dla dowolnego aktualnego położenia tłoka. Informacja z solvera na temat aktualnej geometrii obszaru obliczeniowego wykorzystywana jest przez autorski skrypt, który modyfikuje model geometryczny, deformuje i umiejscawia bloki, by ostatecznie zwrócić nową siatkę numeryczną do solvera, gdzie następuje interpolacja wyników pośrednich i kontynuacja obliczeń. Przykład siatek numerycznych przez i po procedurze interpolacji przedstawiono na rys. 5 i 6. Dzięki automatyzacji procesu tworzenia nowych siatek, a także dzięki oparciu modelu o siatkę blokowo-strukturalną możliwa była łatwa i szybka interpolacja wyników z zachowaniem pierwotnej topologii (a także jakości) siatki.



Rys. 5: Zdeformowana siatka numeryczna

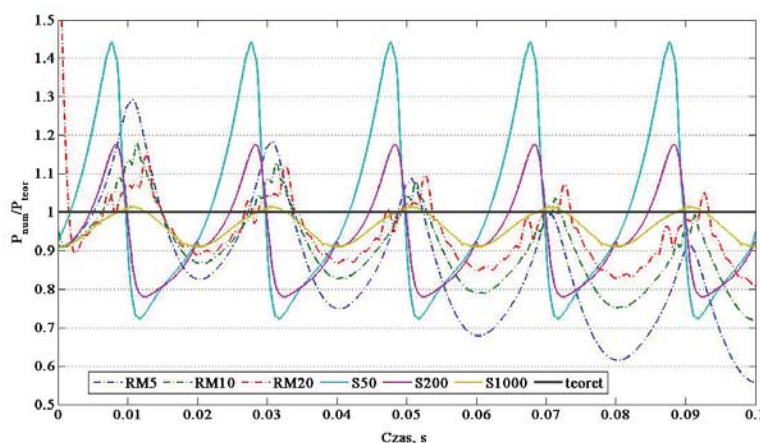


Rys. 6: Nowo wygenerowana siatka numeryczna

W każdym z przypadków wszystkie ściany są traktowane, jako adiabatyczne, pomijane są straty związane z lepkością czynnika, aby uzyskać pełną cykliczność procesu i umożliwić porównanie wyników z wielkościami teoretycznymi opartymi o równanie adiabaty $pV^\kappa = \text{idem}$.

3. WYNIKI ORAZ DYSKUSJA WYNIKÓW

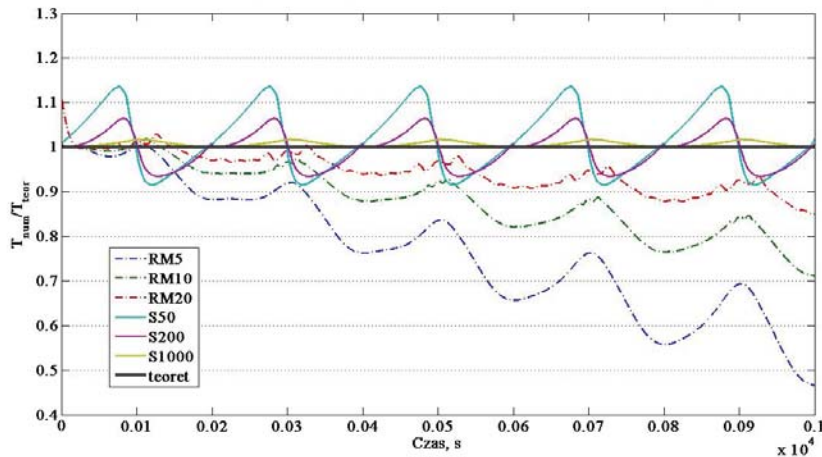
Rezultaty przedstawiono jako wartości względne wobec wielkości obliczonych teoretycznie. Na rysunku 7 pokazano różnice w obliczonych wartościach ciśnienia dla wszystkich przypadków. W wynikach serii S widoczna jest powtarzalność w kolejnych cyklach pracy tłoka. W tak zdefiniowanym problemie zmniejszenie kroku czasowego powoduje znaczące zmniejszenie błędu względnego. Maksymalny błąd względny zmienia się od ponad 40% dla przypadku S50 do poniżej 10% w wariancie S1000. Seria RM o stałym kroku czasowym wykazuje inną charakterystykę. Błąd względny również wykazuje cechy cykliczności, jednak jest on dodatkowo kumulowany w czasie. Nawarstwiająca się błędy sprawiają, że wartości obliczone w kolejnych cyklach są coraz bardziej niedoszacowane. Poziom tego zjawiska zależy od częstotliwości remeshingu. Przykłady RM10 i RM20 wykazują błąd zbliżony do wariantu S200, który ma ten sam krok czasowy.



Rys. 7: Wykres ciśnienia obliczonego numerycznie w odniesieniu do wartości teoretycznych

Rysunek 8 przedstawia analogiczne porównanie dotyczące obliczonych temperatur. Rozbieżności pomiędzy wartościami analitycznymi a numerycznymi są w tym przypadku mniejsze (zarówno dla serii S, jak i RM), niż przy obliczaniu ciśnienia. Maksymalny błąd dla serii S nie przekracza 15%, a dla przykładu S1000 jest on mniejszy niż 1%. Zachowany został jednak podobny trend, tzn. wyraźnie widoczna cykliczność charakterystyki błędów względnych. Również w przypadku temperatur zmniejszenie kroku czasowego ma pozytywny wpływ na kształtowanie się błędów oraz zaobserwować można kumulację w czasie zaniżanie wartości względem teoretycznych poprzez remeshing.

W serii RM już po dwóch cyklach ruchu tłoka zauważalne są znacznie mniejsze wartości temperatury w komorze.



Rys. 8: Wykres ciśnienia obliczonego numerycznie w odniesieniu do wartości teoretycznych

Warto zwrócić uwagę, że przebieg błędu względnego zarówno ciśnienia, jak i temperatury w obliczonych przypadkach rośnie w fazie sprężania, natomiast maleje w fazie rozprężania. Wynika to z faktu, że wymiary objętości skończonych są odpowiednio zmniejszane lub zwiększane, a więc wektory prędkości zaimplementowane w równaniach (2)–(4) są przeciwnie skierowane. Maksymalne wartości błędów zaobserwowano w skrajnym dolnym położeniu tłoka. Można to było przewidzieć, ponieważ tłok porusza się ze stałą prędkością, co sprawia, że deformacja siatki jest w tym położeniu stosunkowo największa (parametry skośności i wydłużenia znacząco odbiegają od jedności) oraz liczba Couranta osiąga największe wartości. Otrzymane rezultaty są zbliżone z analizą przeprowadzoną na podobnej geometrii przez [4], którzy również wskazywali na interpolację jako potencjalne źródło błędów w obliczeniach.

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń dotyczących cyklicznego procesu sprężania i ekspansji w adiabatycznym cylindrze o zmiennej wysokości. Otrzymane rezultaty świadczą o tym, że zarówno deformacja siatki numerycznej, jak i interpolacja wyników pośrednich na nową siatkę są źródłem błędów w wynikach. Dodatkowo pokazano, że zastosowanie remeshingu może poprawiać dokładność wyników poprzez podniesienie jakości zdeformowanej siatki numerycznej. Przygotowując model numeryczny wymagający deformacji siatki, należy dobierać krok czasowy tak, aby (w zadanej geometrii) liczba kroków czasowych pomiędzy interpolacjami była stosunkowo duża, przy czym warunek przerywania obliczeń powinien być uzależniony od jakości zdeformowanej siatki numerycznej. Należy zwrócić uwagę, że obliczanie modeli maszyn objętościowych bez dokładnych warunków początkowych wymaga prowadzenia obliczeń dla więcej niż jednego cyklu w celu uzyskanie powtarzalnych wyników.

Narastające błędy związane z remeshingiem mogą być powodem nietrafnych przewidywań co do parametrów pracy maszyny.

PODZIĘKOWANIA

Obliczenia wykonano przy użyciu zasobów udostępnionych przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe (<http://wcss.pl>), grant obliczeniowy Nr 278.

LITERATURA

- [1] ANSYS Academic Research, Release 14.5, Help System.
- [2] Cao W., Huang W., Russel D., *A Moving Mesh Method Based on the Geometric Conservation Law*, SIAM Journal of Scientific Computing, **24**(1), 118–142, 2002.
- [3] Peric M., *A Finite Volume Method for the Prediction of Three Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts*, PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 1985.
- [4] Rane S., Kovacevic S., Kethidi M., *CFD Modeling in Screw Compressors with complex multi rotor configurations*, International Compressor Engineering Conference at Purdue, **1576**, 2012.
- [5] Guillar H., Farhat C., *On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190**, 2000.
- [6] Persson P., Peraire J., Bonet J., *Discontinuous Galerkin solution of the Navier-Stokes equations on deformable domains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **198**, 2009.
- [7] Thompson J., Soni B., Weatherill N., *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1998.