

Modele matematyczne kaskady pneumatycznej oraz membranowego siłownika pneumatycznego opisane rachunkiem różniczkowym niecałkowitych rzędów

JEL: L97 DOI: 10.24136/atest.2018.444

Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W artykule przedstawiono analizę właściwości dynamicznych układów pneumatycznych takich jak: kaskadowego połączenia membranowych przetworników ciśnienia oraz membranowego siłownika pneumatycznego za pomocą równań różniczkowych całkowych rzędów oraz równań różniczkowych z pochodnymi niecałkowitych rzędów. Analizowane układy zostały opisane w ujęciu czasowym, za pomocą charakterystyki skokowej oraz w ujęciu częstotliwościowym za pomocą charakterystyk Bodego tj. logarytmicznej charakterystyki amplitudowej i fazowej. Każda charakterystyka wyznaczona została na podstawie równania różniczkowego z pochodnymi niecałkowitego rzędu. Do wyznaczenia charakterystyk niezastąpionym narzędziem programistycznym był interaktywny pakiet Simulink zbudowany na bazie programu MATLAB, który umożliwia analizę i syntezę ciągłych układów dynamicznych.

Słowa kluczowe: kaskada pneumatyczna, rachunek różniczkowy niecałkowitych rzędów, siłownik pneumatyczny.

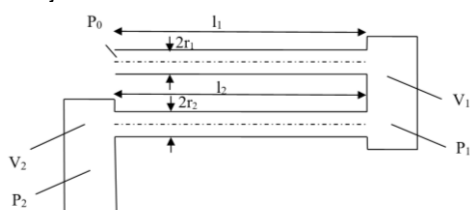
Wstęp

W artykule przedstawiono analizę matematyczną kaskady pneumatycznej oraz membranowego siłownika pneumatycznego opisane rachunkiem różniczkowym niecałkowitych rzędów (ang. *fractional calculus*) [5], [6], [7], [8], [9] oraz [10].

Wyprowadzono równania różniczkowe całkowego i niecałkowitego rzędu i na ich podstawie wyznaczono równania opisujące charakterystyki czasowe (impulsowe i skokowe) oraz częstotliwościowe (logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe) dla każdego badanego układu pneumatycznego [11]. Następnie dokonano symulacji wyprowadzonych równań wykorzystując oprogramowanie Microsoft Excel oraz MATLAB&Simulink otrzymując charakterystyki czasowe i częstotliwościowe badanych układów dla całkowych i niecałkowitych rzędów [16], [17] oraz [18].

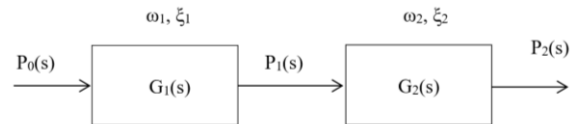
1. Model matematyczny kaskady pneumatycznej opisany rachunkiem różniczkowym niecałkowitych rzędów

Na Rys. 1. przedstawiono schemat analizowanej kaskady pneumatycznej:



Rys. 1. Schemat dwukomorowej kaskady pneumatycznej [11]

Na Rys. 2. przedstawiono schemat blokowy dwukomorowej kaskady pneumatycznej:



Rys. 2. Schemat blokowy dwukomorowej kaskady pneumatycznej [11]

Zakładając liniowość modelu równanie, opisujące dynamikę membranowego przetwornika ciśnienia, można zapisać w postaci układu równań różniczkowych:

$$\frac{d^2 p_1(t)}{dt^2} + 2\xi_1 \omega_1 \frac{dp_1(t)}{dt} + \omega_1^2 p_1(t) = \omega_1^2 p_0(t) \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 p_2(t)}{dt^2} + 2\xi_2 \omega_2 \frac{dp_2(t)}{dt} + \omega_2^2 p_2(t) = \omega_2^2 p_1(t) \quad (1b)$$

gdzie:

$\omega_{1,2} \left(\frac{\text{rad}}{s} \right)$ – pulsacja drgań własnych kolejnego elementarnego układu pneumatycznego,

$\xi_{1,2} < 1$ – stopień tłumienia kolejnego elementarnego układu pneumatycznego wchodzącego w skład kaskady pneumatycznej.

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{L_{p1,p2} C_{p1,p2}}} = \sqrt{\frac{3\pi r_{1,2}^2 c^2}{4l_{1,2} V_{1,2}}} \quad (2a)$$

$$\xi_{1,2} = \frac{R_{p1,p2} C_{p1,p2} \omega_{1,2}}{2} = 2 \frac{\eta \sqrt{\frac{3l_{1,2} V_{1,2}}{\pi}}}{r_{1,2} \rho c} = 2 \sqrt{\frac{3\eta^2 l_{1,2} V_{1,2}}{\pi r_{1,2}^2 \rho^2 c^2}} \quad (2b)$$

przy czym:

- $C_p [Ns^2 m^{-5}]$ – pojemność pneumatyczna w kolejnym elemencie układu pneumatycznego;
- $L_p [m^3 N^{-1}]$ – indukcyjność pneumatyczna w kolejnym elemencie układu pneumatycznego;
- $R_p [Nsm^{-5}]$ – opór przepływu w kolejnym elemencie układu pneumatycznego;
- $V [m^3]$ – objętość kolejnej komory przetwornika,
- $c \left[\frac{m}{s} \right]$ – prędkość dźwięku w gazie wypełniającym układ;
- $l [m]$ – długość kolejnej rurki dolotowej;
- $r [m]$ – promień kolejnej rurki dolotowej;

- $\rho [kgm^{-3}]$ – gęstość gazu;
- $\eta [kgm^{-1}s^{-1}]$ – lepkość dynamiczna.

Równania (1) zapisane za pomocą równań różniczkowych z pochodnymi niecałkowitych rzędów przyjmują postać:

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}D_t^{2\nu} p_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 {}_0^{RL}D_t^\nu p_1(t) + \omega_1^2 p_1(t) &= \omega_1^2 p_0(t) \\ {}_0^{RL}D_t^{2\nu} p_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 {}_0^{RL}D_t^\nu p_2(t) + \omega_2^2 p_2(t) &= \omega_2^2 p_1(t) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\nu > 0$.

Stosując przekształcenie Laplace'a do równań (3), dla zerowych warunków początkowych otrzymuje się:

$$\begin{aligned} (s^{2\nu} + 2\xi_1 \omega_1 s^\nu + \omega_1^2) p_1(s) &= \omega_1^2 p_0(s) \\ (s^{2\nu} + 2\xi_2 \omega_2 s^\nu + \omega_2^2) p_2(s) &= \omega_2^2 p_1(s) \end{aligned} \quad (4)$$

Skąd otrzymuje się transmitancje operatorowe niecałkowitego rzędu analizowanego układu pneumatycznego:

$$\begin{aligned} G_1^{(\nu)}(s) &= \frac{p_1(s)}{p_0(s)} = \frac{\omega_1^2}{s^{2\nu} + 2\xi_1 \omega_1 s^\nu + \omega_1^2} \\ G_2^{(\nu)}(s) &= \frac{p_2(s)}{p_1(s)} = \frac{\omega_2^2}{s^{2\nu} + 2\xi_2 \omega_2 s^\nu + \omega_2^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Transmitancja operatorowa analizowanego układu przyjmie postać:

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(s) &= \frac{p_2(s)}{p_0(s)} = G_1^{(\nu)}(s) G_2^{(\nu)}(s) \\ G^{(\nu)}(s) &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{s^{4\nu} + (2\xi_1 \omega_1 + 2\xi_2 \omega_2) s^{3\nu} + (\omega_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) s^{2\nu} + (2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2) s^\nu + \omega_1^2 \omega_2^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Dla zależności (6), otrzymuje się transmitancję widmową przetwornika:

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(j\omega) &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega^{4\nu} [\cos(2\nu\pi) + j \sin(2\nu\pi)] + (2\xi_1 \omega_1 + 2\xi_2 \omega_2) \omega^{3\nu} \left[\cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) \right] +} \\ &+ \frac{(\omega_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) \omega^{2\nu} [\cos(\nu\pi) + j \sin(\nu\pi)] +}{(2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2) \omega^\nu \left[\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \right] + \omega_1^2 \omega_2^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Dokonując elementarnych przekształceń oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej niecałkowitych rzędów:

$$G^{(\nu)}(j\omega) = P^{(\nu)}(\omega) + jQ^{(\nu)}(\omega) \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P^{(\nu)}(\omega) &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \left[\omega^{4\nu} \cos(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \right. \\ &+ \omega_1^2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &+ 4\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &\left. + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \omega_1^2 \omega_2^2 \right]}{\left[\omega^{4\nu} \cos(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \omega_1^2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \right. \\ &+ 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &\left. + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \omega_1^2 \omega_2^2 \right]^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q^{(\nu)}(\omega) &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \left[\omega^{4\nu} \sin(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \right. \\ &+ \omega_1^2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &+ 4\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &\left. + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \right]}{\left[\omega^{4\nu} \cos(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \omega_1^2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \right. \\ &+ 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \\ &\left. + 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \right]^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Znając część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej przetwornika, można wyznaczyć równanie opisujące logarymiczną charakterystykę amplitudową:

$$L^{(\nu)}(\omega) = 20 \log \sqrt{[P^{(\nu)}(\omega)]^2 + [Q^{(\nu)}(\omega)]^2} \quad (11)$$

oraz równanie opisujące logarymiczną charakterystykę fazową:

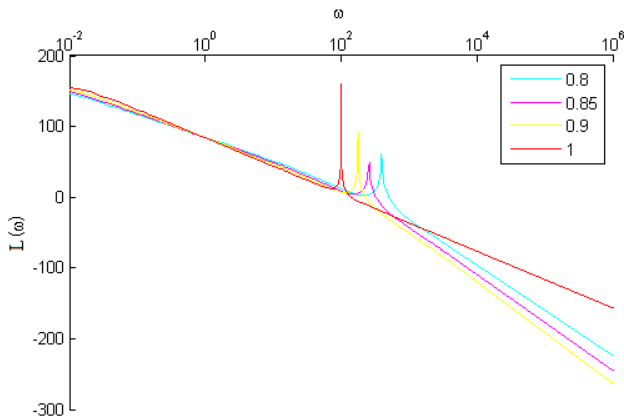
$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(\omega) &= \arctg \left[\frac{Q^{(\nu)}(\omega)}{P^{(\nu)}(\omega)} \right] = \\ &= -\arctg \left[\frac{\omega^{4\nu} \sin(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \right. \\ &+ \omega_1^2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \\ &+ \omega_1^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \\ &+ 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \left. \right] \\ &+ \frac{2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \omega_1^2 \omega_2^2}{\left[\omega^{4\nu} \cos(2\nu\pi) + 2\xi_1 \omega_1 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_2 \omega^{3\nu} \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right) + \right. \\ &+ \omega_1^2 \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \omega_2^2 \omega^{2\nu} \cos(\pi\nu) + \\ &+ 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + 2\xi_2 \omega_1^2 \omega_2 \omega^\nu \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + \omega_1^2 \omega_2^2 \left. \right]} \end{aligned} \quad (12)$$

Używając programu napisanego w środowisku MATLAB, który wykorzystano do przeprowadzenia symulacji równań opisujących charakterystyki Bodego (11) i (12) membranowego przetwornika ciśnienia, uzyskano logarymiczne charakterystyki amplitudy i fazy analizowanej kaskady pneumatycznej. Charakterystyki przedstawione zostały na Rys. 3. oraz Rys. 4..

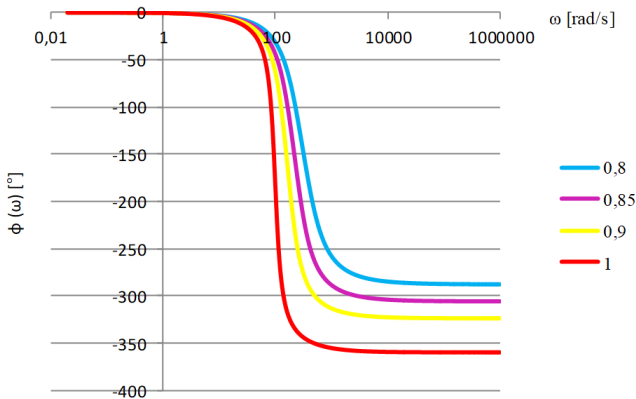
Wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe (Rys. 3 oraz Rys. 4) prawidłowo odzwierciedlają dynamikę modelu. Dla parametru $\nu = 1$ logarymiczna charakterystyka amplitudowa (Rys. 3) i fazowa (Rys. 4) pokrywa się ze znanymi charakterystykami członów oscylacyjnych 4 rzędu. Z charakterystyki amplitudowej (Rys. 3) można odczytać spadek wzmocnienia, który wynosi $-80dB/dek$, a z charakterystyki fazowej (Rys. 4) przesunięcie fazowe $\varphi = -2\pi$ dla parametru $\nu = 1$, a więc tak jak jest w klasycznym członie oscylacyjnym 4 rzędu.

Z analizy charakterystyk częstotliwościowych (Rys. 3 oraz Rys. 4) wynika, że pulsacja rezonansowa zależy od parametru ν , a więc od rzędu różniczkki, w równaniu różniczkowym opisującym badany układ. Zmniejszając rząd zwiększa się pulsacja rezonansowa. Przesunięcie fazowe układu jest tym mniejsze im mniejszy jest rząd różniczkki.

Kaskada $\zeta_1 = 0.2, \zeta_2 = 0.2, \omega_1 = 100 \text{ rad}, \omega_2 = 100 \text{ rad}$

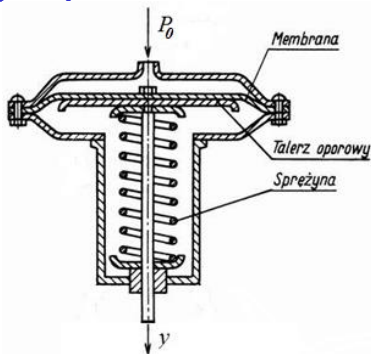


Rys. 3. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe kaskady pneumatycznej opisanej za pomocą równania różniczkowego z pochodnymi niecałkowitego rzędu dla parametru ν z zakresu (0,8–1) [opracowanie własne autorów artykułu]



Rys. 4. Logarytmiczne charakterystyki fazowe kaskady pneumatycznej opisanej za pomocą równania różniczkowego z pochodnymi niecałkowitego rzędu dla parametru ν z zakresu (0,8–1) [opracowanie własne autorów artykułu]

2. Model matematyczny membranowego siłownika pneumatycznego opisany rachunkiem różniczkowym niecałkowitych rzędów



Rys. 5. Siłownik pneumatyczny membranowy [11]

Na podstawie zasad Newtona można zapisać:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + R \frac{dy(t)}{dt} + Cy(t) = Ap_0(t) \quad (13)$$

gdzie:

- $p_0 [Pa]$ – ciśnienie wejściowe (wymuszenie);

- $A [m^2]$ – powierzchnia czynna membrany;
- $m [kg]$ – masa układu ruchomego;
- $C [Nm^{-1}]$ – współczynnik sztywności sprężyny;
- $R [Nsm^{-1}]$ – współczynnik tarcia lepkiego;
- $y [m]$ – przesunięcie trzpienia siłownika.

Jeżeli tłumienie układu $\xi < 1$, to $R < 2\sqrt{mC}$.

Uogólniając równanie (5.36), otrzymuje się:

$$m_0^{RL} D_t^{2\nu} y(t) + R_0^{RL} D_t^\nu y(t) + Cy(t) = Ap_0(t) \quad (14)$$

gdzie: $\nu > 0$.

Stosując przekształcenie Laplace'a, przy zerowych warunkach początkowych, dla pochodno – całki niecałkowitego rzędu zdefiniowanej według Riemanna – Liouville'a, otrzymuje się:

$$mY(s) \left(s^{2\nu} + \frac{R}{m} s^\nu + \frac{C}{m} \right) = Ap_0(s) \quad (15)$$

Skąd otrzymuje się transmitancję operatorową niecałkowitego rzędu membranowego siłownika pneumatycznego:

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{P_0(s)} = \frac{\frac{A}{m}}{s^{2\nu} + \frac{R}{m} s^\nu + \frac{C}{m}} \quad (16)$$

W celu dokonania symulacji przyjęto dane pneumatycznego siłownika membranowego hamulca T16 firmy GMP:

- A – powierzchnia efektywna membrany: dla $r=50\text{mm}$ (średnica = 100mm) $A=0,00785 \text{ m}^2$;
- m – masa układu ruchomego (membrana i trzpień); $m=0,12 + 0,2 = 0,32\text{kg}$;
- C – współczynnik sztywności sprężyny; $C = 1000\text{N/m}$
- R – współczynnik tarcia lepkiego (oporów ruchu części ruchomych) – $R=0,5\text{Ns/m}$.

Podstawiając powyższe dane do zależności (16) otrzymano transmitancję operatorową analizowanego siłownika pneumatycznego:

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{P_0(s)} = \frac{0,025}{s^{2\nu} + 1,56s^\nu + 3125} \quad (17)$$

Mianownik transmitancji operatorowej niecałkowitego rzędu ma dwa pierwiastki zespolone. W związku z tym otrzymuje się:

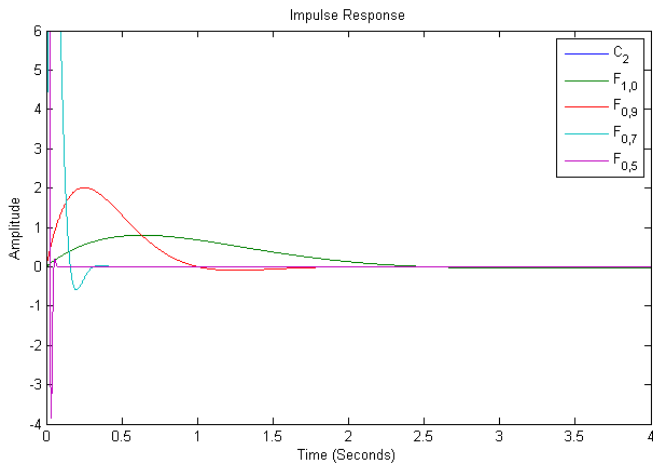
$$\left. \begin{matrix} g^{(\nu)}(t) \\ h^{(\nu)}(t) \end{matrix} \right\} = 0,025 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (3125)^k \varepsilon_k \left(t, -1,56; \nu, 2\nu + \nu k + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \quad (18)$$

Dla zależności (8) otrzymuje się równania opisujące odpowiedź impulsową oraz skokową niecałkowitego rzędu badanego siłownika pneumatycznego w postaci:

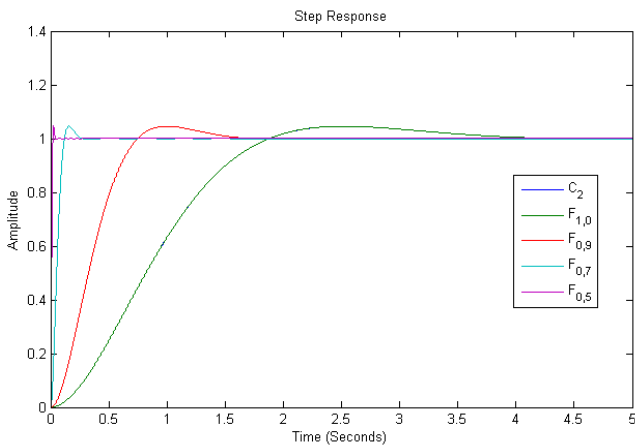
$$\left. \begin{matrix} g^{(\nu)}(t) \\ h^{(\nu)}(t) \end{matrix} \right\} = 0,025 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (3125)^k \left\{ \begin{matrix} t^{2\nu(k+1)-1} E_{\nu, 2\nu+k}^{(k)}(-1,56t^\nu) \\ t^{2\nu(k+1)} E_{\nu, 2\nu+k+1}^{(k)}(-1,56t^\nu) \end{matrix} \right\} \quad (19)$$

przy czym funkcja $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z)$ jest specjalnym rodzajem funkcji Mittag-Lefflera.

Przeprowadzając symulację przetwornika pneumatycznego zadano sygnał w postaci skoku impulsowego oraz jednostkowego otrzymując odpowiedź impulsową i skokową przedstawioną na rysunku 6 oraz rysunku 7.



Rys. 6. Odpowiedź impulsowa siłownika pneumatycznego opisanego całkowym i niecałkowym rzędem: $F_{0,5}$ – dla $\nu = 0,5$, $F_{0,7}$ – dla $\nu = 0,7$, $F_{0,9}$ – dla $\nu = 0,9$, $F_{1,0}$ – dla $\nu = 1$, C_2 – model klasyczny (całkowy rząd) [opracowanie własne autorów artykułu]



Rys. 7. Odpowiedź skokowa siłownika pneumatycznego opisanego całkowym i niecałkowym rzędem: $F_{0,5}$ – dla $\nu = 0,5$, $F_{0,7}$ – dla $\nu = 0,7$, $F_{0,9}$ – dla $\nu = 0,9$, $F_{1,0}$ – dla $\nu = 1$, C_2 – model klasyczny (całkowy rząd) [opracowanie własne autorów artykułu]

Na Rys. 6. oraz Rys. 7. pokazane zostały odpowiedzi impulsowe i skokowe określone wzorem (5.51) dla wybranych wartości ν z przedziału $[0,1]$. Charakterystyki impulsowe i skokowe badanego siłownika pneumatycznego opisanego za pomocą równań różniczkowych całkowych oraz niecałkowych rzędów dla parametru $\nu = 1$ w podanej skali pokrywają się. Świadczy to o prawidłowości analizowanego modelu siłownika. Z Rys. 6. oraz Rys. 7. wynika, że dla rosnących wartości rzędów analizowanego siłownika pneumatycznego, odpowiedzi impulsowe i skokowe nabierają charakteru elementu oscylacyjnego II rzędu. Dla małych, dążących do jednego

rzędów, odpowiedzi nabierają charakteru elementu inercyjnego I rzędu.

Dla zależności (16) otrzymuje się transmitancję widmową siłownika:

$$G^{(\nu)}(j\omega) = \frac{\frac{A}{m}}{(j\omega)^{2\nu} + \frac{R}{m}(j\omega)^\nu + \frac{C}{m}} \quad (20)$$

$$G^{(\nu)}(j\omega) = \frac{\frac{A}{m}}{\omega^{2\nu} [\cos(\nu\pi) + j \sin(\nu\pi)] + \frac{R}{m} \omega^\nu \left[\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{C}{m}}$$

Dokonyując elementarnych przekształceń oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej, gdzie:

$$P^{(\nu)}(\omega) = \frac{\frac{A}{m} \omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \frac{AR}{m^2} \omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{AC}{m^2}}{\left[\omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{C}{m} \right]^2 + \left[\omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (21a)$$

$$Q^{(\nu)}(\omega) = -\frac{\frac{A}{m} \omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \frac{AR}{m^2} \omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{\left[\omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{C}{m} \right]^2 + \left[\omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (21b)$$

Znając część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej siłownika, można wyznaczyć równanie opisujące logarytmiczną charakterystykę amplitudową:

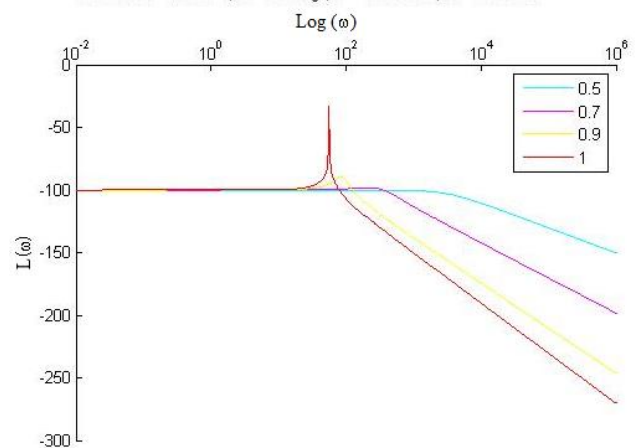
$$L^{(\nu)}(\omega) = 20 \log \sqrt{\left[P^{(\nu)}(\omega) \right]^2 + \left[Q^{(\nu)}(\omega) \right]^2} \quad (22)$$

oraz równanie opisujące logarytmiczną charakterystykę fazową:

$$\varphi^{(\nu)}(\omega) = \arctg \left[\frac{Q^{(\nu)}(\omega)}{P^{(\nu)}(\omega)} \right] = -\arctg \left[\frac{\omega^{2\nu} \sin(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{\omega^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \frac{R}{m} \omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{C}{m}} \right] \quad (23)$$

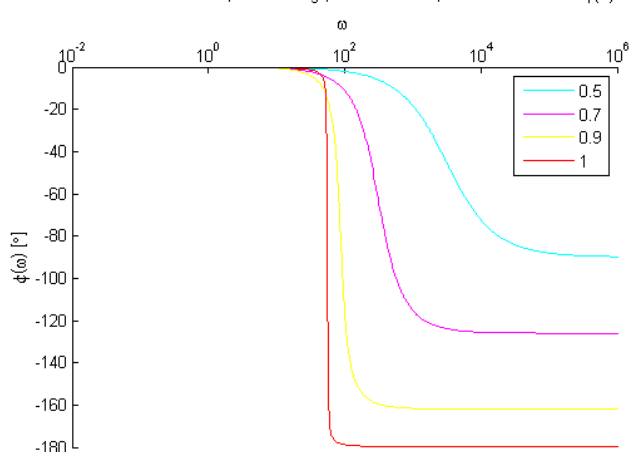
Wykorzystując napisany program w środowisku MATLAB dokonano symulacji równań (22) i (23), uzyskując częstotliwościową logarytmiczną charakterystykę amplitudową oraz fazową siłownika, które przedstawione zostały na rysunku 8 oraz rysunku 9.

Siłownik $A = 0.01 \text{ m}^2$, $m = 0.32 \text{ kg}$, $C = 1000 \text{ N/m}$, $R = 0.5 \text{ Ns/m}$



Rys. 8. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe membranowego siłownika pneumatycznego opisanego za pomocą równania różniczkowego o pochodnych niecałkowego rzędu dla różnych wielkości parametru ν [opracowanie własne autorów artykułu]

Siłownik $A = 0.01 \text{ m}^2$, $m = 0.32 \text{ kg}$, $C = 1000 \text{ N/m}$, $R = 0.5 \text{ Ns/m}$ - $\phi(\omega)$



Rys. 9. Logarymiczne charakterystyki fazowe membranowego siłownika pneumatycznego opisanego za pomocą równania różniczkowego o pochodnych niecałkowitego rzędu dla różnych wielkości parametru ν [opracowanie własne autorów artykułu]

Na logarymicznych charakterystykach częstotliwościowych (Rys. 8. oraz Rys. 9.) widać, że dla parametru $\nu = 1$, powyżej pulsacji rezonansowej, nachylenie charakterystyki amplitudowej wynosi -20 dB/dek , jak jest w członie oscylacyjnym II rzędu. Zmniejszając rząd zmniejsza się spadek wzmocnienia i układ nabiera charakteru członu inercyjnego I rzędu.

Przebieg logarymicznej charakterystyki fazowej (Rys. 9.) potwierdza tę tendencję. Dla parametru $\nu = 1$ charakterystyka fazowa pokrywa się z logarymiczną charakterystyką fazową klasycznego członu oscylacyjnego II rzędu (dla pulsacji większej niż rezonansowa przesunięcie fazowe osiąga wartość $\phi = -\pi$). Zmniejszając wartość rzędu różniczki, układ nabiera charakteru członu inercyjnego I rzędu, gdyż dla pulsacji większej niż rezonansowa przesunięcie fazowe zmniejsza się. Dla parametru $\nu = 0,5$ przesunię-

cie fazowe osiągnie wartość $\phi = -\frac{\pi}{2}$, tak jak ma to miejsce w przypadku członu inercyjnego I rzędu.

Podsumowanie

Otrzymane charakterystyki, które powstały w wyniku symulacji zależności wyznaczonych z rozwiązania równań różniczkowych rzędów całkowitych pokrywają się z charakterystykami niecałkowitych rzędów otrzymanymi z rozwiązania równań różniczkowych niecałkowitych rzędów dla parametru $\nu = 1$. Potwierdza to fakt, że klasyczny rachunek różniczkowy jest przypadkiem szczególnym rachunku różniczkowego rzędów dowolnych, a tym samym świadczy to o prawidłowo opracowanych modelach matematycznych.

Zastosowanie opisu właściwości dynamicznych układów pneumatycznych opartego na rachunku różniczkowym niecałkowitych rzędów pozwoli autorom artykułu na analizę właściwości szerokiej klasy układów pneumatycznych o dowolnych rzędach.

Bibliografia:

1. Busłowicz M., Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu, *Pomiary Automatyka Robotyka* nr 2/2010.

2. Busłowicz M., Nartowicz T., *Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem*, *Pomiary Automatyka Robotyka*, nr 2, s. 398-405, 2009.
3. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, stron 271, ISSN 0867-096X, Białystok 2009.
4. Chwaleba A., Luft M., *Właściwości i projektowanie wybranych przetworników mechano-elektrycznych*, Zakład Poligraficzny Politechniki Radomskiej, *Wyd. II popr. i uzup.*, ISBN 83-88001-00-0, Radom 1998.
5. Luft M., Nowocień A., Cioć R., Pietruszczak D., *Charakterystyki częstotliwościowe modelu przetwornika ciśnienia opisanego równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu*, *Logistyka* nr 3/2015, ISSN 1231-5478, Poznań 2015.
6. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Analiza właściwości dynamicznych wybranych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów. Część 1. Badania symulacyjne*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1050-1055, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2017), Radom 2017.
7. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Właściwości dynamiczne wybranych podstawowych członów automatyki niecałkowitych rzędów*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1056-1060, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2018), Radom 2018 – artykuł zgłoszony
8. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Analiza właściwości dynamicznych wybranych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów. Część 2. Badania laboratoryjne*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1056-1060, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2017), Radom 2017.
9. Luft M., Pietruszczak D., Nowocień A., *Frequency response of the pressure transducer model described by the fractional order differential equation*, *TTS* 12 (2016), ISSN 1232-3829, Radom 2016.
10. Luft M., Szychta E., Nowocień A., Pietruszczak D., *Zastosowanie rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów w matematycznym modelowaniu przetwornika ciśnienia*, *Autobusy* nr 6/2016, ISSN 1509-5878, Instytut Naukowo-Wydawniczy SPATIUM, Radom 2016
11. Nowocień A., *Analiza właściwości dynamicznych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Uniwersytetu Technologiczno- Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Radom 2017, (Promotor: Prof. dr hab. Inż. Mirosław Luft; Promotor pomocniczy: dr inż. Daniel Pietruszczak)
12. Nowocień A., Luft M., Pietruszczak D., *Zastosowanie rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów w nauce i technice*. *Logistyka* nr 3/2014.
13. Ostalczyk P., *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, stron 430, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź 2008.
14. Pietruszczak D., *Analiza właściwości układów pomiarowych wielkości dynamicznych z wykorzystaniem rachunku różniczkowo – całkowego ułamkowych rzędów*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Uniwersytetu Technologiczno- Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Radom 2013.

15. Podlubny I., *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, 368 pages, ISBN 0125588402, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto 1999.
16. Mościński J., Ogonowski Z. (red.), *Advanced Control with MATLAB and SIMULINK*, Pearson Higher Education, 272 pages, ISBN 013309667X, 1995.
17. Rudra P., (tłumacz: Korbecki M.), *Matlab 7 dla naukowców i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, stron 280, ISBN 9788301160579, Warszawa 2010.
18. <http://www.mathworks.com> – strona internetowa producenta programu MATLAB

Mathematical models of the pneumatic cascade and a membrane pneumatic actuator described by the fractional calculus

The paper presents the analysis of dynamic properties of pneumatic systems such as a pneumatic cascade and a membrane pneumatic actuator using differential equations of integer orders and differential equations with derivatives of non-integer orders.

The analyzed systems were described in the domain of time by means of step characteristics and in terms of frequency with the help of Bode characteristics, i.e. logarithmic amplitude and phase characteristics. Each characteristic was determined on the basis of a differential equation with derivatives of non-integer order.

To determine the characteristics, an irreplaceable programming tool was the interactive Simulink package built on the basis of the MATLAB programme, which allows the analysis and synthesis of continuous dynamic systems.

Keywords: pneumatic cascade, fractional calculus, pneumatic actuator.

Autorzy:

Prof. dr hab. inż. Mirosław Luft, prof. zw. – Wydział Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: m.luft@uthrad.pl

Dr inż. Artur Nowocień – Zespół Szkół Elektronicznych im. Bohaterów Westerplatte w Radomiu, ul. Sadkowska 19, 26-600 Radom

Dr inż. Daniel Pietruszczak – adiunkt, Wydział Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: d.pietruszczak@uthrad.pl