Magdalena ATAMAN, Wacław SZCZEŚNIAK

PŁYTA MINDLINA NA TRÓJPARAMETROWYM, INERCYJNYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM WŁASOWA-LEONTIEWA POD OBCIĄŻENIEM IMPULSEM SIŁY

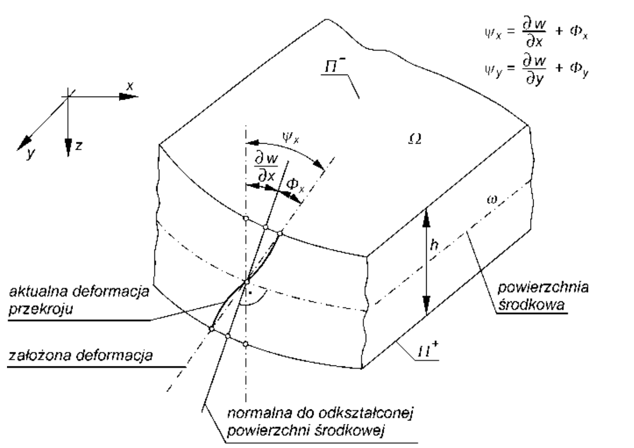
Streszczenie

W artykule omówiono zadanie płyty o średniej grubości, z zastosowaniem teorii Mindlina, w przypadku dynamicznym. Sprężysta płyta o średniej grubości jest prostokątna i spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia na obwodzie. Dodatkowo płyta spoczywa na podłożu odkształcalnym Własowa-Leontiewa. Przyjęty model jednokierunkowego podłoża jest trójparametrowy i uwzględnia, oprócz współczynnika sprężystego osiadania, inercję podłoża oraz ścinanie w gruncie. Obciążenie analizowanego układu stanowi impuls siły Diraca, przyłożony w dowolnym punkcie na górnej powierzchni płyty.

WSTĘP

Pionierskie prace Reissnera, Hecky-ego, Mindlina, Własowa, Ambarcumniana, Musztariego, Panca i innych, dotyczące teorii płyty sprężystej o średniej grubości, opisano w wielu opracowaniach przeglądowych i monografiach, np. [8, 7]. W przypadku obciążeń dynamicznych na pierwszym miejscu należy wymienić prace Mindlina [1-3] z lat pięćdziesiątych. Trzeba podkreślić, że przyjęta tu do rozważań techniczna teoria płyty o średniej grubości jest to teoria Hencky'ego-Mindlina [1-22] (rys 1.), bazująca na prostej hipotezie kinematycznej w odniesieniu do przemieszczeń. W pracy Hencky'ego [10] mamy: $u_x = -z/h\,\psi(x,y)$, $u_y = -z/h\,\Pi(x,y)$, oraz $w = w(x,y)$, z kolei w oryginalnych pracach Mindlina [3-22]: $u_x = -z\,\psi_x(x,y,t)$, $u_y = -z\,\psi_y(x,y,t)$ oraz $w = w(x,y,t)$. Modyfikując nieznacznie wymienione hipotezy kinematyczne do postaci bardziej odpowiedniej do techniki MES mamy:

$$u_x = -z\,\varphi_x(x,y,t),\; u_y = -z\,\varphi_y(x,y,t),\quad w = w(x,y,t). \tag{1}$$



Rys. 1. *Interpretacja kątów ψ_x, ϕ_x, oraz $\frac{\partial w}{\partial x}$ w teorii płyty o średniej grubości Hencky'ego-Mindlina*

1. RÓWNANIA RUCHU PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

W teorii płyt Mindlina występują trzy niewiadome wielkości kinematyczne: ugięcie w oraz dwa kąty obrotu φ_x i φ_y. Siły wewnętrzne w płycie określone są następującymi wzorami:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \kappa G h \begin{bmatrix} \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Trzy równania ruchu stanu czysto płytowego określone są w tym przypadku w następujący sposób:

$$\kappa G h\left(\nabla^2 w + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0,$$

$$D\left[\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}\right] + $$

$$-\kappa G h\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

$$D\left[\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2}\right] + $$

$$-\kappa G h\left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0.$$

Równania ruchu (3) są ważne jedynie w przypadku obciążenia pionowego na górnej i dolnej powierzchni ograniczającej płytę. Można je zapisać inaczej, a mianowicie:

$$\nabla^4 w-\left(\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 w\right)+\frac{\rho h^3}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{q}{D}-\frac{1}{\kappa G h}\left(\nabla^2 q\right)+\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \tag{4}$$

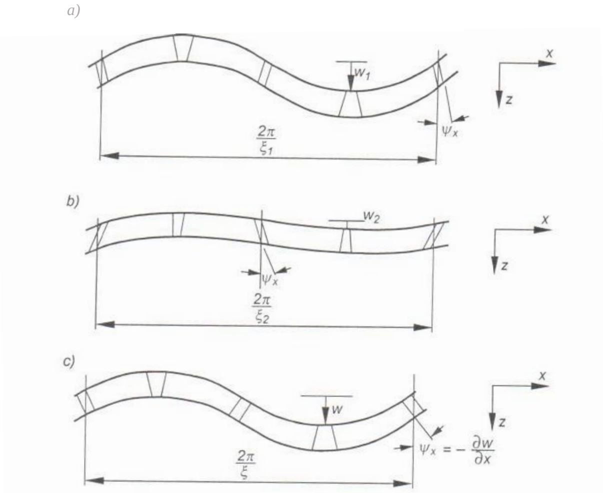
$$\left[\nabla^2-\frac{2\kappa G h}{D(1-\nu)}-\frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\begin{bmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\left[\nabla^2 w-\frac{\rho}{\kappa G}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{q}{\kappa G h}\right]+ \tag{5}$$
$$+\frac{2\kappa G h}{D(1-\nu)}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}w.$$

Reakcja podłoża według modelu Własowa-Leontiewa zależy od trzech współczynników k, c, m_0:

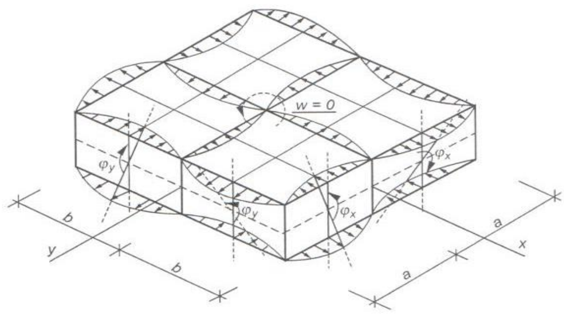
$$r(x,y,t)=k\,w(x,y,t)-c\,\nabla^2 w(x,y,t)+$$
$$+m_0\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2},$$
$$q(x,y,t)=p(x,y,t)-r(x,y,t), \tag{6}$$
$$q(x,y,t)=p(x,y,t)-k\,w(x,y,t)+$$
$$+c\,\nabla^2 w(x,y,t)-m_0\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}.$$

Podstawiając $(6)_3$ do równań (4) i (5) otrzymujemy trzy następujące, dość skomplikowane, równania ruchu

$$\nabla^4 w-\left(\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 w\right)+\frac{\rho^2 h^3}{12GD\kappa}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+$$
$$\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\kappa G h}\nabla^2+\frac{\rho^2 h^3}{12GD\kappa}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Bigg(\quad p-k w+$$
$$+c\,\nabla^2 w-m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Bigg),$$
$$\left[\nabla^2-\frac{2\kappa G h}{D(1-\nu)}-\frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\begin{bmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{bmatrix}= \tag{7}$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\left[\nabla^2 w-\frac{\rho}{\kappa G}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{q}{\kappa G h}\right]+$$
$$+\frac{2\kappa G h}{D(1-\nu)}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}w.$$



Rys. 2. Giętne postacie drgań własnych płyty o średniej grubości wyznaczone przez Mindlina w pracy z 1956 roku a), b) oraz postać drgań własnych płyty Kirchhoffa c)



Rys. 3. Giętno-skrętna postać drgań występująca w płytach o średniej grubości, podana po raz pierwszy przez Mindlina i innych w pracy z 1956 roku

2. ZADANIE WŁASNE PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

Przyjmując w równaniach (7) $p(x,y,t)=0$ otrzymujemy trzy jednorodne równania ruchu opisujące zagadnienie własne. Przykładowo równanie $(7)_1$ zapisujemy w następujący sposób:

$$\left(1+\frac{c}{\kappa G h}\right)\nabla^4 w+$$
$$-\left(\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}+\frac{m_0}{\kappa G h}+c\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 w\right)+$$
$$+\left(\frac{\rho^2 h^3}{12GD\kappa}+m_0\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+ \tag{8}$$
$$+\left(\frac{\rho h}{D}+\frac{m_0}{D}+k\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$
$$-\left(\frac{c}{D}+\frac{k}{\kappa G h}\right)\nabla^2 w+\frac{k}{D}w=0.$$

Przyjmując ruch harmoniczny drgań własnych ugięcia i oba kąty obrotu płyty opisujemy podwójnymi szeregami trygonometrycznymi spełniającymi warunki brzegowe przegubowego podparcia na obwodzie płyty w formie:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,\sin\omega_{m,n}t,\\
\varphi_x(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,\sin\omega_{m,n}t,\\
\varphi_y(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,\sin\omega_{m,n}t.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Pozwala to, między innymi, na wyznaczenie dwóch częstości kołowych $\omega_{1m,n}$ oraz $\omega_{3m,n}$. Postacie drgań płyty średniej grubości, odpowiadające tym częstościom, pokazano na rysunku 2 a) i 2 b), a na rysunku 2 c) postać drgań cienkiej płyty Kirchhoffa. Z kolei na rysunku 3 pokazano postać drgań odpowiadającą częstości $\omega_{2m,n}$, określającą tzw. drgania skrętne wynikające z równań $(7)_2$, wyznaczone po raz pierwszy przez Minlina w pracach [1, 3]. Łatwo zauważyć, że w przypadku tej postaci drgań ugięcia $w=0$.

Równanie jednorodne, z którego wyznaczymy częstości drgań własnych zapiszemy wykorzystując program Mathematica, mamy zatem:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\rho^2h^3}{12GD\kappa}+\frac{m_0\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\omega^4+\left[\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}+\frac{m_0}{\kappa Gh}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{c\rho h^2}{12GD\kappa}-\left(\frac{\rho h}{D}+\frac{m_0}{D}+\frac{k\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\right]\omega^2+\\
&\quad+\left(1+\frac{c}{\kappa Gh}\right)\gamma^4-\left(\frac{c}{D}+\frac{k}{\kappa Gh}\right)\gamma^2=0,\\
&\alpha^2=\frac{m^2\pi^2}{a^2},\quad \beta^2=\frac{n^2\pi^2}{b^2},\quad \gamma^2=\alpha^2+\beta^2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Podstawowe częstości drgań własnych są określone w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\|&\frac{1}{h^3\rho(h\rho+m_0)}\Bigg|\;48h^3\rho(h\rho+m_0)\cdot\\
&\cdot\left\{\gamma^2D\left[k-\gamma^2(c+Gh\kappa)\right]+Gh\kappa\left(c\gamma^2-2k\right)\right\}+\\
&+\Big\langle h\left\{h\rho\left[ch+G\kappa\left(h^2-12\right)-hk\right]-12G\kappa m_0\right\}+\\
&\quad+12D(h\rho+m_0)\Big\rangle^2\Bigg|^{\frac{1}{2}}+\\
&+h\left\{h\rho\left[12G\kappa-h\left(c+Gh\kappa-k\right)\right]+\right.\\
&\quad\left.+12G\kappa m_0-12D(h\rho+m_0)\right\}\Bigg\|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\|&-\frac{1}{h^3\rho(h\rho+m_0)}\Bigg|\;48h^3\rho(h\rho+m_0)\cdot\\
&\cdot\left\{\gamma^2D\left[k-\gamma^2(c+Gh\kappa)\right]+Gh\kappa\left(c\gamma^2-2k\right)\right\}+\\
&+\Big\langle h\left\{h\rho\left[ch+G\kappa\left(h^2-12\right)-hk\right]-12G\kappa m_0\right\}+\\
&\quad+12D(h\rho+m_0)\Big\rangle^2\Bigg|^{\frac{1}{2}}+\\
&-h\left\{h\rho\left[12G\kappa-h\left(c+Gh\kappa-k\right)\right]+\right.\\
&\quad\left.+12G\kappa m_0+12D(h\rho+m_0)\right\}\Bigg\|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

cd. (11)

Mając wyznaczone obie częstości drgań giętnych możemy zająć się rozwiązaniem równania niejednorodnego $(7)_1$. W naszym przypadku obciążeniem dynamicznym jest impuls siły Diraca S [11].

3. DRGANIA PŁYTY WYMUSZONE IMPULSEM SIŁY

W pierwszej kolejności zapisujemy obciążenie dynamiczne płyty w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&p=p(x,y,t)=S\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(t-t_0),\\
&\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(t-t_0)=\frac{4}{a\,b}\;\delta(t-t_0)\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\alpha_m x\,\sin\alpha_n y\,\sin\alpha_m x_0\,\sin\alpha_n y_0,\\
&p(x,y,t)=S\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(t-t_0)=\\
&\quad=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{n,m}(t)\sin\alpha_m x\sin\beta_n y,\\
&f_{n,m}(t)=\frac{4\,S}{a\,b}\delta(t-t_0)\sin\alpha_m x_0\,\sin\beta_n y_0,\\
&\nabla^2p(x,y,t)=-\frac{4\,S}{a\,b}\sum_n\sum_m\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)f_{n,m}(t)\cdot\\
&\quad\cdot\sin\alpha_m x_0\,\sin\beta_n y_0\,\sin\alpha_m x\sin\beta_n y,\\
&\frac{\partial^2p(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{4S}{a\,b}\sum_n\sum_m\ddot{f}_{n,m}(t)\sin\alpha_m x_0\,\sin\beta_n y_0\cdot\\
&\quad\cdot\sin\alpha_m x\sin\beta_n y.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Następnie równanie $(7)_1$ przekształcamy do następującej postaci (13)

$$\left(1+\frac{c}{\kappa Gh}\right)\nabla^4 w+$$
$$-\left(\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}+\frac{m_0}{\kappa Gh}+c\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 w\right)+$$
$$\left(\frac{\rho^2 h^3}{12GD\kappa}+m_0\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+ \tag{13}$$
$$+\left(\frac{\rho h}{D}+\frac{m_0}{D}+k\frac{\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(\frac{c}{D}+\frac{k}{\kappa Gh}\right)\nabla^2 w+$$
$$+\frac{k}{D}w=p-kw+c\,\nabla^2 w-m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Rozwiązanie drgań wymuszonych na ugięcie płyty w przyjmujemy w postaci podwójnego szeregu, spełniającego warunki brzegowe na obwodzie płyty

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{m,n}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\omega_{m,n}t. \tag{14}$$

Po uwzględnieniu (14) otrzymujemy następujące niejednorodne równanie różniczkowe ruchu czwartego rzędu na wyznaczenie nieznanej funkcji $q_{m,n}(t)$

$$q^{IV}+\frac{B}{A}\ddot{q}+\frac{C}{A}q=\frac{1}{A}\left[\frac{4S}{ab}\delta(t-t_0)\sin\alpha_m x_0\sin\beta_n y_0\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1-\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\right]+ \tag{15}$$
$$+\frac{1}{A}\left[\frac{4S}{ab}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t-t_0)\sin\alpha_m x_0\sin\beta_n y_0\right].$$

W równaniu (15) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$A=\frac{\rho^2 h^3+m_0\rho h^2}{12GD\kappa},$$
$$B=\left[\frac{\rho}{\kappa G}+\frac{\rho h^3}{12D}+\frac{m_0}{\kappa Gh}+\frac{c\rho h^2}{12GD\kappa}+\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\rho h}{D}+\frac{m_0}{D}+\frac{k\rho h^2}{12GD\kappa}\right)\right], \tag{16}$$
$$C=\left(1+\frac{c}{\kappa Gh}\right)\gamma^4-\left(\frac{c}{D}+\frac{k}{\kappa Gh}\right)\gamma^2.$$

Równanie (15) rozwiązujemy analitycznie stosując pakiet Wolframa Mathematica.

WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy podano rozwiązanie zadania własnego sprężystej płyty Mindlina podpartej przegubowo na obwodzie i spoczywającej na inercyjnym trójparametrowym, jednokierunkowym podłożu Własowa-Leontiewa. Przeanalizowano również drgania wymuszone impulsem siły Diraca. W drugim z tych przypadków równanie ruchu, po rozdzieleniu zmiennych, rozwiązano numerycznie wykorzystując do tego celu kod Wolframa Mathematica. W pracy podano również obszerny spis literatury specjalistycznej dotyczącej analizowanego zadania.

BIBLIOGRAFIA

1. Mindlin R.D., *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.* J. Appl. Mech. (1951) 18, 1, pp.31-38.
2. Mindlin R.D., *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates.* World Scientific 2006.
3. Mindlin R.D., Schacknow A, Deresiewicz H., *Flexural vibrations of rectangular plates.* (1956), J. Appl. Mech. 23 3, pp.430-436.
4. Szcześniak W., *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt.* OW PW, Warszawa 2000.
5. Ataman M., Szcześniak W., *Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły.* Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 541-544.
6. Jemielita G., *Meandry teorii płyt. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej.* Budownictwo z.117, Warszawa 1991.
7. Szcześniak W.: *Drgania płyty pod wpływem obciążenia impulsowego.* Theoretical Foundations of Civil Engineering nr 5, 1997, pp. 386-392.
8. Новицкий В.В., *Дельта-функция и ее применение в строительной механике.* Расчет пространственных конструкций, выпуск VIII, 1962, Москва, стр. 207-244.
9. Nowacki W., *Dynamika budowli.* Arkady 1976.
10. Sarkisjan W.S., *K reszeniju zadacz o popierecznom uprugom udare szarom po anizotropnoj (nieortotropnoj) płastinkie i cilindriczeskoj obołoczkie. Niekotoryje zadaczy teorii uprugosti anizotropnogo teła.* IEU, Erewań, 1970, str. 381-396.
11. Dirac P.A., *The physical interpretation of the quantum dynamic.* Proceed. of the Royal Society of London. Series A, Vol. CXIII, No. 765, 1927, pp. 621-641.
12. Szcześniak W., Ataman M., *Drgania płyty o średniej grubości spoczywającej na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem impulsowym.* Przegląd Komunikacyjny 9/2017 str.26-29.
13. Ambarcumian S.A., *Teorja anizotropnych płastin.* Nauka, Moskwa 1987.
14. Ataman M., Szcześniak W., *Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły.* Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 537-540.
15. Ataman M., Szcześniak W., *Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły.* Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", 2016, vol. 17, nr 12, 541-544.
16. Wang Y.H., Tham L.G. and Cheung Y.K., *Beams and plates on elastic foundations: a review.* Structural Analysis and CAD. Prog. Struct. Engeng. Mater., 2005, 7, 174-183.
17. Szcześniak W., *Analiza dynamiczna płyty o średniej grubości.* Prace Naukowe PW, Budownictwo 1988, z.101, 1-236.
18. Szcześniak W., *Drgania płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym.* Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1985, 3, 1-2, 37-53.
19. Szcześniak W., *Wpływ dwuparametrowego podłoża sprężystego na drgania własne płyty o średniej grubości.* Rozprawy Inżynierskie IPPT PAN, 1989, 37, 1, 87-115.
20. Szcześniak W., *Drgania płyt. Dynamiczne obliczenia nawierzchni drogowej.* IBDiM, Warszawa 2000.
21. Kozyra Z., *Drgania belek I płyt wywołane uderzeniami.* OW PW, Warszawa 2010.
22. Herrmann G. (Ed.), *Mindlin R.D. and Applied Mechanics.* Pergamon Press 1974.

MINDLIN PLATE ON THE THREE-PARAMETER VLASOV-LEONTIEV INERTIAL FOUNDATION UNDER IMPULSE FORCE

Abstract

The paper deals with vibrations of the elastic Mindlin thick plate resting on the inertial Vlasov-Leotiev foundation. Inertial model of foundation is defined by three parameters: k , c, and m_0*. The plate is subjected to the impulse of force. Analytical solution of the problem is presented in the paper. Natural and forced vibrations of the plate are analysed.*

Autorzy:
dr inż. Magdalena Ataman – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
prof. dr hab. inż. Wacław Szcześniak – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury