

Czesław Miedziatowski*, Adam Walendziuk**

 orcid.org/0000-0002-7901-7598

 orcid.org/0000-0002-9707-0544

Modelowanie stref zdegradowanych w analizach wytrzymałościowych obiektów zabytkowych

Modelling of degraded zones in strength analyses of historical buildings

Słowa kluczowe: degradacja materiałów i konstrukcji, analiza struktur niejednorodnych, modelowanie komputerowe, rewaloryzacja i wzmacnianie konstrukcji

Key words: materials and structures degradation, non-homogeneous structures analysis, computer modelling, renovation and strengthening of structures

1. WSTĘP

Obiekty zabytkowe to w większości konstrukcje wykonane z kamienia, muru i drewna. Podlegają ciągłym oddziaływaniom obciążeń, wpływom środowiska i klimatu. Skutki oddziaływań są zauważalne coraz wyraźniej w miarę upływu czasu, a szczególnie dostrzegalne w przypadku obiektów zabytkowych [7]. Efektem procesów oddziaływania są zmiany parametrów materiałów oraz degradacje struktur konstrukcji (ryc. 1).

W procesach inwestycyjnych podejmuje się decyzje zmiany funkcji i przeznaczenia obiektów, są one przebudowywane. Wykorzystywane są fragmenty istniejących obiektów zabytkowych, wkomponowywane lub łączone z nowo budowanymi. Istotna jest historia zmian konstrukcyjnych przeprowadzonych w obiektach zabytkowych, a brak informacji o nich może mieć skutki katastrofalne [3]. W obiektach przeprowadzane są prace rewitalizacyjne, remonty oraz naprawy i wzmocnienia. W pracach adaptacyjnych i renowacyjnych stosuje się technologie łączenia z użyciem klejów i materiałów o wysokich właściwościach adhezyjnych. Działania te

1. INTRODUCTION

In the majority historical buildings are structures made of stone, masonry and wood. They are permanently subjected to loads, environmental and climate influences. The effects of interactions are more and more clearly noticeable over time, particularly in the case of historical buildings [7]. The effects of the interaction processes are changes in material parameters and degradation of structures (fig. 1).

In investment processes, changes are made to purposes and functions of buildings, they are rebuilt. Parts of existing historical structures are used, incorporating or combining them with newly built ones. The history of structural changes performed in the past in buildings is also important, and lack of information about them may have catastrophic consequences [3]. Renovation works, repairs and strengthening are carried out in the buildings. In adaptation and renovation works, joining technologies using adhesives and materials with high adhesive properties are used. In the design phase, these activities require a detailed analysis of the

* prof. dr hab. inż., Katedra Geotechniki i Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka

** dr inż., Katedra Geotechniki i Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka

* *Professor, DSc, PhD, Eng, Department of Geotechnics and Structural Mechanics, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Bialystok University of Technology*

** *PhD, Eng, Department of Geotechnics and Structural Mechanics, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Bialystok University of Technology*



Ryc. 1. Zdegradowane fragmenty konstrukcji: a) muru, b) cegieł i zaprawy, c) drewna
 Fig. 1. Degraded fragments of structures: a) masonry wall, b) bricks and mortar, c) wood

w fazie projektowania wymagają szczegółowej analizy wytrzymałości elementów konstrukcji poprzedzonych oceną stanu technicznego. Coraz częściej w diagnostyce i monitorowaniu obiektów stosowane są techniki komputerowe i pomiary laserowe [1]. Doskonalenie techniki pomiarowej wyzwała poszukiwania doskonalszych metod modelowania i analizy konstrukcji. Komplementarnym procesem w ocenie stanu technicznego budowli i zmian tego stanu jest identyfikacja sił i naprężeń w elementach konstrukcji. Praca zaprezentuje praktyczny sposób modelowania i oceny stanu naprężeń w konstrukcjach i elementach zdegradowanych lub wzmacnianych obiektów, wykorzystując analizy numeryczne i specjalne wielowarstwowe elementy skończone.

2. MODELOWANIE MATERIAŁÓW I STRUKTUR NIEJEDNORODNYCH

Cechą materiałów niejednorodnych mającą znaczenie w analizie zachodzących pod wpływem obciążenia zjawisk jest realizacja połączeń, styków i warstw. W modelowaniu materiałów stosowane są różne podejścia. Modele kontynuualne analizują zbiory pewnych elementarnych, nieskończenie małych objętości, a zależność między deformacjami i siłami wzajemnych oddziaływań między nimi określa związek konstytutywny. Modele dyskretne opisują strukturę ośrodka zbiorem elementów o skończonych wymiarach i określonej geometrii, a na brzegach elementów zakładane są związki fizyczne między siłami i przemieszczeniami.

Opracowania naukowe analizują i modelują zjawiska w obszarach o wymiarach znacznie mniejszych niż konstrukcja – wymiarach elementu próbnego, kilku składników. Numeryczne wyznaczenie oddziaływań w strukturach niejednorodnych często realizowane jest przez zastosowanie w modelu elementów łączących. Tego rodzaju elementy określane są terminami: „element zerowej grubości”, element kontaktowy lub interfejs. Zastosowanie elementów interfejsowych powoduje uwzględnienie sztywności połączenia w całkowitej sztywności modelowanego obszaru [9].

Powszechnie stosowanym konstrukcyjnym materiałem niejednorodnym jest mur złożony z jednostek murowych połączonych zaprawą. W modelowaniu murów stosuje się głównie metodę elementów skoń-

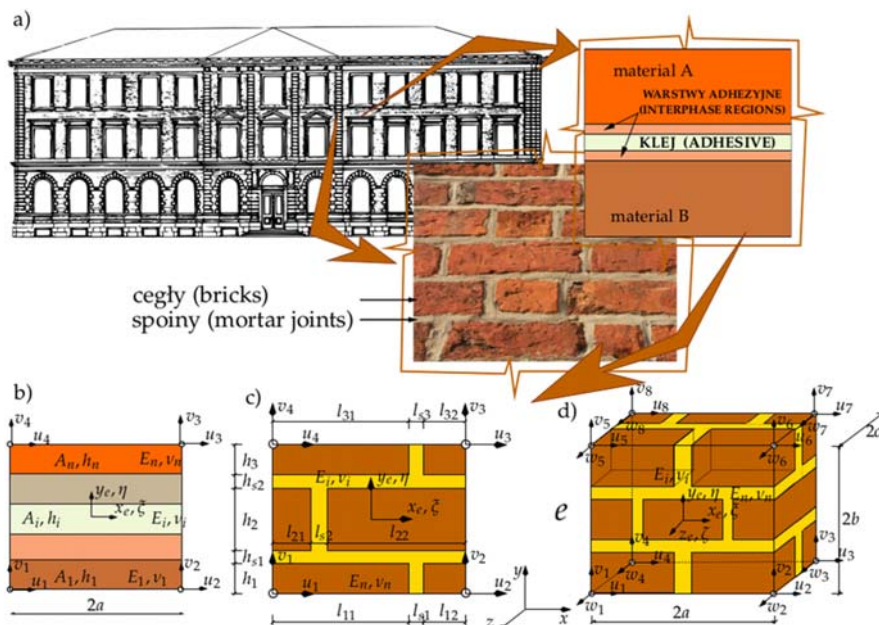
strength of the structure elements preceded by the technical condition assessment. Computer technology and laser measurements are increasingly used in the diagnostics and monitoring of facilities [1]. An improvement of the measurement technique triggers the search for better modelling methods in structural analysis. The complementary process in the assessment of the technical condition of the structure and changes of this state is the identification of forces and stresses in the structural elements. The paper presents a practical way of modelling and assessing the state of stress in structures and elements of degraded or strengthened buildings using numerical analyses and special multi-layer finite elements.

2. MODELLING OF HETEROGENEOUS MATERIALS AND STRUCTURES

A feature of heterogeneous materials that is important in the analysis of phenomena under the load is the implementation of connections, contacts and layers. Different approaches are used in the modelling of such materials. Continuous models analyse the collections of certain elementary infinitesimal volumes, and the constitutive relationship determines mutual interactions between arising deformations and resulting forces. Discrete models describe the structure of a solid with a set of elements of finite dimensions and specific geometry, and on the edges of the elements physical relationships between forces and displacements are assumed.

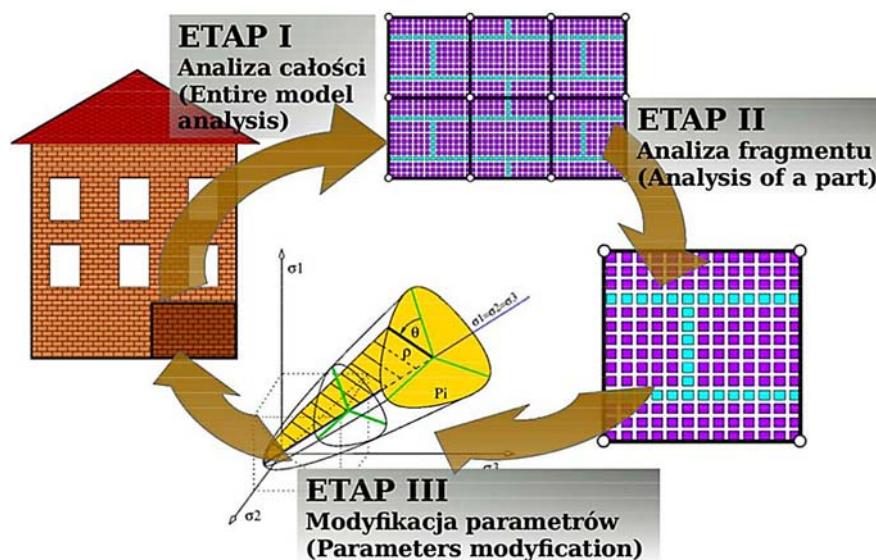
Scientific studies analyse and model phenomena in areas of dimensions much smaller than the structure – dimensions of the sample element or several components. The numerical determination of interactions in non-homogeneous structures is often carried out using special elements connecting components in the model. Such elements are referred to as zero thickness element, contact or interface element. The use of interface elements takes into account the stiffness of the joint in the total stiffness of the modelled body [9].

A commonly used constructional heterogeneous material is a masonry composed of masonry units connected by mortar. In the modelling of masonry, mainly the finite element method [10] and the dis-



Ryc. 2. Elementy wielowarstwowe: a) koncepcja, b) z warstwami w jednym kierunku, c) w dwóch kierunkach, d) trzech kierunkach

Fig. 2. Multi-layer elements: a) concept, b) with layers in one direction, c) two directions, d) three directions



Ryc. 3. Strategia obliczeń
Fig. 3. Calculation strategy

czonych [10] oraz metodę elementów dyskretnych [4]. Bazując na metodzie elementów skończonych, opracowuje się modele heterogeniczne oraz homogeniczne. W modelach homogenicznych mur przyjmuje się jako ośrodek jednorodny. Podejście takie umożliwia analizę całych konstrukcji [8], również w zakresie nieliniowym. W celu wyznaczenia zastępczych właściwości stosuje się różne metody homogenizacji [6]. Modele heterogeniczne wyróżniają składniki muru, jednostki murowe, zaprawę oraz połączenia między zaprawą i cegłami [5]. Jedną z cech wymienionych sposobów modelowania jest duża liczba niewiadomych w opracowywanych modelach zawierająca się w zakresie od kilku tysięcy do kilku milionów.

crete element method [4] are used. Based on the finite element method, heterogeneous and homogeneous models are developed. In homogeneous models the masonry is assumed as a composite medium. This approach allows the analysis of entire structures [8], also in the non-linear range. In order to determine representative properties, various homogenization methods are used [6]. Heterogeneous models distinguish masonry components, units, mortar and joints between mortar and bricks [5]. One of the features of the modeling methods mentioned above is a large number of unknowns in models ranging from several thousand to several million.

3. COMPUTER MODELLING OF STRUCTURES AND DEGRADED ZONES

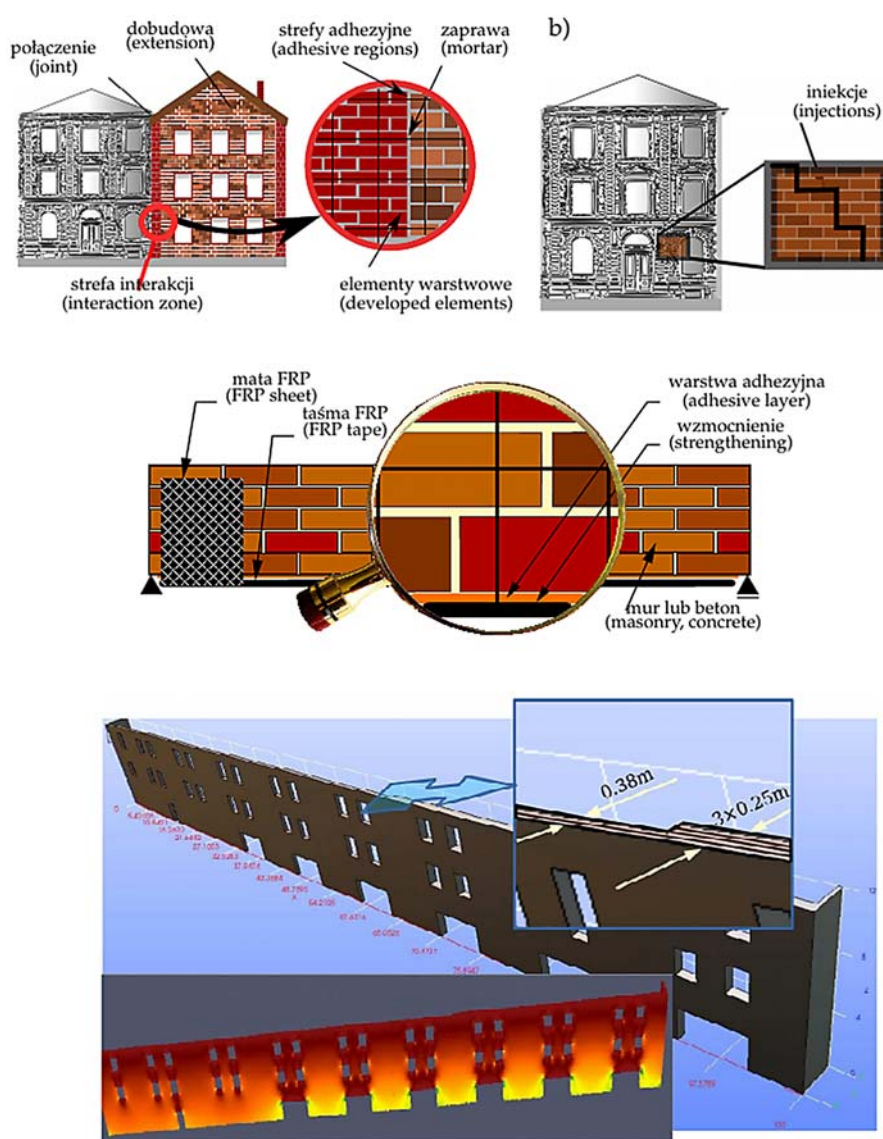
In non-homogeneous materials and complex structures subjected to stress the damage is initiated in interface or in bonding materials. An initiation of destruction in layers near joints is also observed if the bond has higher strength compared to the strength of the materials being joined. It is possible in the case of local degradation of materials as well as when modern, durable adhesives were used in renovation processes. Since computer modelling of solids using zero thickness elements in addition to more unknowns requires taking into account unreal properties, the application of strength criteria becomes a problem. A method is proposed that enables the analysis of stresses in such structures. The determination of stresses in multi-cohesive domains is carried out using the relationships of the finite element method. The proposed model makes it possible to take into account the variation of physical parameters in adhesive zones, subdivisions or degraded parts of the structure.

3. KOMPUTEROWE MODELOWANIE STRUKTUR I STREF ZDEGRADOWANYCH

W materiałach niejednorodnych i strukturach złożonych poddanych obciążeniu uszkodzenie inicjowane jest w połączeniu lub w łączonych materiałach. Obserwuje się również inicjację niszczenia w warstwach w pobliżu połączeń, jeżeli styk ma większą wytrzymałość w porównaniu z wytrzymałością łączonych materiałów. Możliwe jest to w przypadku lokalnej degradacji materiałów jak również wówczas, gdy w procesach renowacji zastosowano nowoczesne, wytrzymałe materiały adhezyjne. Ponieważ modelowanie komputerowe z zastosowaniem elementów „zerowej grubości” oprócz większej liczby niewiadomych wymaga uwzględnienia nierzeczywistych właściwości, problemem staje się również zastosowanie kryteriów wytrzymałościowych. Proponuje się sposób umożliwiający analizę stanu wyężenia w tego rodzaju strukturach. Wyznaczenie naprężeń w obszarach wielospójnych przeprowadza się korzystając z zależności metody elementów skończonych. Proponowany model umożliwia uwzględnienie zmienności cech fizycznych występujących w strefach adhezyjnych, podobzariach lub zdegradowanych fragmentach konstrukcji.

W celu analizy sił i naprężeń wyróżnia się obszar w strefie spójności materiałów o odmiennych właściwościach. Zakłada się ciągłość przemieszczeń na tej powierzchni oraz w każdym z obszarów składowych. Powyżej i poniżej powierzchni spójności wyróżnia się n pasm – warstw o pewnych wymiarach i znanych parametrach materiałowych (ryc. 2), z których część może stanowić strefy objęte procesem degradacji. Przyjmuje się, że znana jest dyskretyzacja całego obszaru wielospójnego, a węzły nie są położone na powierzchniach spójności. Niewiadome zlokalizowane w węzłach zestawione są w wektorze przemieszczeń q . Na wyróżnionych w strefie powierzchni spójności węzłach rozpina się element e . Składowe przemieszczenia w

In order to analyse forces and stresses, the area in the cohesion zone of materials with different properties is distinguished. The continuity of displacements on this surface and in each of the constituent areas is assumed. Above and below the surface of cohesion, there are n layers of certain dimensions and known material parameters (fig. 2), some of which may be zones covered by the degradation process. It is assumed that the discretization of the entire multi-cohesive domain is known, and the nodes are not located on the surfaces of cohesion. Unknowns located in nodes forms the displacement vector q . The element e is spanned on nodes distinguished in the zone of cohesion. The components of the displacements of nodes of this element form a vector u_e . The displacement field in the element is approximated by functions N_e that are included in the matrix of the shape function



Ryc. 4. Możliwości zastosowań praktycznych: a) naprawy i rozbudowy, b) rekonstrukcje i wzmocnianie murów, c) wzmocnienia konstrukcji belkowych, d) przykład analizy wielowarstwowej ściany budynku
 Fig. 4. Possibilities of practical applications: a) repairs and extensions, b) reconstruction and strengthening of walls, c) strengthening of beam, d) example of multi-layer analysis of a masonry wall and exemplary map of stresses

złów tego elementu tworzą wektor \mathbf{u}_e . Pole przemieszczeń w elemencie aproksymuje się funkcjami N_e , które uwzględnione są w macierzy funkcji kształtu \mathbf{N} . Oznaczając macierz operatorów różniczkowych przez \mathbf{L} , wektor odkształceń w obszarze elementu zapisuje się równaniem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}_e. \quad (1)$$

Zależności fizyczne wiążące wektor odkształceń i naprężeń w obszarze elementu mają postać wyrażoną prawem Hooke'a: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$. Macierz sprężystości warstwy i ($i = 1, \dots, n$) zawiera parametry materiałowe: moduł Younga E_i i współczynnik Poissona ν_i .

Energię wewnętrzną odkształcenia całego analizowanego obszaru, uwzględniając wyżej określone równości, można zapisać następująco:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{q} – wektor przemieszczeń, \mathbf{K} – globalna macierz sztywności układu.

Macierz sztywności układu \mathbf{K} definiuje się jako sumę macierzy sztywności poszczególnych elementów \mathbf{K}_e . Macierze sztywności opracowanych elementów wielowarstwowych wyznacza się całkując funkcje wyrażające energię wewnętrzną w podprzestrzeniach według ogólnej zależności:

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_1} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{B}^T dV + \dots + \int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{B} dV + \dots + \int_{V_n} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{B} dV. \quad (3)$$

Modyfikacje parametrów geometrycznych proponowanych elementów pozwalają generować rzeczywiste struktury modelu. Umożliwiają także kontrolę budowanego modelu numerycznego w zakresie spójności struktur niejednorodnych oraz generację stref zdegradowanych.

W celu oceny bezpieczeństwa, określenia stref wyćżeń w materiałach i strukturach złożonych oraz rozpoznania mechanizmów propagacji uszkodzeń i degradacji stosuje się kryteria wyćżenia. Formułowane są one analitycznie w postaci funkcji naprężeń, odkształceń lub ich niezmienników z wykorzystaniem wyników badań wytrzymałościowych [11]. Bezpieczny stan naprężeń definiuje nierówność:

$$F(\sigma_{ij}, c_m) < 0, \quad (4)$$

a c_m oznacza parametry materiałowe. Celem określenia inicjacji uszkodzenia materiałów niesymetrycznych do chwili obecnej stosuje się kryterium Rankine'a. Ponieważ zniszczenie takich materiałów zależy od wartości

\mathbf{N} . By designating the matrix of differential operators by \mathbf{L} , the deformation vector in the developed element is written by the equation:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}_e. \quad (1)$$

The relationship between strain and stress vector in the element have the form expressed by Hooke's law: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$. The matrix of elasticity of the layer i ($i = 1, \dots, n$) contains material parameters: Young's modulus E_i and Poisson's ratio ν_i .

The internal strain energy of the analysed solid, including the equations defined above, can be written as follows:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (2)$$

where: \mathbf{q} – displacement vector, \mathbf{K} – global stiffness matrix.

The stiffness matrix \mathbf{K} is defined as the sum of the stiffness matrices of individual elements \mathbf{K}_e . Stiffness matrices of developed multi-layer elements are calculated by integrating functions of internal strain energy in subspaces according to the general relationship given in the form:

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_1} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{B}^T dV + \dots + \int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{B} dV + \dots + \int_{V_n} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{B} dV. \quad (3)$$

Modifications of the geometric parameters of the derived elements allow to generate the actual structure of the model. They also enable control of the numerical model being built in terms of coherence of adjacent elements, generation of heterogeneous regions and degraded zones.

In order to assess a safety of the structure, determine zones of failure in materials and structures and to identify damage propagation and degradation mechanisms, strength criteria are used. They are functions of stresses or strains formulated analytically and verified by results of strength tests [11]. The safe state of stress is defined by inequality:

$$F(\sigma_{ij}, c_m) < 0, \quad (4)$$

and c_m is the material parameters. The Rankine criterion is used up to now to determine the initiation of damage of non-symmetrical materials with respect to tension and compression. Since the destruction of such materials depends on the value of the average stress,

naprężenia średniego, hipoteza Coulomba-Mohra także znajduje zastosowanie do analizy wyęczenia tego rodzaju materiałów. Stosowana jest również do określania wyęczenia w warstwach stykowych. W przypadku połączeń płaszczyna naprężeń jest określona, a kryterium w klasycznej postaci zapisuje się równaniem:

$$|\tau| = c - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi < R_s. \quad (5)$$

W warstwach można stosować ogólne kryterium wyęczenia z możliwością zastosowania do materiałów niesymetrycznych podane przez Christensena [2]. Wyęczenie w pobliżu styku materiałów dodatkowo kontroluje się stosując kryterium Coulomba-Mohra.

Etapową symulację komputerową procesu degradacji realizuje się według algorytmu zilustrowanego na rycinie 3.

Propagację uszkodzeń wyznacza się iteracyjnie, poszukując równowagi układu w każdym przyroście obciążenia, posługując się sieczną macierzą sztywności w układzie równań równowagi postaci:

$$\mathbf{K}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i \quad (6)$$

gdzie \mathbf{K}_i jest macierzą sztywności modelowanego ośrodka, \mathbf{Q}_i wektorem obciążenia, \mathbf{q}_i wektorem niewiadomych przemieszczeń węzłów modelu w kroku i iteracji.

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Technika komputerowa i symulacje numeryczne stanowią alternatywę dla tradycyjnych metod w analizie zabytkowych konstrukcji złożonych. Wielokryterialna analiza numeryczna dostarcza informacji odnośnie do bezpieczeństwa obiektów budowlanych i elementów uległych procesom degradacji. Zaproponowany sposób analizy wyęczenia niejednorodnych struktur materiałowych z wykorzystaniem wielowarstwowych elementów skończonych uwiarygadnia analizę w odniesieniu do fizyki zjawisk wywołanych degradacją. Podejście umożliwia modelowanie ośrodków oraz wyznaczenie stref wyęczenia w materiałach i strukturach złożonych z materiałów niesymetrycznych z zastosowaniem standardowych hipotez wyęceniowych. Praktyczne zastosowanie modelu umożliwia analizę stref interakcji, w tym obiektów murowych i ich rekonstrukcji oraz wzmocnień (ryc. 4). Pozwala wyznaczyć stan naprężeń w konstrukcjach i elementach w stanie przed jak i po wykonaniu wzmocnień w których zastosowano nowoczesne materiały i technologie. Opracowany komputerowy algorytm analizy propagacji uszkodzenia umożliwia identyfikację mechanizmów rozprzestrzeniania się degradacji struktur konstrukcji.

Badania zrealizowano w ramach pracy S/WBiIS/1/18 i sfinansowano ze środków na naukę MNiSW.

the Coulomb-Mohr criterion is also applicable in the analysis of damage of this kind of materials. It is also used to determine the failure in contact layers. In the case of joints, the plane of stresses is determined by surface of adhesion, and the criterion in the classical form is given by the equation:

$$|\tau| = c - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi < R_s. \quad (5)$$

In layers, the general failure criteria applicable to asymmetrical materials can be used, e.g. given by Christensen [2]. Stress near the material joint is additionally monitored using the Coulomb-Mohr criterion. The stepwise computer numerical simulation of the degradation process is carried out according to the algorithm illustrated in figure 3.

Propagation of damage is determined iteratively, seeking the balance of the body in each load increment, using the secant stiffness matrix in a system of equilibrium equations in the form:

$$\mathbf{K}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i \quad (6)$$

where: \mathbf{K}_i is the stiffness matrix of the modelled body, \mathbf{Q}_i is the vector of the load, \mathbf{q}_i is the vector of the unknown displacements of the model nodes in the step i of iteration.

4. SUMMARY AND CONCLUSIONS

Computer technology and numerical simulations in addition to traditional methods are an alternative in the analysis of historical complex structures. Multi-criterial numerical analysis provides information on the safety of buildings and members subjected to degradation processes. The proposed method of analysis the strength of inhomogeneous material structures with the use of multi-layer finite elements gives credibility to the analysis in relation to the physics of phenomena caused by degradation. The approach enables modelling and determination of stress concentration zones in materials and structures composed of asymmetrical materials, using standard strength criteria. The practical application of the model enables analysis of interaction zones in masonry structures, their reconstruction and strengthening (fig. 4). It allows to determine the state of stresses in structures and elements before and after the strengthening in which modern engineering materials and technologies were applied. The developed computer algorithm allows identification of damage propagation mechanisms and degradation of structures.

The paper was realized as a part of BUT project No S/WBiIS/1/18 and was financed by MNiSW of Poland.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] Bednarz Ł.J., Jasięko J., Rutkowski M., Nowak T.P. Strengthening and long-term monitoring of the structure of an historical church presbytery. *Engineering Structures* 2014;81:62–75.
- [2] Christensen R.M. A comprehensive theory of yielding and failure for isotropic materials. *Journal of Engineering Materials and Technology, ASME* 2007;129(2):173–181.
- [3] Krentowski J., Chyży T., Dunaj P. Sudden collapse of a 19th-century masonry structure during its renovation process. *Engineering Failure Analysis* 2017;82:540–553.
- [4] Lemos J. Discrete element modeling of masonry structures. *International Journal of Architectural Heritage: Conservation, Analysis, and Restoration* 2007;1(2):190–213.
- [5] Lourenço P.B., Oliveira D.V., Milani G. Computational advances in masonry structures: from mesoscale modelling to engineering application. In: Topping B.H.V., Adam J.M., Pallarés F.J., Bru R., Romero M.L (eds) *Developments and Applications in Computational Structures Technology*, Saxe-Coburg Publications, UK, Stirlingshire, 2010.
- [6] Massart T.J., Kouznetsova V., Peerlings R.H.J., Geers M.G.D. Computational homogenization for localization and damage. In: Vaz M. Jr, de Souza Neto E.A., Muñoz-Rojas P.A. (eds) *Advanced computational materials modeling. From classical to multi-scale techniques*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2011.
- [7] Miedziałowski C., Szkobodziński M. Stan techniczny i kierunki prac naprawczych zabytkowej konstrukcji budynku kościoła pw. Wniebowzięcia Najświętszej Maryi Panny w Białymstoku. *Civil and Environmental Engineering* 2016;7(1):33–37.
- [8] Roca P., Cervera M., Pelá L., Clemente R., Chiumenti M. Continuum FE models for the analysis of Mallorca Cathedral. *Engineering Structures* 2013;46:653–670.
- [9] Willam K., Rhee I., Shing B. Interface damage model for thermomechanical degradation of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004;193:3327–3350.
- [10] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method, Vol. 1: The basis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [11] Życzkowski M. *Combined loadings in the theory of plasticity*. PWN–Polish Scientific Publisher, Warszawa, 1981.

Streszczenie

Obiekty budowlane podlegają oddziaływaniom różnorodnych obciążeń, wpływom środowiska i klimatu, których efektem są zmiany parametrów wytrzymałościowych zastosowanych materiałów oraz degradacja struktur konstrukcji. W trakcie eksploatacji następują zmiany funkcji budowli, prowadzone są renowacje, naprawy lub realizowane wzmocnienia poprzedzone identyfikacją sił i naprężeń. W pracach tych, obok tradycyjnych, stosuje się nowoczesne metody i technologie napraw, wprowadzając warstwowe materiały i połączenia adhezyjne o wysokiej wytrzymałości. Cechą materiałów warstwowych jest realizacja połączeń, styków między poszczególnymi warstwami. W pracy zaprezentowano praktyczny sposób modelowania i oceny stanu naprężeń w konstrukcjach i elementach zdegradowanych lub wzmocnianych, wykorzystując analizy komputerowe. Opracowany model bazuje na metodzie elementów skończonych znacząco redukując liczbę niewiadomych i umożliwiając praktyczną analizę zagadnień konstrukcyjnych. Model może być zastosowany w identyfikacji stanu naprężeń przy projektowaniu wzmocnień napraw i rewaloryzacji konstrukcji.

Abstract

Buildings are permanently subjected to various types of loads, impact of the environment and climatic factors, which result in changes of strength parameters of materials used and degradation of structures. During life cycle, changes in functions of buildings take place, renovations, repairs or strengthening are carried out preceded by identification of forces and stresses. In addition to the traditional ones, modern methods and technologies of repairs are used, introducing layered materials and adhesive joints with high strengths. A feature of layered materials is the implementation of connections, and contacts of individual layers. The paper presents a practical method of modelling and assessing the state of stress in structures and degraded or strengthened elements using computer analyses. The developed model on the basis of the finite element method, significantly reduces the number of unknowns and enables practical application for analyses of structural problems. The model can be used to identify the state of stress when designing strengthening, repairs and conservation of structures.