

Analiza właściwości dynamicznych wybranych podstawowych członów automatyki niecałkowitych rzędów

JEL: L97 DOI: 10.24136/atest.2018.443
 Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W artykule przedstawiono zastosowanie rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów (ang. *fractional calculus*) do opisu dynamiki zjawisk wybranych podstawowych członów automatyki. Dla analizowanych modeli, wyznaczono transmitancję operatorową całkowitego i niecałkowitego rzędu. Wyznaczono zależności opisujące charakterystyki czasowe i częstotliwościowe; na drodze symulacji komputerowej uzyskano charakterystyki analizowanych układów. Do badań symulacyjnych wykorzystano oprogramowanie MATLAB.

Słowa kluczowe: rachunek różniczkowy niecałkowitych rzędów, transmitancja operatorowa, podstawowe człony automatyki.

Wstęp

Podczas analizy elementów układów automatycznej regulacji UAR spotyka się elementy o różnej naturze fizycznej, takie jak elementy elektryczne, mechaniczne, pneumatyczne, hydrauliczne, itp., ale opisane takimi samymi liniami równań różniczkowych [4]. Takie elementy nazywa się wówczas *podstawowymi członami automatyki*. Człon podstawowy przetwarza wprowadzony do niego sygnał wejściowy na sygnał wyjściowy w sposób elementarny. Przetwarzanie elementarne oznacza, między innymi, realizację podstawowych funkcji matematycznych, takich jak: mnożenie przez stały współczynnik, różniczkowanie czy całkowanie.

Dynamiczny rozwój badań w ostatnim dziesięcioleciu nad zastosowaniem rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów (ang. *fractional calculus* lub franc. *analyse fractionnaire*) w analizie układów dynamicznych skłonił autorów artykułu do podjęcia próby jego zastosowania do modelowania podstawowych członów automatyki, które dotychczas były opisywane „klasyczną” analizą matematyczną [11] oraz [15].

Dowolny układ automatycznej regulacji UAR można przedstawić jako połączenie członów podstawowych. Wprowadzenie członów podstawowych znacznie ułatwia analizę bądź syntezę układów automatyki, bez względu na ich naturę fizyczną.

W artykule przedstawiono zastosowanie rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów do opisu podstawowych członów automatyki, takich jak:

- człon inercyjny pierwszego rzędu;
- człon całkujący idealny;
- człon całkujący rzeczywisty;
- człon różniczkujący idealny;
- człon różniczkujący rzeczywisty;

Każdy z ww. członów automatyki został opisany za pomocą równania różniczkowego o pochodnych niecałkowitego rzędu, z których wyprowadzone zostały zależności opisujące charakterystyki czasowe (impulsowa i skokowa) oraz transmitancji operatorowej i widmowej. [3], [11], [13] oraz [15]. W artykule pokazano również charakterystyki amplitudowo – fazowe oraz logarytmiczne charakterystyk Bodego (amplitudowe i fazowe) członów elementarnych. Do badań symulacyjnych wykorzystano oprogramowanie MATLAB [16], [17] oraz [18].

Autorzy artykułu pragną podkreślić, że ww. sposób opisu podstawowych elementów automatyki chociaż jest już znany w literaturze [3], [15], to brakuje szczegółowego wyprowadzenia równań opisujących ich dynamikę. Ponadto, tak opisane podstawowe elementy automatyki stanowią podstawę do budowy układów pneumatycznych dowolnych rzędów, co leży w obszarze zainteresowań naukowych autorów artykułu [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], oraz [14].

1. Człon inercyjny i rzędu

Element inercyjny I rzędu opisany jest równaniem różniczkowym z pochodną niecałkowitego rzędu [4], [9], [11]:

$$T_0^{RL} D_t^\nu y(t) + y(t) = Kx(t) \quad (1)$$

gdzie: RL – notacja pochodnej Reimanna-Liouville’a; $0 < T \in R_+$, $y(t) = 0$ dla $t < 0$, rząd niecałkowity $\nu > 0$

Stosując przekształcenie Laplace’a do równania (1), dla zerowych warunków początkowych, otrzymuje się:

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts^\nu + 1} \quad (2)$$

Odpowiedź impulsowa członu inercyjnego I rzędu opisanego transmitancją operatorową (2), opisuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G^{(\nu)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts^\nu + 1}\right\} = \frac{K}{T} t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) \quad (3)$$

Przy wyznaczaniu odwrotnej transformaty Laplace’a w równaniu (3) uzyskano:

$$E_{\nu,\nu}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right)^k}{\Gamma(\nu k + \nu)} \quad (4)$$

Otrzymano ostatecznie zależność opisującą odpowiedź impulsową członu inercyjnego I rzędu:

$$g^{(\nu)}(t) = \frac{K}{T} t^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu)} \quad (5)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (3) wynika:

$$g^{(1)}(t) = \frac{K}{T} E_{1,1}\left(-\frac{t}{T}\right) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (6)$$

a więc, powszechnie znane w literaturze wyrażenie opisujące charakterystykę impulsową członu inercyjnego I rzędu.

Poniżej przedstawiono odpowiedź elementu inercyjnego I rzędu na wymuszenie $I(t)$. Transformata Laplace’a odpowiedzi jednostkowej wyniesie:

$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} G^{(\nu)}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(Ts^\nu + 1)}\right\} = \frac{K}{T} t^\nu E_{\nu,\nu+1}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) \quad (7)$$

Dla:

$$E_{\nu, \nu+1} \left(-\frac{1}{T} t^\nu \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{T} t^\nu \right)^k}{\Gamma(\nu k + \nu + 1)} \quad (8)$$

otrzymując ostatecznie zależność opisującą odpowiedź skokową członu inercyjnego I rzędu:

$$h^{(\nu)}(t) = \frac{K}{T} t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu + 1)} \quad (9)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (7) wynika:

$$h^{(1)}(t) = \frac{K}{T} t E_{1,2} \left(-\frac{t}{T} \right) = -K \left(e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (10)$$

a więc powszechnie znana zależność definiująca charakterystykę skokową członu inercyjnego I rzędu.

Aby przedstawić charakterystyki częstotliwościowe, należy wyznaczyć transmitancję widmową niecałkowitego rzędu badanego członu. W tym celu podstawia się zależność (11):

$$s = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (11)$$

do wzoru (2) i otrzymuje się:

$$G^{(\nu)}(j\omega) = \frac{K}{T(j\omega)^\nu + 1} = \frac{K}{T\omega^\nu e^{j\frac{\nu\pi}{2}} + 1} = \frac{K}{T\omega^\nu \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right] + 1} \quad (12)$$

Po elementarnych przekształceniach oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

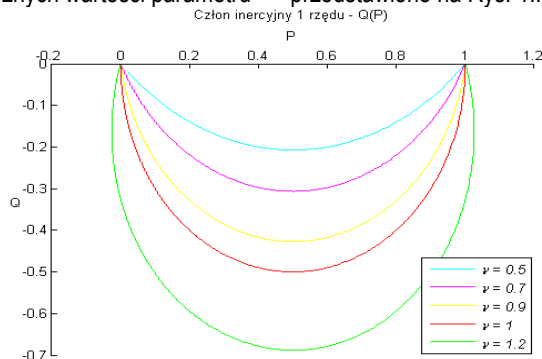
$$G^{(\nu)}(j\omega) = P^{(\nu)}(\omega) + jQ^{(\nu)}(\omega) \quad (13)$$

gdzie:

$$P^{(\nu)}(\omega) = \frac{K \left[T\omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + 1 \right]}{\left[T\omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[T\omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (14a)$$

$$Q^{(\nu)}(\omega) = -\frac{KT\omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{\left[T\omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[T\omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (14b)$$

Ze wzorów (14) wyznacza się charakterystykę amplitudowo – fazową (Nyquista) członu inercyjnego I rzędu. Przebiegi charakterystyk dla różnych wartości parametru ν przedstawiono na Rys. 1.:



Rys. 1. Charakterystyki amplitudowo – fazowe niecałkowitego rzędu członu inercyjnego I rzędu dla parametrów K i $T=1$ dla $\nu \in (0,5 \div 1,2)$ [opracowanie własne]

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (14) wynika:

$$P^{(1)}(\omega) = \frac{K}{1 + (T\omega)^2} \quad (15a)$$

$$Q^{(1)}(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + (T\omega)^2} \quad (15b)$$

a więc powszechnie spotykane w literaturze zależności definiujące charakterystykę amplitudowo – fazową członu inercyjnego I rzędu.

Ze wzorów (14) wyznacza się zależności definiujące:

logarytmiczną charakterystykę amplitudową analizowanego członu dynamicznego:

$$L^{(\nu)}(\omega) = 20 \log \left[G^{(\nu)}(j\omega) \right] = 20 \log \sqrt{\left[P^{(\nu)}(\omega) \right]^2 + \left[Q^{(\nu)}(\omega) \right]^2} \quad (16)$$

logarytmiczną charakterystykę fazową analizowanego członu dynamicznego:

$$\varphi^{(\nu)}(\omega) = \arctg \left(\frac{Q^{(\nu)}(\omega)}{P^{(\nu)}(\omega)} \right) = -\arctg \frac{T\omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + 1} \quad (17)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzorów (16) i (17) wynika:

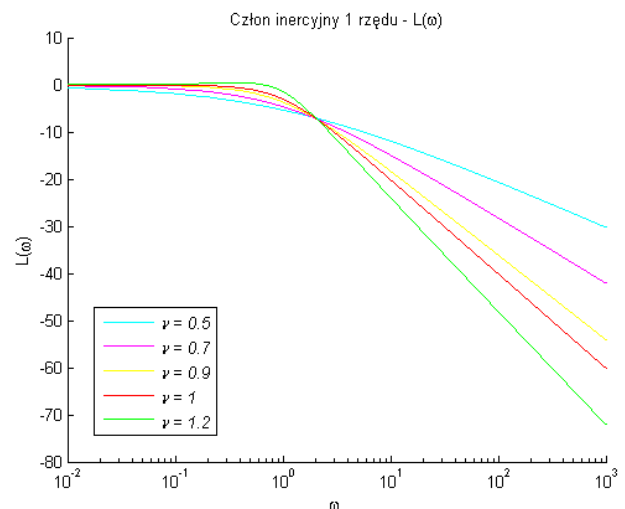
$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log \sqrt{\frac{K^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2} + \frac{K^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2}} \quad (18)$$

$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + (T\omega)^2} \quad (19)$$

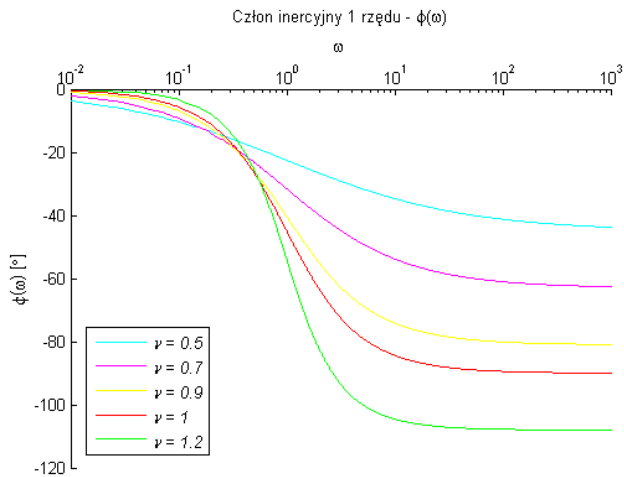
$$\varphi^{(1)}(\omega) = -\arctg T\omega$$

a więc znane w literaturze zależności definiujące częstotliwościowe charakterystyki logarytmiczne Bodego (amplitudową i fazową) członu inercyjnego I rzędu.

Przebiegi charakterystyk Bodego członu inercyjnego I rzędu opisane za pomocą rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów zostały pokazane na Rys. 2. oraz Rys. 3.:



Rys. 2. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe członu inercyjnego I rzędu dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]



Rys. 3. Logarytmiczne charakterystyki fazowe członu inercyjnego I rzędu dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe członu inercyjnego I rzędu, wyznaczone za pomocą symulacji komputerowej poprawnie odzwierciedlają dynamikę układu. Dla parametru $\nu = 1$ logarytmiczna charakterystyka amplitudowa (Rys. 2.) ma nachylenie -20 dB na dekadę dla pulsacji większej od pulsacji rezonansowej, tak jak jest w logarytmicznej charakterystyce amplitudowej wyznaczonej z transmitancji operatorowej całkowitego rzędu. Logarytmiczna charakterystyka fazowa (Rys. 3.) niecałkowitego rzędu dla parametru $\nu = 1$ przebiega dokładnie tak jak logarytmiczna charakterystyka fazowa wyznaczona z transmitancji operatorowej całkowitego rzędu. Nachylenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej jest tym mniejsze, im mniejszy jest rząd różniczkowy w równaniu różniczkowym niecałkowitego rzędu opisującym badany człon inercyjny. Przesunięcie fazowe zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem się rzędu różniczkowego.

2. Człon całkujący idealny

Element całkujący idealny opisany jest równaniem różniczkowym z pochodnymi niecałkowitego rzędu:

$$T_0^{RL} D_t^\nu y(t) = Kx(t) \tag{20}$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (20), dla zerowych warunków początkowych, otrzymuje się:

$$Ts^\nu Y(s) = KX(s) \tag{21}$$

Z równania (21) wyznacza się transmitancję operatorową członu całkującego idealnego rzędu ν :

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts^\nu} \tag{22}$$

Odpowiedź impulsowa członu całkującego idealnego opisanego transmitancją operatorową (22), opisuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G^{(\nu)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts^\nu}\right\} = \frac{Kt^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \tag{23}$$

Przy wyznaczaniu odwrotnej transformaty Laplace'a w równaniu (23) dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (23) wynika:

$$g^{(1)}(t) = \frac{K}{T} \cdot I(t) \tag{24}$$

a więc powszechnie znane wyrażenie definiujące charakterystykę impulsową członu całkującego idealnego.

Na Rys. 4., pokazane zostały odpowiedzi impulsowe dla rzędu z przedziału $[0,5 \dots 1,2]$.

Odpowiedź impulsowa członu całkującego idealnego wyznaczona z równania (23) dla parametru $\nu = 1$ (Rys. 4) pokrywa się z odpowiedzią impulsową wyznaczoną z równania różniczkowego zwyczajnego []. Potwierdza to prawidłowość wyznaczonego modelu.

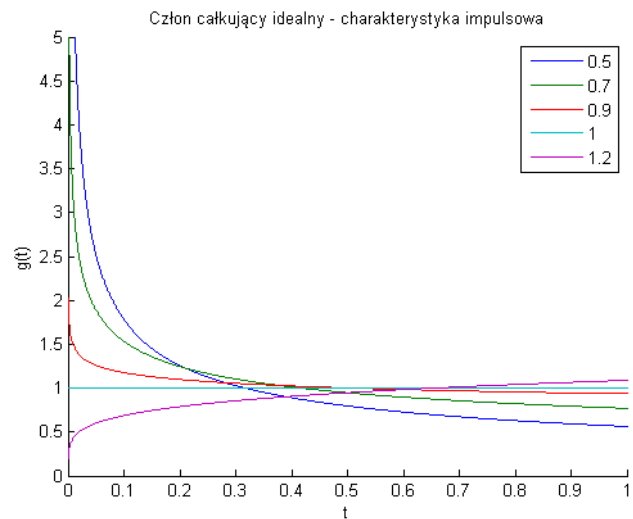
Odpowiedź skokową definiuje zależność:

$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{I}{s}G^{(\nu)}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts^{\nu+1}}\right\} = \frac{Kt^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \tag{25}$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (25) wynika:

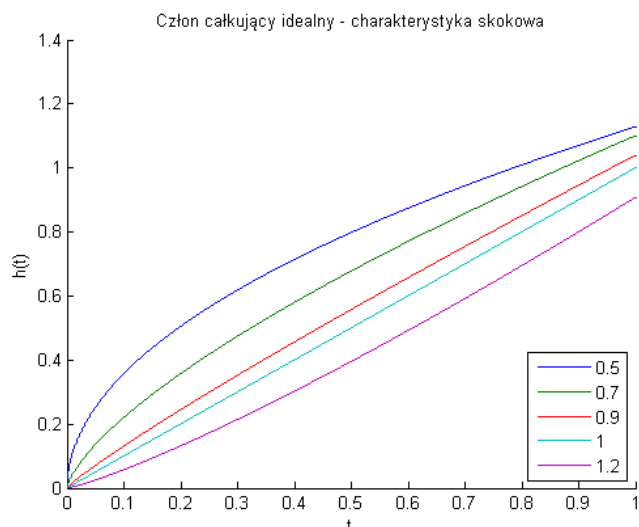
$$h^{(1)}(t) = \frac{K}{T} \cdot t \tag{26}$$

a więc powszechnie znane wyrażenie definiujące charakterystykę skokową członu całkującego idealnego.



Rys. 4. Odpowiedzi impulsowe elementu całkującego idealnego dla rzędów $[0,5 \dots 1,2]$ oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Poniżej, na Rys. 5. pokazane zostały odpowiedzi skokowe dla rzędu z przedziału $[0,5 \dots 1,2]$:



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe elementu całkującego idealnego dla rzędów $[0,5 \dots 1,2]$ oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Wyznaczona odpowiedź skokowa (Rys. 5.) dla parametru $\nu = 1$, pokrywa się z odpowiedzią skokową wyznaczoną metodą

klasyczną. Potwierdza to prawidłowe jej wyznaczenie. Zmniejszając rząd różniczki układ nabiera charakteru członu inercyjnego I rzędu, zwiększając rząd różniczki członu całkującego rzeczywistego.

Podstawiając zależność (11) do wzoru (22), otrzymuje się transmitancję widmową idealnego członu całkującego:

$$G^{(\nu)}(j\omega) = \frac{K}{T\omega^\nu \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]} \quad (27)$$

Po elementarnych przekształceniach oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

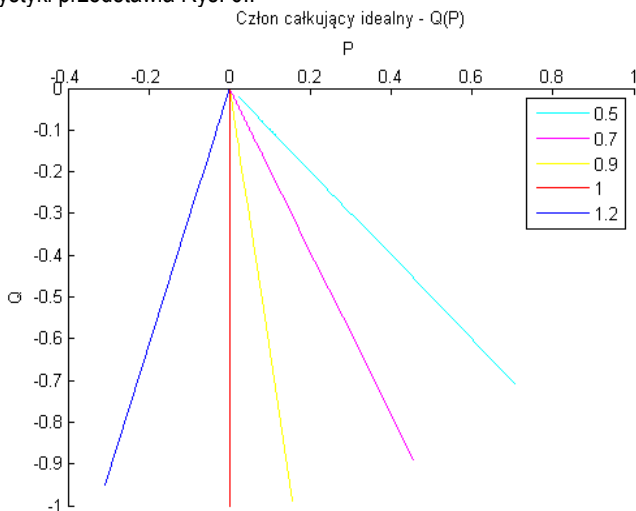
$$G^{(\nu)}(j\omega) = P^{(\nu)}(\omega) + jQ^{(\nu)}(\omega) \quad (28)$$

gdzie:

$$P^{(\nu)}(\omega) = \frac{K \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu} \quad (29a)$$

$$Q^{(\nu)}(\omega) = -\frac{K \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu} \quad (29b)$$

Z wzorów (29) wyznacza się charakterystykę amplitudowo – fazową (Nyquista) idealnego członu całkującego. Przebieg charakterystyki przedstawia Rys. 6.:



Rys. 6. Charakterystyki amplitudowo – fazowe członu całkującego idealnego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Nachylenie charakterystyki amplitudowo – fazowej zależy tylko od wartości rzędu elementu i nie zależy od stałej czasowej. Tą właściwość wykorzystuje się do projektowania układów zamkniętych odpornych na zmianę parametrów obiektu, przy zastosowaniu regulatorów $PI(\nu)D(\mu)$, w którym zarówno człon całkujący, jak i różniczkujący może być niecałkowitego rzędu). Właściwość ta wynika z analizy wzorów (4.29), gdyż można zapisać:

$$Q^{(\nu)}(\omega) = -tg\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)P^{(\nu)}(\omega) \quad (30)$$

We wzorze (30) nie występuje stała czasowa, tylko rząd pochodno – całki.

Ze wzorów (29) wyznacza się równania opisujące przebiegi charakterystyk częstotliwościowych Bodego:

logarytmicznej charakterystyki amplitudowej:

$$L^{(\nu)}(\omega) = 20 \log |G^{(\nu)}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left[\frac{K \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu} \right]^2 + \left[\frac{K \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu} \right]^2} \quad (31)$$

$$L^{(\nu)}(\omega) = -20 \log \frac{T}{K} \omega^\nu = -20 \log \frac{T}{K} - 20\nu \log \omega$$

logarytmicznej charakterystyki fazowej:

$$\varphi^{(\nu)}(\omega) = \arctg\left(\frac{Q^{(\nu)}(\omega)}{P^{(\nu)}(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{-\frac{K \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu}}{\frac{K \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{T\omega^\nu}}\right) = -\arctg\left[\tg\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right] = -\frac{\nu\pi}{2} \quad (32)$$

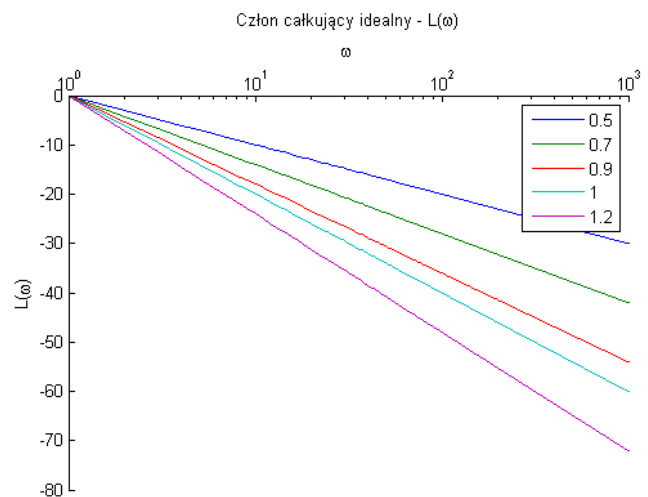
Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzorów (31) i (32) wynika:

$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log \frac{K}{T} - 20 \log \omega \quad (33a)$$

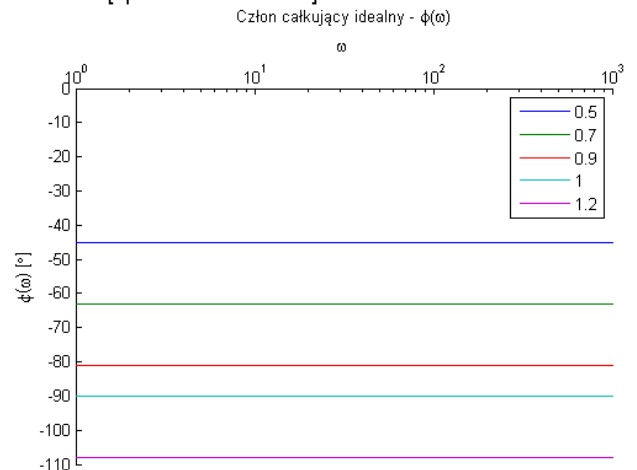
$$\varphi^{(1)}(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (33b)$$

a więc powszechnie znane zależności definiujące częstotliwościowe charakterystyki logarytmiczne Bodego (amplitudową i fazową) idealnego członu całkującego.

Przebiegi charakterystyk Bodego idealnego członu całkującego opisane za pomocą rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów zostały pokazane na Rys. 7. oraz Rys. 8.:



Rys. 7. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe idealnego członu całkującego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]



Rys. 8. Logarytmiczne charakterystyki fazowe idealnego członu całkującego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Na Rys. 7. oraz Rys. 8. widać, że logarymiczna charakterystyka amplitudowa dla parametru $\nu = 1$ ma nachylenie -20 dB na dekadę, a logarymiczna charakterystyka fazowa $\varphi = -90^\circ$. Przebiegi logarymicznych charakterystyk częstotliwościowych członu całkującego idealnego wyznaczone z równania różniczkowego całkowitego rzędu, pokrywają się z przedstawionymi na Rys. 7. oraz Rys. 8. dla parametru $\nu = 1$. Zmniejszając rząd różniczki zmniejsza się spadek wzmocnienia, zwiększając rząd różniczki spadek wzmocnienia zwiększa się. Można więc wywnioskować, że spadek wzmocnienia zależy tylko od rzędu różniczki. Na logarymicznej charakterystyce fazowej widać, że przesunięcie fazowe zależy od rzędu różniczki. Zwiększając rząd zwiększa się przesunięcie fazowe układu i odwrotnie.

3. Człon całkujący rzeczywisty

Element całkujący rzeczywisty opisany jest równaniem różniczkowym o pochodnych niecałkowitego rzędu:

$$Kx(t) = T_0^{RL} D_t^{2\nu} y(t) + {}^{RL} D_t^\nu y(t) \quad (34)$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (34), dla zerowych warunków początkowych, otrzymuje się:

$$KX(s) = Ts^{2\nu} Y(s) + s^\nu Y(s) \quad (35)$$

Z równania (35) wyznacza się transmitancję operatorową członu całkującego rzeczywistego rzędu ν :

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts^{2\nu} + s^\nu} = \frac{K}{s^\nu(I + Ts^\nu)} \quad (36)$$

Odpowiedź impulsowa członu całkującego rzeczywistego opisanego transmitancją operatorową (36), opisuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G^{(\nu)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^\nu(I + Ts^\nu)}\right\} \quad (37)$$

Przeprowadzając rozkład na ułamki proste:

$$\frac{K}{s^\nu(I + Ts^\nu)} = \frac{A}{s^\nu} + \frac{B}{I + Ts^\nu} \quad (38)$$

i obliczając współczynniki A i B:

$$\begin{cases} A = K \\ B = -KT \end{cases} \quad (39)$$

otrzymuje się:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^\nu} - \frac{KT}{I + Ts^\nu}\right\} = \frac{Kt^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} - Kt^{\nu-1} E_{\nu,\nu}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) \quad (40)$$

Przyjmując ($\alpha = \beta = \nu$):

$$E_{\nu,\nu}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right)^k}{\Gamma(\nu k + \nu)} \quad (41)$$

Otrzymuje się ostatecznie zależność opisującą odpowiedź impulsową członu całkującego rzeczywistego:

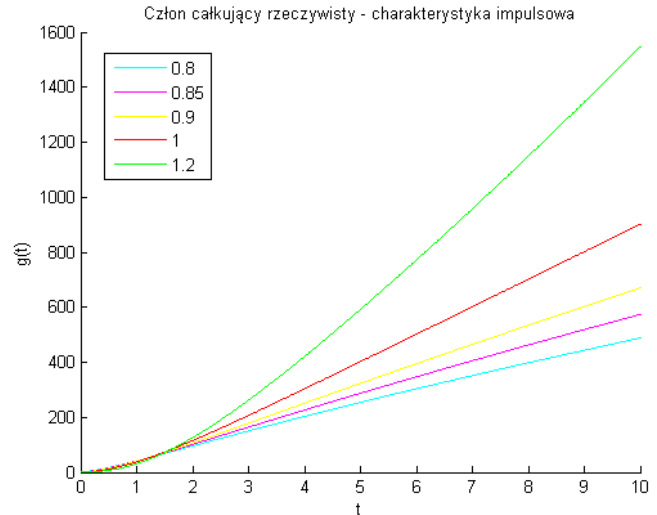
$$g^{(\nu)}(t) = \frac{Kt^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} - Kt^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu)} \quad (42)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, wynika:

$$g^{(1)}(t) = K - KE_{1,1}\left(-\frac{t}{T}\right) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (43)$$

a więc powszechnie znana zależność definiująca charakterystykę impulsową członu całkującego rzeczywistego.

Na Rys. 9., pokazane zostały odpowiedzi impulsowe dla rzędu z przedziału $[0,8 \dots 1,2]$.



Rys. 9. Odpowiedzi impulsowe elementu całkującego rzeczywistego dla rzędów $[0,8 \dots 1,2]$ oraz parametrów k i $T=1$ [opracowanie własne]

Odpowiedź skokową wyznacza się z zależności:

$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G^{(\nu)}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^{\nu+1}(I + Ts^\nu)}\right\} \quad (44)$$

Po przeprowadzeniu rozkładu na ułamki proste otrzymuje się:

$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^{\nu+1}} - \frac{KT}{Ts\left(\frac{1}{T} + s^\nu\right)}\right\} = \frac{Kt^\nu}{\Gamma(\nu+1)} - Kt^\nu E_{\nu,\nu+1}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) \quad (45)$$

Przyjmując ($\alpha = \nu$; $\beta = \nu + 1$):

$$E_{\nu,\nu+1}\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{T}t^\nu\right)^k}{\Gamma(\nu k + \nu + 1)} \quad (46)$$

Otrzymuje się ostatecznie zależność opisującą odpowiedź skokową członu całkującego rzeczywistego:

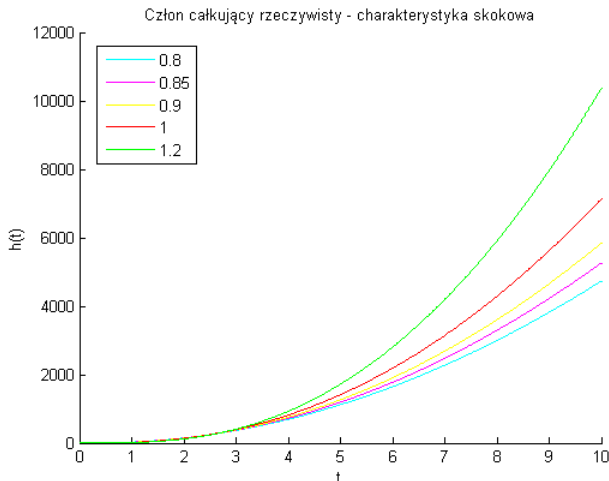
$$h^{(\nu)}(t) = \frac{Kt^\nu}{\Gamma(\nu+1)} - Kt^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu + 1)} \quad (47)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (45) wynika:

$$h^{(1)}(t) = Kt - KE_{1,2}\left(-\frac{t}{T}\right) = Kt - Kt\left[\frac{e^{-\frac{t}{T}} - 1}{-\frac{t}{T}}\right] = K\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right] \quad (48)$$

a więc znana zależność [46], [82], [83] definiująca charakterystykę skokową członu całkującego rzeczywistego.

Na Rys. 10. pokazane zostały odpowiedzi skokowe dla rzędu z przedziału $[0,2 \dots 1]$.



Rys. 10. Odpowiedzi skokowe elementu całkującego rzeczywistego dla rzędów [0,2...1] oraz parametrów k i T=1 [opracowanie własne]

Podstawiając zależność (11) do wzoru (36), otrzymuje się transmitancję widmową rzeczywistego członu całkującego:

$$G^{(\nu)}(j\omega) = \frac{K}{\omega^\nu \left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right] \left[1 + T\omega^\nu \left(\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right) \right]} \quad (49)$$

Po elementarnych przekształceniach oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

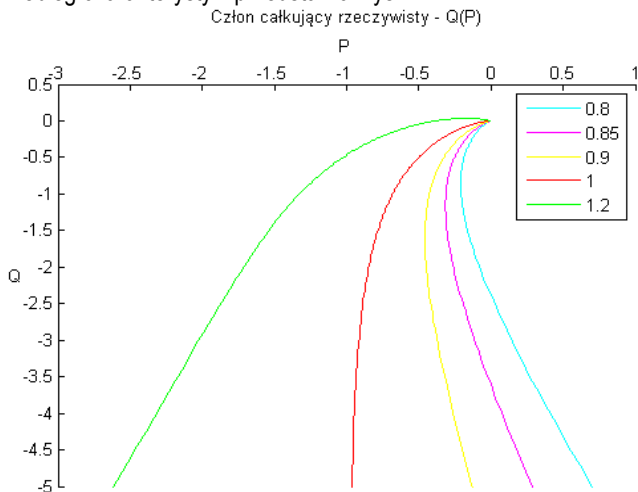
$$G^{(\nu)}(j\omega) = P^{(\nu)}(\omega) + jQ^{(\nu)}(\omega) \quad (50)$$

gdzie:

$$P^{(\nu)}(\omega) = \frac{K \left[T\omega^{2\nu} \cos^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - T\omega^{2\nu} \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]}{\left[T\omega^{2\nu} \cos^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - T\omega^{2\nu} \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2 + \left[2T\omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (51a)$$

$$Q^{(\nu)}(\omega) = -\frac{K \left[2T\omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]}{\left[T\omega^{2\nu} \cos^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - T\omega^{2\nu} \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2 + \left[2T\omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \omega^{2\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (51b)$$

Z wzorów (51a) oraz (51b) wyznacza się charakterystykę amplitudowo – fazową (Nyquista) członu całkującego rzeczywistego. Przebieg charakterystyki przedstawia Rys. 11.:



Rys. 11. Charakterystyki amplitudowo – fazowe członu całkującego rzeczywistego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów k i T=1 [opracowanie własne]

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (51) wynika:

$$P^{(1)}(\omega) = \frac{-KT\omega^2}{T^2\omega^4 + \omega^2} = -\frac{KT}{T^2\omega^2 + 1} \quad (52a)$$

$$Q^{(1)}(\omega) = -\frac{K\omega}{T^2\omega^4 + \omega^2} = -\frac{K}{\omega(T^2\omega^2 + 1)} \quad (52b)$$

a więc powszechnie znane zależności [definiujące charakterystykę amplitudowo – fazową członu całkującego rzeczywistego.

Ze wzorów (51a) oraz (51b) wyznacza się równania opisujące przebiegi charakterystyk częstotliwościowych Bodego:

logarytmicznej charakterystyki amplitudowej:

$$L^{(\nu)}(\omega) = 20 \log |G^{(\nu)}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{[P^{(\nu)}(\omega)]^2 + [Q^{(\nu)}(\omega)]^2} \quad (53)$$

logarytmicznej charakterystyki fazowej:

$$\varphi^{(\nu)}(\omega) = \arctg\left(\frac{Q^{(\nu)}(\omega)}{P^{(\nu)}(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{-\left[2T\omega^\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]}{T\omega^\nu \cos^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - T\omega^\nu \sin^2\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}\right) \quad (54)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzorów (53) i (54) wynika:

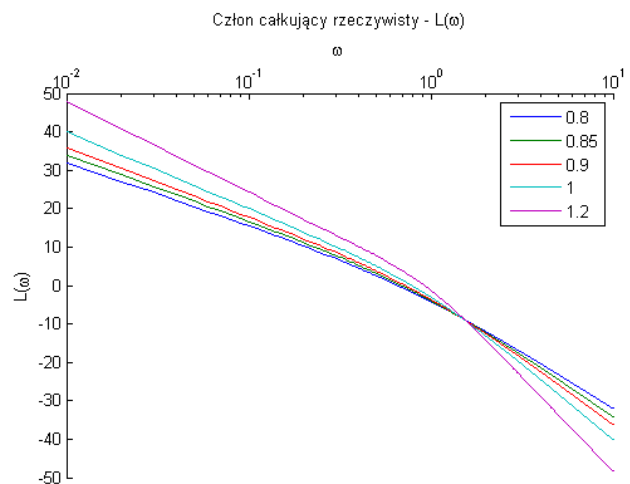
$$L^{(1)}(\omega) = -20 \log \sqrt{\left[\frac{-KT\omega^2}{(-T\omega^2)^2 + \omega^2}\right]^2 + \left[\frac{-K\omega}{(-T\omega^2)^2 + \omega^2}\right]^2} \quad (55a)$$

$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

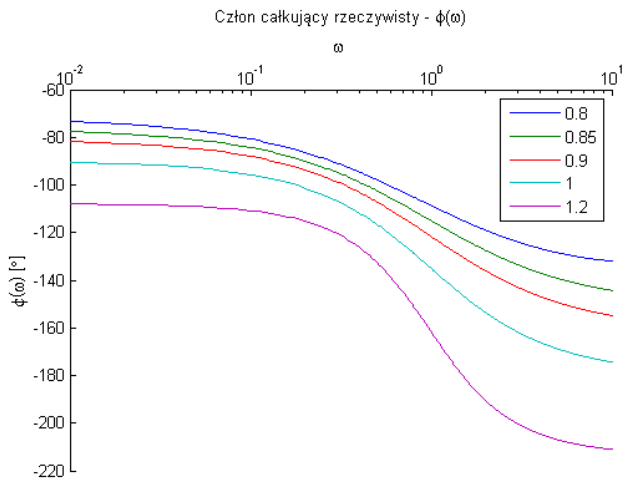
$$\varphi^{(1)}(\omega) = \arctg\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctg\left(\frac{1}{T\omega}\right) = -\arctg\omega T - \frac{\pi}{2} \quad (55b)$$

a więc powszechnie znane zależności definiujące częstotliwościowe charakterystyki logarymiczne Bodego (amplitudową i fazową) rzeczywistego członu całkującego.

Przebiegi charakterystyk Bodego rzeczywistego członu całkującego opisane za pomocą rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów zostały pokazane na Rys. 12. oraz Rys. 13.:



Rys. 12. Logarymiczne charakterystyki amplitudowe rzeczywistego członu całkującego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i T=1 [opracowanie własne]



Rys. 13. Logarymiczne charakterystyki fazowe rzeczywistego członu całkującego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Logarymiczne charakterystyki częstotliwościowe członu całkującego rzeczywistego, poprawnie odzwierciedlają dynamikę układu.

Dla parametru $\nu = 1$ logarymiczna charakterystyka amplitudowa ma nachylenie -20 dB na dekadę dla pulsacji większej od pulsacji rezonansowej, a więc tak jak jest w znanej w literaturze, logarymicznej charakterystyce amplitudowej wyznaczonej z równania różniczkowego zwyczajnego członu. Logarymiczna charakterystyka fazowa niecałkowitego rzędu dla parametru $\nu = 1$ ma asymptoty

poziome dane równaniami $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ oraz $\varphi(\omega) = \pi$, czyli tak jak to jest w logarymicznej charakterystyce fazowej wyznaczonej z równania różniczkowego zwyczajnego. Nachylenie logarymicznej charakterystyki amplitudowej jest tym mniejsze, im mniejszy jest rząd różniczki w równaniu różniczkowym niecałkowitego rzędu opisującym badany człon. Przesunięcie fazowe zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem się rzędu różniczki. Widać tu podobieństwo do członu inercyjnego I rzędu, opisanego równaniem różniczkowym o pochodnych niecałkowitego rzędu.

4. CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY IDEALNY

Element różniczkujący idealny opisany jest równaniem niecałkowitego rzędu:

$$y(t) = T_0^{RL} D_t^{(\nu)} Kx(t) \quad (56)$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (56), dla zerowych warunków początkowych, otrzymuje się:

$$Y(s) = KTs^\nu X(s) \quad (57)$$

Z równania (57) wyznacza się transmitancję operatorową członu różniczkującego idealnego rzędu ν :

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = KTs^\nu \quad (58)$$

Odpowiedź impulsowa członu różniczkującego idealnego opisanego transmitancją operatorową (58), opisuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G^{(\nu)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{KTs^\nu\} = \frac{KTt^{(-\nu-1)}}{\Gamma(-\nu)} \quad (59)$$

Przy wyznaczaniu odwrotnej transformaty Laplace'a w równaniu (59), dla przypadku szczególnego, gdy $\nu \rightarrow 1$, ze wzoru (59) wynika:

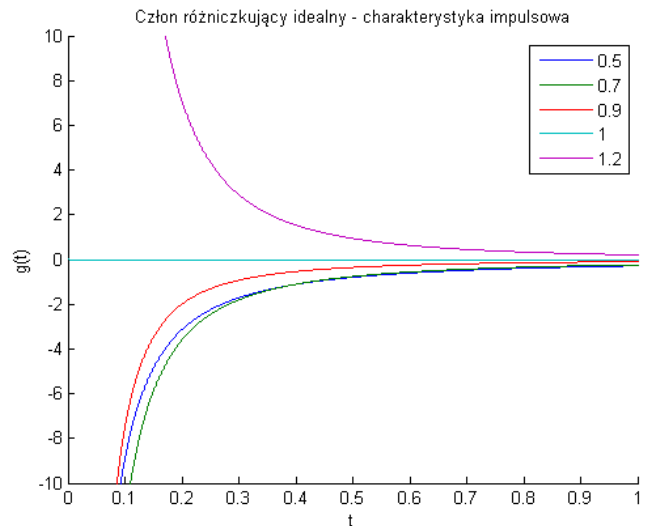
$$\lim_{\nu \rightarrow 1} g^{(\nu)}(t) = KT \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (60)$$

gdzie:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ +\infty & \text{dla } t = -0 \\ -\infty & \text{dla } t = +0 \end{cases} \quad (61)$$

a więc znana zależność definiująca charakterystykę impulsową członu różniczkującego idealnego.

Poniżej, na Rys. 14., pokazane zostały odpowiedzi impulsowe członu różniczkującego idealnego dla rzędu z przedziału $[0,5 \dots 1,2]$:



Rys. 14. Odpowiedzi impulsowe elementu różniczkującego idealnego dla rzędów $[0,5 \dots 1,2]$ oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Odpowiedź skokową definiuje zależność:

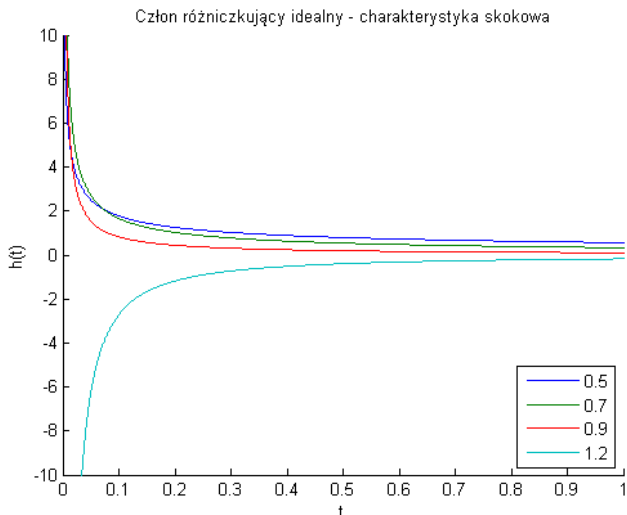
$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G^{(\nu)}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{KTs^{\nu-1}\} = \frac{KTt^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} \quad (62)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu \rightarrow 1$, ze wzoru (62) wynika:

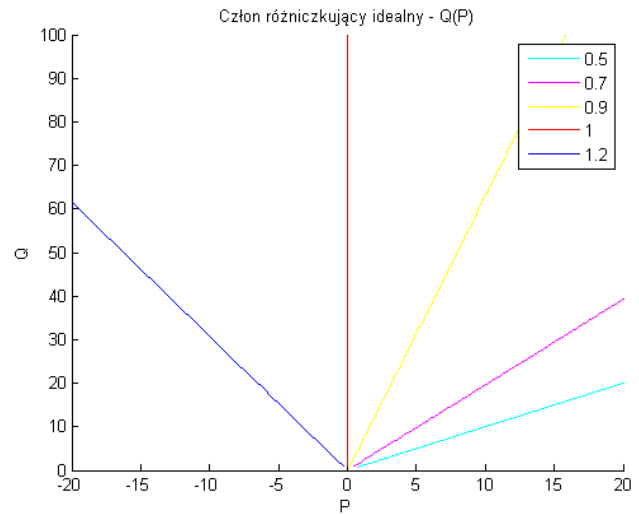
$$\lim_{\nu \rightarrow 1} g^{(\nu)}(t) = KT\delta(t) \quad (63)$$

a więc znana zależność definiująca charakterystykę skokową członu różniczkującego idealnego.

Na Rys. 15. pokazane zostały odpowiedzi skokowe dla rzędu z przedziału $[0,2 \dots 1]$.



Rys. 15. Odpowiedzi skokowe elementu różniczkującego idealnego dla rzędów [0,5...1,2] oraz parametrów K i T=1 [opracowanie własne]



Rys. 16. Charakterystyki amplitudowo – fazowe członu różniczkującego idealnego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i T=1 [opracowanie własne]

Podstawiając zależność (11) do wzoru (58), otrzymuje się transmitancję widmową idealnego członu różniczkującego:

$$G^{(v)}(j\omega) = KT\omega^v \left[\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right] \quad (64)$$

Po elementarnych przekształceniach oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

$$G^{(v)}(j\omega) = P^{(v)}(\omega) + jQ^{(v)}(\omega) \quad (65)$$

gdzie:

$$P^{(v)}(\omega) = KT\omega^v \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) \quad (66a)$$

$$Q^{(v)}(\omega) = KT\omega^v \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \quad (66b)$$

Z wzorów (66) wyznacza się charakterystykę amplitudowo – fazową (Nyquista) idealnego członu różniczkującego, której przebieg przedstawia Rys. 16.. Podobnie jak w przypadku członu całkującego idealnego nachylenie charakterystyki amplitudowo – fazowej zależy tylko od wartości rzędu elementu i nie zależy od stałej czasowej. Tą właściwość wykorzystuje się do projektowania układów zamkniętych odpornych na zmianę parametrów obiektu, przy zastosowaniu regulatorów PI(v)D(μ) – regulatora PID, w którym zarówno człon całkujący, jak i różniczkujący może być niecałkowitego rzędu. Właściwość ta wynika z analizy wzorów (66), gdyż można zapisać:

$$Q^{(v)}(\omega) = \operatorname{tg}\left(\frac{v\pi}{2}\right) P^{(v)}(\omega) \quad (67)$$

We wzorze (67) nie występuje stała czasowa, tylko rząd pochodno – całki.

Dla przypadku szczególnego, gdy $v = 1$, ze wzoru (29) wynika:

$$P^{(1)}(\omega) = 0 \quad (68a)$$

$$Q^{(1)}(\omega) = KT\omega \quad (68b)$$

a więc znane zależności definiujące charakterystykę amplitudowo – fazową idealnego członu różniczkującego.

Ze wzorów (66) wyznacza się równania opisujące przebiegi charakterystyk częstotliwościowych Bodego:

logarytmicznej charakterystyki amplitudowej:

$$L^{(v)}(\omega) = 20 \log |G^{(v)}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{K^2 T^2 \omega^{2v} \cos^2\left(\frac{v\pi}{2}\right) + K^2 T^2 \omega^{2v} \sin^2\left(\frac{v\pi}{2}\right)} \quad (69)$$

$$L^{(v)}(\omega) = 20 \log KT\omega^v$$

logarytmicznej charakterystyki fazowej:

$$\varphi^{(v)}(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q^{(v)}(\omega)}{P^{(v)}(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{KT\omega^v \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)}{KT\omega^v \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)}\right) = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{v\pi}{2}\right)\right] = \frac{v\pi}{2} \quad (70)$$

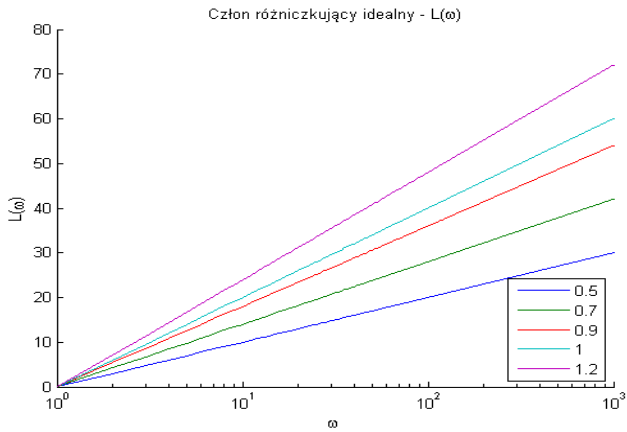
Dla przypadku szczególnego, gdy $v = 1$, ze wzorów (69) i (70) wynika:

$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log KT\omega \quad (71a)$$

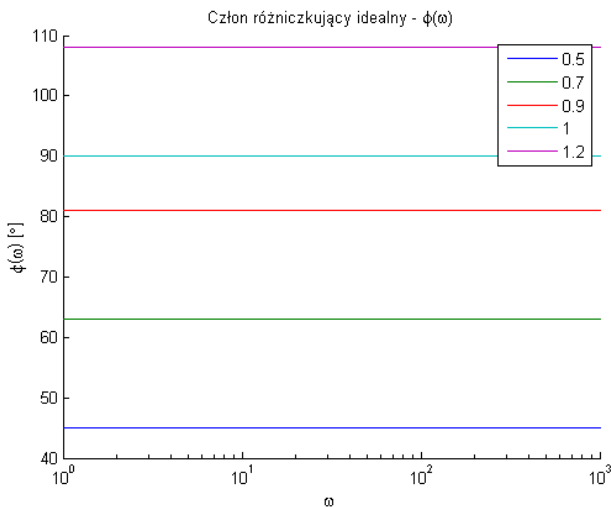
$$\varphi^{(1)}(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (71b)$$

a więc znane zależności definiujące częstotliwościowe charakterystyki logarytmiczne Bodego (amplitudową i fazową) idealnego członu różniczkującego.

Przebiegi charakterystyk Bodego idealnego członu różniczkującego opisane za pomocą rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów zostały pokazane na Rys. 17. Oras Rys. 18.:



Rys. 17. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe idealnego członu różniczkującego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]



Rys. 18. Logarytmiczne charakterystyki fazowe idealnego członu różniczkującego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Z Rys. 17. oraz Rys. 18. wynika, że logarytmiczna charakterystyka amplitudowa dla parametru $v = 1$ ma nachylenie $+20$ dB na dekadę, a logarytmiczna charakterystyka fazowa $\varphi = 90^\circ$. Dokładnie w ten sam sposób przebiegają logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe członu różniczkującego idealnego wyznaczone z równania różniczkowego całkowitego rzędu. Zmniejszając rząd różniczki zmniejsza się szybkość wzrostu wzmocnienia. Z tego faktu wynika, że szybkość wzrostu wzmocnienia zależy tylko od rzędu różniczki. Na logarytmicznej charakterystyce fazowej widać, że przesunięcie fazowe zależy od rzędu różniczki. Zwiększając rząd zwiększa się przesunięcie fazowe układu.

5. Człon różniczkujący rzeczywisty

Człon różniczkujący rzeczywisty opisany jest równaniem różniczkowym o pochodnych niecałkowitego rzędu:

$$T_0^{RL} D_t^\nu y(t) + y(t) = K {}^{RL} D_t^\nu x(t) \tag{72}$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (34), dla zerowych warunków początkowych, otrzymuje się:

$$Ts^\nu Y(s) + Y(s) = Ks^\nu X(s) \tag{73}$$

Z równania (73) wyznacza się transmitancję operatorową członu różniczkującego rzeczywistego rzędu v :

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks^\nu}{Ts^\nu + 1} \tag{74}$$

Odpowiedź impulsowa członu całkującego rzeczywistego opisanego transmitancją operatorową (74), opisuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G^{(\nu)}(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ks^\nu}{Ts^\nu + 1} \right\} \tag{75}$$

Po elementarnych przekształceniach, uzyskuje się:

$$g^{(\nu)}(t) = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{K}{T^2} t^{\nu-1} E_{\nu,\nu} \left(-\frac{1}{T} t^\nu \right) \tag{76}$$

Przyjmując ($\alpha = \beta = \nu$):

$$E_{\nu,\nu} \left(-\frac{1}{T} t^\nu \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{T} t^\nu \right)^k}{\Gamma(\nu k + \nu)} \tag{77}$$

Otrzymuje się ostatecznie zależność opisującą odpowiedź impulsową członu różniczkującego rzeczywistego:

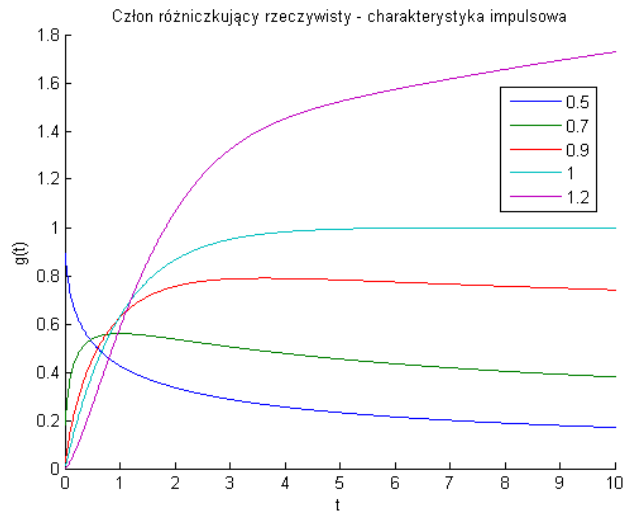
$$g^{(\nu)}(t) = \frac{K}{T} \delta(t) - \frac{K}{T^2} t^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu)} \tag{78}$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $\nu = 1$, ze wzoru (76) wynika:

$$g^{(1)}(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} E_{1,1} \left(-\frac{t}{T} \right) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \tag{79}$$

a więc znana zależność definiująca charakterystykę impulsową członu różniczkującego rzeczywistego.

Na Rys. 19. pokazane zostały odpowiedzi impulsowe dla różnych rzędów.



Rys. 19. Odpowiedzi impulsowe elementu różniczkującego rzeczywistego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Odpowiedź skokową wyznacza się z zależności:

$$h^{(\nu)}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G^{(\nu)}(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ks^{\nu-1}}{Ts^\nu + 1} \right\} \tag{80}$$

Dla:

$$h^{(\nu)}(t) = \frac{K}{T} E_{\nu,1} \left(-\frac{1}{T} t^\nu \right) \tag{81}$$

i przyjmując ($\alpha = \nu$ i $\beta = 1$):

$$E_{v,l} \left(-\frac{l}{T} t^v \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{l}{T} t^v \right)^k}{\Gamma(vk + l)} \quad (82)$$

otrzymuje się ostatecznie zależność opisującą odpowiedź skokową członu różniczkującego rzeczywistego:

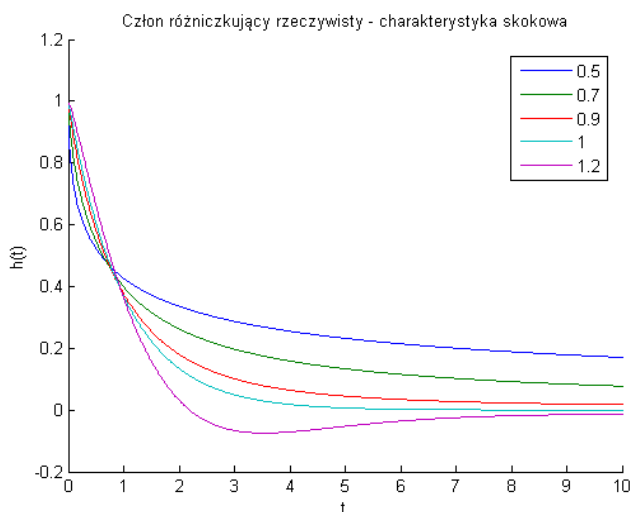
$$h^{(v)}(t) = \frac{K}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^{-k} t^{vk}}{\Gamma(vk + l)} \quad (83)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $v = 1$, ze wzoru (81) wynika:

$$h^{(1)}(t) = \frac{K}{T} e^{\left(-\frac{t}{T}\right)} \quad (84)$$

a więc znana zależność definiująca charakterystykę skokową członu różniczkującego rzeczywistego.

Na Rys. 20. pokazane zostały odpowiedzi skokowe dla wybranych rzędów.



Rys. 20. Odpowiedzi skokowe elementu różniczkującego rzeczywistego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Podstawiając zależność (11) do wzoru (74), otrzymuje się transmitancję widmową rzeczywistego członu różniczkującego:

$$G^{(v)}(j\omega) = \frac{K\omega^v \left[\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right]}{T\omega^v \left[\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right] + 1} \quad (85)$$

Po elementarnych przekształceniach oblicza się część rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

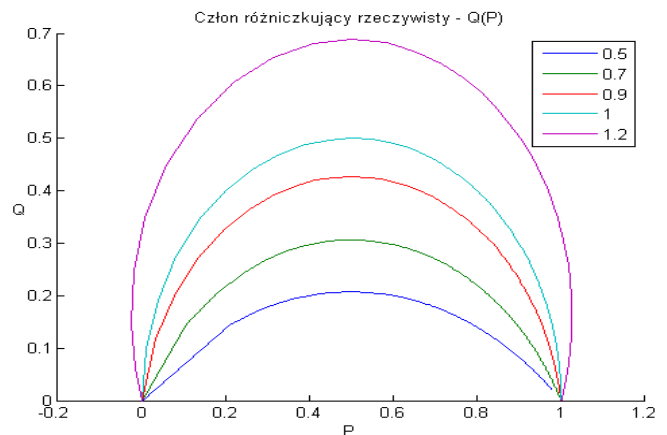
$$G^{(v)}(j\omega) = P^{(v)}(\omega) + jQ^{(v)}(\omega) \quad (86)$$

gdzie:

$$P^{(v)}(\omega) = \frac{KT\omega^{2v} + K\omega^v \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)}{\left[T\omega^v \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[T\omega^v \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (87a)$$

$$Q^{(v)}(\omega) = \frac{K\omega^v \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)}{\left[T\omega^v \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[T\omega^v \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right]^2} \quad (87b)$$

Ze wzoru (87) wyznacza się charakterystykę amplitudowo – fazową (Nyquista) członu różniczkującego rzeczywistego, której przebieg przedstawia Rys. 21.:



Rys. 21. Charakterystyki amplitudowo – fazowe członu różniczkującego rzeczywistego dla różnych wartości parametru v oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Dla przypadku szczególnego, gdy $v = 1$, ze wzoru (87) wynika:

$$P^{(1)}(\omega) = \frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \quad (88)$$

$$Q^{(1)}(\omega) = \frac{K\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

a więc powszechnie znane zależności definiujące charakterystykę amplitudowo – fazową członu różniczkującego rzeczywistego.

Ze wzorów (87) wyznacza się równania opisujące przebiegi charakterystyk częstotliwościowych Bodego: logarymicznej charakterystyki amplitudowej:

$$L^{(v)}(\omega) = 20 \log |G^{(v)}(j\omega)| = 20 \log \sqrt{[P^{(v)}(\omega)]^2 + [Q^{(v)}(\omega)]^2} \quad (89)$$

logarymicznej charakterystyki fazowej:

$$\varphi^{(v)}(\omega) = \arctg \left(\frac{Q^{(v)}(\omega)}{P^{(v)}(\omega)} \right) = \arctg \frac{\sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)}{T\omega^v + \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)} \quad (90)$$

Dla przypadku szczególnego, gdy $v = 1$, ze wzorów (89) i (90) wynika:

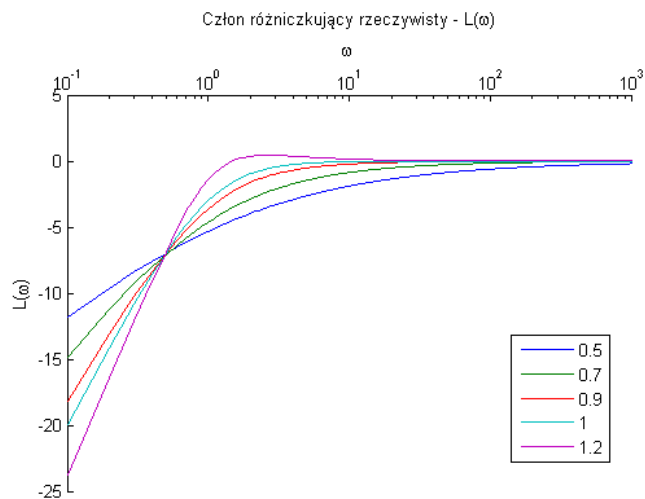
$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log \sqrt{\left[\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \right]^2 + \left[\frac{K\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right]^2} \quad (91a)$$

$$L^{(1)}(\omega) = 20 \log K\omega - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

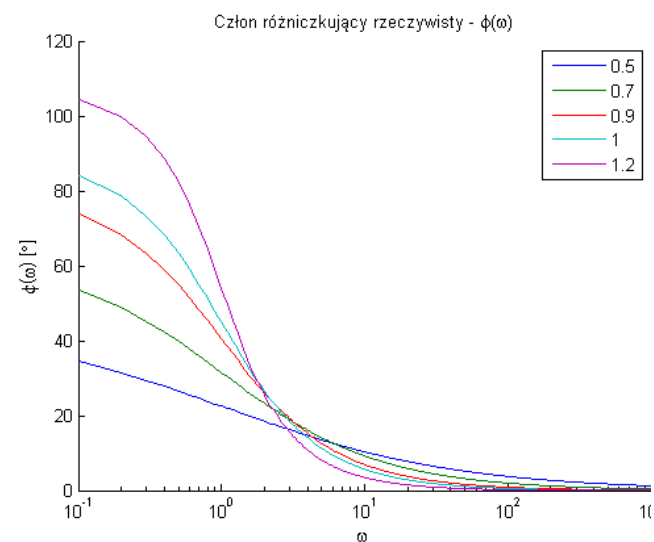
$$\varphi^{(1)}(\omega) = \arctg \frac{1}{T\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T \quad (91b)$$

a więc znane w literaturze zależności definiujące częstotliwościowe charakterystyki logarymiczne Bodego (amplitudową i fazową) rzeczywistego członu różniczkującego.

Przebiegi charakterystyk Bodego rzeczywistego członu różniczkującego opisane za pomocą rachunku różniczkowego z pochodnymi niecałkowitych rzędów zostały pokazane na Rys. 22. oraz Rys. 23.:



Rys. 22. Logarymiczne charakterystyki amplitudowe rzeczywistego członu różniczkującego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]



Rys. 23. Logarymiczne charakterystyki fazowe rzeczywistego członu różniczkującego dla różnych wartości parametru ν oraz parametrów K i $T=1$ [opracowanie własne]

Wyznaczone charakterystyki zarówno czasowe jak i częstotliwościowe, dla parametru $\nu = 1$ pokrywają się z charakterystykami wyznaczonymi metodą klasyczną, czyli na podstawie analizy równania różniczkowego zwyczajnego stanowiącego model matematyczny analizowanego członu różniczkowego rzeczywistego. Ta zgodność potwierdza prawidłowość metody.

Szybkość wzrostu wzmocnienia układu, dla częstotliwości mniejszych od częstotliwości rezonansowej, zależy od rzędu różniczkowy i jest tym większe im wyższy jest ten rząd. Przeprowadzając analizę Rys. 23. można powiedzieć, że zwiększenie rzędu różniczkowy powoduje zwiększenie przesunięcia fazowego, dla małych częstotliwości, mniejszych od częstotliwości rezonansowej. Zwiększenie rzędu różniczkowy, powoduje zatem zwiększenie dynamiki zjawisk w analizowanym modelu.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono uogólniony opis właściwości dynamicznych podstawowych elementów automatyki stosując rachunek różniczkowy niecałkowitych rzędów. Mając do dyspozycji niecałkowite modele członów elementarnych można budować bardziej złożone układy automatyki dowolnych rzędów.

Opisane w artykule człony dynamiczne za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów, dla parametru $\nu = 1$, stanowią powszechnie znane zależności definiujące charakterystyki czasowe i częstotliwościowe badanych członów dynamicznych a wykreślone na ich podstawie charakterystyki pokrywają się z powszechnie znanymi charakterystykami członów automatyki opisanymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Potwierdza to zatem słuszność tezy, że klasyczny rachunek różniczkowy (rzędów całkowitych) jest przypadkiem szczególnym rachunku różniczkowego rzędów dowolnych.

Bibliografia:

1. Busłowicz M., *Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu*, Pomiary Automatyka Robotyka nr 2/2010.
2. Busłowicz M., Nartowicz T., *Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem*, Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, s. 398-405, 2009.
3. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, stron 271, ISSN 0867-096X, Białystok 2009.
4. Chwaleba A., Luft M., *Właściwości i projektowanie wybranych przetworników mechano-elektrycznych*, Zakład Poligraficzny Politechniki Radomskiej, Wyd. II popr. i uzup., ISBN 83-88001-00-0, Radom 1998.
5. Luft M., Nowocień A., Cioć R., Pietruszczak D., *Charakterystyki częstotliwościowe modelu przetwornika ciśnienia opisanego równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu*, Logistyka nr 3/2015, ISSN 1231-5478, Poznań 2015.
6. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Modele matematyczne kaskady pneumatycznej oraz membranowego siłownika pneumatycznego opisane rachunkiem różniczkowym niecałkowitych rzędów*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1056-1060, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2018), Radom 2018 – artykuł zgłoszony
7. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Analiza właściwości dynamicznych wybranych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów. Część 1. Badania symulacyjne*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1050-1055, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2017), Radom 2017.
8. Luft M., Nowocień A., Pietruszczak D., *Analiza właściwości dynamicznych wybranych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów. Część 2. Badania laboratoryjne*, AUTOBUSY - Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe; Eksploatacja i testy; ISSN 1509-5878, e-ISSN 2450-7725, str. 1056-1060, Instytut Naukowo-Wydawniczy "SPATIUM", AUTOBUSY 12(2017), Radom 2017.
9. Luft M., Pietruszczak D., Nowocień A., *Frequency response of the pressure transducer model described by the fractional order differential equation*, TTS 12 (2016), ISSN 1232-3829, Radom 2016.
10. Luft M., Szychta E., Nowocień A., Pietruszczak D., *Zastosowanie rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów w matematycznym modelowaniu przetwornika ciśnienia*, Autobusy nr 6/2016, ISSN 1509-5878, Instytut Naukowo-Wydawniczy SPATIUM, Radom 2016
11. Nowocień A., *Analiza właściwości dynamicznych układów pneumatycznych za pomocą rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Uniwersytetu Technologiczno- Humanistycznego im. Kazimierza

- Pułaskiego w Radomiu, Radom 2017, (Promotor: Prof. dr hab. inż. Mirosław Luft; Promotor pomocniczy: dr inż. Daniel Pietruszczak)
12. Nowocień A., Luft M., Pietruszczak D., *Zastosowanie rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów w nauce i technice*. Logistyka nr 3/2014.
 13. Ostalczyk P., *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, stron 430, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź 2008.
 14. Pietruszczak D., *Analiza właściwości układów pomiarowych wielkości dynamicznych z wykorzystaniem rachunku różniczkowo – całkowego ułamkowych rzędów*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Uniwersytetu Technologiczno- Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Radom 2013.
 15. Podlubny I., *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, 368 pages, ISBN 0125588402, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto 1999.
 16. Mościński J., Ogonowski Z. (red.), *Advanced Control with MATLAB and SIMULINK*, Pearson Higher Education, 272 pages, ISBN 013309667X, 1995.
 17. Rudra P., (tłumacz: Korbecki M.), *Matalb 7 dla naukowców i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, stron 280, ISBN 9788301160579, Warszawa 2010.
 18. <http://www.mathworks.com> – strona internetowa producenta programu MATLAB

Analysis of dynamic properties of selected basic elements of automation of non-integer orders

The paper presents the application of the fractional calculus to describe the dynamics of selected basic elements of automation. For the analyzed models, the integer and non-integer order transmittance was determined. Relationships describing time characteristics were determined and frequency; on the path of computer simulation, the characteristics of the analyzed systems were obtained. MATLAB software was used for simulation research.

Keywords: fractional calculus, transfer function, basic elements of automatics.

Autorzy:

Prof. dr hab. inż. Mirosław Luft, prof. zw. – Wydział Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: m.luft@uthrad.pl

Dr inż. Artur Nowocień – Zespół Szkół Elektronicznych im. Bohaterów Westerplatte w Radomiu, ul. Sadkowska 19, 26-600 Radom

Dr inż. Daniel Pietruszczak – adiunkt, Wydział Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: d.pietruszczak@uthrad.pl