

Rozkład prądu wzdłuż anten liniowych - modele Pocklingtona i Hallena

Anna Witenberg, Maciej Walkowiak

Wydział Elektroniki i Informatyki

Politechnika Koszalińska

ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin, Polska

Streszczenie

W artykule przedstawiono dwa równania dla prądu w symetrycznej antenie liniowej, wyprowadzone po raz pierwszy przez Pocklingtona i Hallena. Omówiono najpowszechniejszy sposób ich rozwiązywania – metodę momentów, której ideą jest rozwinięcie poszukiwanej nieznanej funkcji w kombinację liniową pewnych znanych funkcji o nieznanach współczynnikach. W ten sposób można doprowadzić do zamiany równań operatorowych w równania algebraiczne. W artykule dokonano również porównania nakładów obliczeniowych niezbędnych do analizy modeli tworzonych w oparciu o równania Pocklingtona i Hallena.

Słowa kluczowe: antena liniowa, równanie Hallena, równanie Pocklingtona, metoda momentów, potencjał wektorowy, potencjał skalarny, koszt obliczeniowy

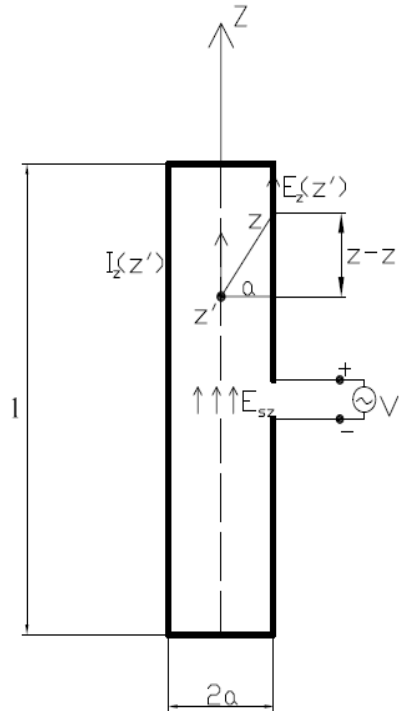
1. Wprowadzenie

W systemach komunikacji bezprzewodowej, pole elektromagnetyczne przenosi energię i informację na duże odległości. Antena jako niezbędny element tego systemu w dużej mierze decyduje o jego jakości. Jednymi z najstarszych i najbardziej popularnych są anteny liniowe, które nadal znajdują szerokie zastosowanie w praktyce. Praktycznymi realizacjami anten liniowych są anteny wykonane z jednego lub wielu odcinków prostych przewodów. Tak więc liniowość anteny jest tu rozumiana w sensie geometrycznym i konstrukcyjnym, nie dotyczy zaś elektrycznego zachowania się anteny.

Jednym z podstawowych problemów przy symulacji numerycznej zachowania się takich anten jest wyznaczenie rozkładu prądu płynącego na powierzchni anteny, co pozwala następnie na obliczenie jej istotnych parametrów. Wyznaczenie rozkładu prądu jednak kłopotliwe, gdyż wiąże się z rozwiązywaniem odpowiednich równań całkowych. Dopiero zastosowanie komputerów i metod numerycznych pozwoliło na szybkie i kontrolowanie dokładne rozwiązanie równań Pocklingtona i Hallena, a tym samym na wyznaczanie rozkładu prądu na wielu antenach, nie tylko tych o liniowej konstrukcji.

W artykule przedstawiono dwa równania dla prądu w symetrycznej antenie liniowej, wyprowadzone po raz pierwszy przez Pocklingtona i Hallena oraz omówiono najpowszechniejszy sposób ich rozwiązywania – metodę momentów. Na tej bazie dokonano porównania nakładów obliczeniowych niezbędnych do analizy modeli tworzonych w oparciu o równania Pocklingtona i Hallena.

Dana jest antena liniowa wykonana z doskonałego przewodnika o długości l i promieniu a umieszczona w swobodnej przestrzeni w taki sposób, że oś anteny pokrywa się z osią z układu współrzędnych użytego do analizy.



Rys. 1. Antena liniowa o długości l i promieniu a

W środku anteny (punkt o współrzędnej $z = 0$) jest utworzona nieskończenie wąska szczelina, w której umieszczono hipotetyczny generator o **SEM** V wzbudzający symetryczne pole elektryczne. Natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}_{sz}(\mathbf{z})$ w szczelinie – przy założeniu, że szerokość szczeliny $\Delta z \rightarrow 0$ i że **SEM** V jest stała – wyraża się poprzez funkcję delta Diraca $\delta(\mathbf{z})$ [5]

$$E_{sz}(\mathbf{z}) = V\delta(\mathbf{z}). \quad (1)$$

Poza obszarem szczeliny styczna do powierzchni przewodu składowa pola elektrycznego jest równa zero. Napięcie w szczelinie

$$V = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} E_{sz}(\mathbf{z}) dz \quad (2)$$

jest równe $1V$.

2. Równania Pocklingtona i Hallena

Rozpatrzmy antenę liniową jak na rysunku 1. Pole elektromagnetyczne przez nią wytwarzane wyraża się zależnościami potencjału wektorowego \mathbf{A} i potencjału skalarnego Φ opisanymi niejednorodnymi równaniami falowymi [7]

$$\frac{\partial^2 A_z(\mathbf{z})}{\partial z^2} + k^2 A_z(\mathbf{z}) = -\mu J_z(\mathbf{z}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_z(\mathbf{z})}{\partial z^2} + k^2 \Phi_z(\mathbf{z}) = -\frac{\rho(\mathbf{z})}{\varepsilon} \quad (4)$$

gdzie: J_z – składowa gęstości prądu, ρ – objętościowa gęstość ładunku na powierzchni anteny, $k = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ – liczba falowa, ω – pulsacja pola, λ – długość fali. Prąd oraz ładunek powierzchniowy wiąże równanie ciągłości

$$\frac{\partial J_z(z)}{\partial z} + j\omega\rho(z) = 0. \quad (5)$$

Jeżeli promień anteny jest dużo mniejszy od długości fali ($a \ll \lambda$) oraz od całkowitej długości anteny ($a \ll l$), to możemy przyjąć pewne uproszczenia opisywanego modelu, które w literaturze noszą nazwę przybliżenia cienkoprzewodowego [1]. Przy zastosowaniu przybliżenia cienkoprzewodowego rozwiązania równań (3) - (5) przybierają postać [1, 2]:

$$A_z(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{\exp[-jkR(z, z')]}{R(z, z')} dz', \quad (6)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-l/2}^{l/2} \sigma(z') \frac{\exp[-jkR(z, z')]}{R(z, z')} dz', \quad (7)$$

$$R(z, z') = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}, \quad (8)$$

przy czym: $I_z(z)$ – prąd płynący wzdłuż osi anteny, $\sigma(z)$ – liniowa gęstość ładunku na osi anteny, $R(z, z')$ – odległość od punktu obserwacji do punktu całkowania. Antena, nadawcza bądź odbiorcza, jest zawsze pobudzana polem z zewnętrznego źródła. W trybie nadawczym pole to wytwarza generator przyłączony do zacisków wejściowych anteny, w trybie odbiorczym zaś antena jest oświetlana padającym polem elektrycznym. Zewnętrzne źródło pola elektrycznego o natężeniu E_{zz} indukuje w antenie prąd, który przy powierzchni anteny generuje pole elektryczne E_z . Całkowite pole E_c przy powierzchni anteny jest sumą

$$E_c = E_{zz}(z) + E_z(z). \quad (9)$$

Zakładając, że mamy do czynienia z anteną doskonale przewodzącą, warunki brzegowe powodują, że styczna do powierzchni anteny składowa pola E_c znika [6], tzn.

$$E_{zz}(z) + E_z(z) = 0. \quad (10)$$

W równaniach (9) i (10) składową E_z natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez antenę opisuje zależność

$$E_z(z) = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(k^2 A_z(z) + \frac{\partial^2 A_z(z)}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

Rozwiązanie zbioru powyższych równań prowadzi do całkowitego równania typu Pocklingtona, które po przekształceniach może przybrać postać

$$\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') [(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2] \frac{\exp[-jkR]}{4\pi R^3} dz' = -j\omega\epsilon E_{zz}(z) \quad (12)$$

Przyjmując długość anteny dużo większą od jej promienia ($l \gg a$) i promień dużo mniejszy od długości fali ($a \ll \lambda$), pomijamy zjawiska zachodzące na końcach anteny oraz przyjmujemy warunek zanikania prądu w tych punktach

$$I_z(-l/2) = I_z(l/2) = 0 \quad (13)$$

W rozważanym przypadku styczna pola $E_{zz}(z)$ na powierzchni anteny znika, więc z (12) dostajemy równanie

$$\frac{\partial^2 A_z(z)}{\partial z^2} + k^2 A_z(z) = 0, \quad (14)$$

którego ogólne rozwiązanie ma postać

$$A_z(z) = -j\sqrt{\mu\epsilon}[B \cos(kz) + C \sin(k|z|)]. \quad (15)$$

W (15) stała B zależy od stanów brzegowych generujących (13). Wartość stałej C wyznaczamy z warunku Lorentza

$$\nabla \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\Phi \quad (16)$$

oraz z tego, że w punkcie $z = 0$ zachodzi $\Phi_z(z) = V$, otrzymując $C = \frac{V}{2}$.

Z porównania (7) i (15) dostajemy

$$\mu \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{\exp[-jkR(z, z')]}{4\pi R(z, z')} dz' = -j\sqrt{\mu\epsilon} \left[B \cos(kz) + \frac{V}{2} \sin(k|z|) \right] \quad (17)$$

Jest to całkowite równanie Hallena dla prądu w symetrycznej antenie liniowej.

3. Rozwiązanie równań Pocklingtona i Hallena metodą momentów

Analiza numeryczna jest powszechnie stosowana przy projektowaniu anten. W dziedzinie częstotliwości najbardziej popularną metodą rozwiązywania równań Pocklingtona i Hallena jest metoda momentów. Jej idea jest rozwinięcie poszukiwanej nieznannej funkcji w kombinację liniową pewnych znanych funkcji o nieznanach współczynnikach. W ten sposób można doprowadzić do zamiany równań operatorowych w równania algebraiczne. Rozpatrzmy ogólne równanie całkowe w skończonych granicach całkowania

$$\int_a^b f(z') K(z, z') dz' = g(z), \quad (18)$$

w którym f jest nieznaną szukaną funkcją, (a, b) przedziałem całkowania, $K(z, z')$ znaną funkcją zwaną jądrem równania całkowego, a g znaną funkcją pobudzenia. Rozwiązanie równania (18) metodą momentów składa się z następujących etapów [8, 10]:

1. nieznana
funkcja f jest przybliżana liniową kombinacją znanych funkcji bazowych f_n i nieznanymi współczynnikami c_n

$$f \approx f_x = \sum_{n=1}^N c_n f_n \quad (19)$$

2. przybliżenie
nie funkcji f_x jest podstawiane do (18)

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f_n(z, z') K(z, z') dz' = g(z) + R(z) \quad (20)$$

gdzie $R(z)$ jest resztą wynikającą z faktu przybliżania – funkcja f_x nie w pełni spełnia równanie (18)

3. przybliżenie f_x najdokładniej spełnia (18), jeżeli reszta $R(z)$ ma jak najmniejszą wartość.

Wobec tego zakładamy, że całka iloczynu przyjętych funkcji wagowych $w(\mathbf{z})$ i reszty $R(\mathbf{z})$ w rozpatrywanym przedziale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ jest równa zero

$$\int_a^b w_m(z) R(z) dz = 0 \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (21)$$

Zastosowanie N funkcji wagowych w zbiorze N równań liniowych z N nieznanymi współczynnikami c_n prowadzi do zależności

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b w_m(z) \int_a^b f_n(z, z') K(z, z') dz' dz = \int_a^b w_m(z) g(z) dz. \quad (22)$$

Do minimalizowania reszty można stosować różne funkcje wagowe. Najprościej minimalizować resztę $R(\mathbf{z})$ metodą dopasowania punktowego (point matching), w której jako funkcje wagowe wykorzystuje się dystrybucje Diraca

$$w_m(z) = \delta(z - z_m) \quad (23)$$

co sprowadza równanie (22) do postaci

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f_n(z, z') K(z, z') dz' = g(z_m) \quad (24)$$

i upraszcza proces obliczeń numerycznych. Zastosowanie takich właśnie funkcji wagowych sprowadza się do wymagania, aby funkcja aproksymująca była identyczna z funkcją dokładną w punktach, w których określone są dystrybucje Diraca.

Równania Pocklingtona (12) i Hallena (17) mogą być przekształcone do postaci [1]

$$\int_a^b I(z') G(z, z') dz' = f(z) \quad (25)$$

gdzie $I(z')$ – nieznaną funkcją prądu, $G(z, z')$ – jądro równania.

Prąd w całce (25) zamieniamy na sumę funkcji bazowych

$$I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n f_n(z), \quad (26)$$

która po wstawieniu do (25) daje równanie

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n \int_a^b G(z, z') f_n(z') dz' = \sum_{n=1}^{\infty} I_n G_n(z) = f(z), \quad (27)$$

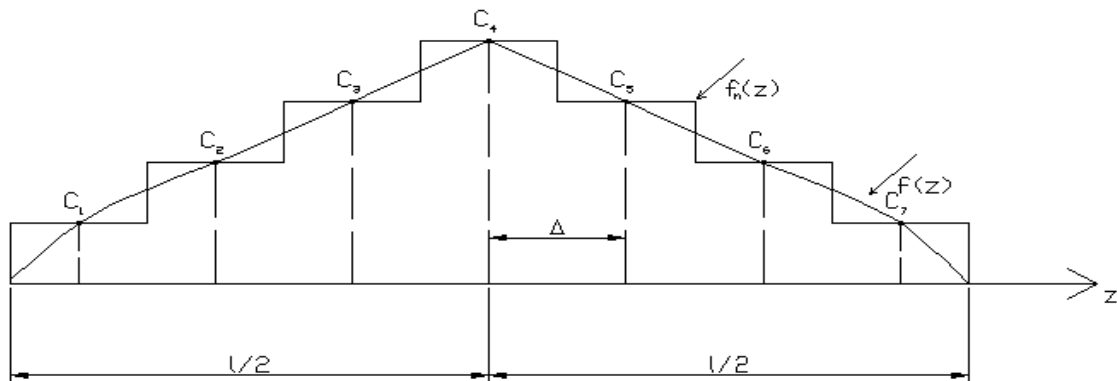
gdzie

$$G_n(z) = \int_a^b G(z, z') f_n(z') dz'$$

Dokonujemy próbkowania funkcji $f(\mathbf{z})$ w N punktach \mathbf{z}_m z przedziału $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ i przy założeniu, że błąd aproksymacji w punktach próbkowania jest równy zero, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n G_n(\mathbf{z}_m) = f(\mathbf{z}_m) \quad (28)$$

W praktyce antenę dzielimy na N segmentów o jednakowej długości, co sprowadza równanie całkowe do zbioru N niezależnych liniowych równań algebraicznych. Sposób próbkowania funkcji $f(z)$ pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Przybliżenie funkcji $f(z)$ dla $N = 7$ (Δ - długość segmentu anteny) [5]

W przybliżeniu stałym funkcję $f_n(z)$ definiujemy następująco

$$f_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ 0 & \text{w pozostałych punktach.} \end{cases} \quad (29)$$

Innym, również powszechnie stosowanym, jest przybliżenie liniowe, w którym

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} & \text{dla } z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ \frac{z_{n+1} - z}{z_{n+1} - z_n} & \text{dla } z_n \leq z \leq z_{n+1} \\ 0 & \text{w pozostałych punktach.} \end{cases} \quad (30)$$

Równanie (28) zapisywane jest w postaci macierzowej [3, 10]

$$[z_{nm}][I_n] = [V_m] \quad (31)$$

gdzie $[z_{nm}]$ - macierz elementów $G_n(z_m)$, $[I_n]$ - macierz prądu, $[V_m]$ - macierz napięcia.

Po przekształceniu szukany rozkład prądu wyznaczamy z zależności

$$[I_n] = [z_{nm}]^{-1}[V_m]. \quad (32)$$

Macierze w równaniu (31) są symetryczne. Jest to wynikiem centralnego zasilania anteny i stałej długości segmentów.

4. Koszt obliczeń

W artykule podano równania dla prądu w antenie liniowej – równania Pocklingtona i Hallena oraz jeden z powszechnie stosowanych sposobów wyznaczania rozkładu prądu metodą momentów.

Tabela 1 pokazuje jak zmieniają się wartości impedancji wejściowej Z_{we} anteny i prądu I_{we} na jej zaciskach ($l = 0,47\lambda$; $a = 0,005\lambda$) w zależności od liczby segmentów N . Podane wartości dotyczą równania Pocklingtona [1].

Tab. 1. Wartości impedancji wejściowej Z_{we} anteny i prądu I_{we} na jej zaciskach w zależności od przyjętej liczby segmentów N

N	$Z_{we} (\Omega)$	$I_{we} (A)$
41	68,0 – j1,0	0,0147
51	73,1 + j4,0	0,0137
61	76,2 + j8,5	0,0130
71	77,9 + j11,2	0,0127

Wyznaczono koszt obliczeniowy każdego równania, tzn. liczbę operacji dodawania \oplus i mnożenia \otimes w trakcie ich rozwiązywania. Dla równania Pocklingtona jest on około trzykrotnie (dokładnie 2,7931) większy, co wynika z bardziej złożonej formy tego równania.

Tab. 2. Liczby operacji arytmetycznych przy rozwiązywaniu równania Pocklingtona i Hallena w odniesieniu do jednego segmentu anteny

	\oplus	\otimes	liczba operacji razem
Równanie Pocklingtona	18	63	81
Równanie Hallena	12	17	29

Różnica w liczbach operacji arytmetycznych dodawania i mnożenia razem wynosi 52 na korzyść równania Hallena. Wynika to z bardziej złożonej formy równania Pocklingtona.

Rozwiązania równań prowadzą do niemal identycznych wyników. W związku z tym celowym pod względem kosztów (czas, energia) wydaje się stosowanie do wyznaczania rozkładu prądu na antenie równania Hallena. Równanie Hallena jest bardziej „ekonomiczne”. Jednak każde z tych równań ma swoją specyfikę i nie zawsze mogą być stosowane zamiennie.

Zdajemy sobie sprawę z wyjątkowej prostoty przedstawionego przykładu. Układ jest jednowymiarowy, rozważana jest tylko jedyna istotna składowa pola. Mamy też tutaj do czynienia z wyjątkową geometryczną prostotą układu: antena jest prosta, symetryczna i odosobniona.

W każdej możliwej komplikacji opisywanego modelu pojawią się też komplikacje obliczeniowe. Trudno jest z góry założyć, że w bardziej złożonych układach sformułowane powyżej wnioski będą obowiązywać. I dlatego wydaje się celowe powtórzenie opisanego wyżej eksperymentu numerycznego dla bardziej złożonych modeli.

Kolejną niewiadomą jest wykorzystywanie przetwarzania równoległego, co w obliczeniach antenowych ostatnich lat zaczyna być normą.

Bibliografia

- [1] Balanis C. A. *Antenna Theory*. John Wiley & Sons, 1997.
- [2] Raida Z. *Analysis of cylindrical antennas by moment methods*. Radioengineering, No 2/1997, pp 9-13.
- [3] Bokhari S. *Analysis of cylindrical antennas – a spectral iteration technique*. IEEE Transactions On Antennas And Propagation, No 3/1985, pp 251-258.
- [4] Sosa-Pedroza J. *Pocklington equation method versus curved segments technique*

- for the numerical study of circular antennas. Apeiron, No 2/2006, pp 260-273.*
- [5] Orfanidis S. *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, 2008.
- [6] Lukes Z. *Analysis of wire dipole in frequency and time domain*. Brno VUTIM Publishing, 1999.
- [7] Morawski T., Gwarek W. *Pola i fale elektromagnetyczne*. WNT Warszawa, 1998.
- [8] Lilly J. D. *Application of The Moment Method to Antenna Analysis*. MSEE Thesis, Department of Electrical Engineering, West Virginia University, 1980.
- [9] Sarkar T. K., Djordjevic A. R., Arvas E. *On the Choice of Expansion and Weighting Functions in the Numerical Solution of Operator Equations*. IEEE Trans. Antennas Propagat., No 9, pp 988-996, September 1985.
- [10] Harrington F. R. *Matrix methods for field problems*. IEEE, No 2, pp 136-149, 1967.
- [11] Szóstka J. *Fale i anteny*. WKiŁ Warszawa, 2006.

Current distribution along the antenna line – Pocklington and Hallen models

Abstract

In this paper Hallen's and Pocklington's equations for symmetrical linear antenna are considered. To solve these equations the Method of Moments is taken. Moreover, we made a brief presentation of this method which is the most common among numerical solutions. We also made a comparison between the amount of computation for Hallen's and Pocklington's currents equations respectively.