



Badanie wpływu sformułowania elementu skończonego oraz schematu rozwiązywania równania ruchu na wyniki analizy MES na przykładzie niesymetrycznie obciążonej płyty

MARCIN KRZESZOWIEC, JERZY MAŁACHOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej,
ul. gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa,
mkrzeszowiec@wat.edu.pl, jerzy.malachowski@wat.edu.pl

Streszczenie. Komputerowe metody symulacji zjawisk fizycznych obecnie są powszechne zarówno w obszarze nauki, jak i przemysłu. Możliwość przybliżonego rozwiązywania skomplikowanych układów równań różniczkowych, opisujących zagadnienia z dziedziny mechaniki, fizyki czy chemii, pozwala na znaczne skrócenie czasu projektowania i wdrażania nowych projektów. Często dzieje się to przy jednoczesnym zmniejszeniu zapotrzebowania na kosztowne badania eksperymentalne lub wytwarzanie prototypów. Jednak wspomniana powszechność tych metod, w szczególności metody elementów skończonych, spowodowała, że symulacje oraz analizy przeprowadzane z ich wykorzystaniem są często z góry za dokładne. Celem tego artykułu jest przedstawienie na przykładzie prostej analizy wytrzymałościowej, jak duży wpływ na wyniki symulacji mają takie parametry jak gęstość siatki elementów skończonych, sformułowanie elementu skończonego czy schemat całkowania równania ruchu. Dodatkowo autorzy zdecydowali się pokazać, jak łatwo jest uzyskać wyniki, które nie przedstawiają sensu fizycznego, pomimo tego że wszystkie podstawowe założenia poprawnej analizy (odpowiednie warunki brzegowe, zachowana energia układu etc.) zostały spełnione. Wyniki przeprowadzonych badań mogą być przestrożą przed pochopnym wyciąganiem wniosków z obliczeń przeprowadzonych za pomocą MES.

Słowa kluczowe: mechanika, metoda elementów skończonych, elementy powłokowe, całkowanie numeryczne równań ruchu

DOI: 10.5604/12345865.1145498

1. Wprowadzenie

Analizy wykorzystujące zaawansowane numeryczne metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, takie jak metoda elementów skończonych, są obecnie integralną częścią procesu projektowania większości elementów konstrukcyjnych. Jest to wynik wielu czynników, z których najważniejsze to niezwykle rozwój oprogramowania w ujęciu jego dostępności na rynku oraz ergonomii interfejsu. Przyjazne użytkownikowi środowiska nowych pakietów obliczeniowych oraz wzrost ich powszechności spowodował pozorne uproszczenie procesu przygotowania analizy numerycznej. Otwarty dostęp do znacznej liczby materiałów treningowych, samouczków oraz dokumentacji sprawiły, że umiejętność obsługi takiego oprogramowania wśród absolwentów politechnik już od dłuższego czasu nie jest zaskoczeniem. Obecnie większość kierunków na uczelniach technicznych obejmuje w ramach studiów przedmioty związane z metodami numerycznymi.

Dostępność komercyjnego oprogramowania MES sprawiła, że firmy z branży inżynierii mechanicznej sięgają po nie równie często jak po pakiety wspomagające projektowanie, szczególnie że programy te coraz częściej wyposażone są we wbudowane moduły pozwalające na wykonanie prostych analiz wytrzymałościowych z zastosowaniem MES. Bardzo łatwo jest ulec przekonaniu, że sama umiejętność obsługi z systemu do analiz numerycznych, bez ugruntowanej wiedzy na temat fizyki i mechaniki analizowanego przypadku, wystarczy, aby na podstawie otrzymanych wyników wyciągnąć daleko idące wnioski. W praktyce okazuje się, że wnioski te często nie mają żadnego odzwierciedlenia w rzeczywistości [4].

Powodem tego jest faktyczna natura oprogramowania MES, którą w swojej najczystszej formie można sprowadzić do roli zwykłego kalkulatora. Podobnie jak w tradycyjnym kalkulatorze naukowym, przy minimalnej wiedzy o jego obsłudze, możemy wprowadzić dowolne dane wejściowe, lecz aby wynik, który uzyskamy, był przydatny i zgodny z fizyką rozwiązywanego zagadnienia, muszą być one wprowadzone w bardzo skrupulatny sposób. Omyłka w dowolnym momencie wykonywania działania na typowym kalkulatorze (pominięty przecinek, brak uwzględnienia nawiasu w celu zachowania kolejności działań itp.) powoduje, że uzyskany wynik zupełnie traci swoją przydatność. Działanie oczywiście zostanie wykonane, ale urządzenie nie poinformuje nas o tym, że wynik nie ma sensu. Do osoby wykonującej analizę należy interpretacja wyniku oraz stwierdzenie, czy jest on zgodny z założonymi oczekiwaniami. Niestety z powodu wspomnianych wcześniej postępów w zakresie automatyzacji procesu obliczeniowego w systemach MES, otrzymywane wyniki są bardzo przekonujące, a skoro obliczenia zakończyły się sukcesem, zakłada się, że muszą one być poprawne.

W artykule przedstawiono na prostym przykładzie niesymetrycznie obciążonej płyty wspornikowej, jak duży wpływ na wyniki analizy mają takie parametry jak sformułowanie elementu skończonego, wybrany schemat rozwiązywania równania ruchu oraz zagęszczenie siatki elementów skończonych.

2. Podstawy metod całkowania równań ruchu w ujęciu metody elementów skończonych

Mnogość sposobów rozwiązywania równań różniczkowych z wykorzystaniem metod numerycznych wynika bezpośrednio z wielkiej różnorodności zjawisk fizycznych nimi opisanych. Obecnie nie istnieje metoda uniwersalna, która posłużyłaby z jednakową dokładnością zarówno dla zjawisk krótkotrwałych mających miejsce na przestrzeni ułamka sekundy, jak i dla zjawisk, których czas analizy przekracza kilkanaście sekund lub czasem minut. Czas analizy i dynamika badanego zjawiska jest jednym z podstawowych kryteriów podczas wyboru algorytmu obliczeniowego. W zależności od potrzeb, do całkowania równań ruchu wykorzystujemy najczęściej metody oparte o schemat jawny (*explicit*) lub niejawny (*implicit*).

Podejście jawne (np. metoda różnic centralnych) poszukuje rozwiązania dla kolejnego kroku, korzystając wyłącznie z wyników kroku obecnego. Schematy niejawne natomiast wykorzystują układ równań uwikłanych opartych o wyniki z obecnego i następnego kroku czasowego. Ta podstawowa różnica pomiędzy metodami *explicit* i *implicit* pociąga za sobą znaczące zmiany w zakresie ich stosowalności [5].

W metodzie różnic centralnych, dla równania równowagi dynamicznej $M\ddot{x}_t + C\dot{x}_t + Kx_t = F_t$ przeprowadzana jest dyskretyzacja dziedziny czasu, a następnie wykorzystywane są następujące zależności na prędkość i przyspieszenie:

$$\ddot{x}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}), \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_t = \frac{1}{2\Delta t}(x_{t+\Delta t} - x_{t-\Delta t}), \quad (2.2)$$

gdzie: \ddot{x}_t — przyspieszenie;
 \dot{x}_t — prędkość;
 Δt — krok całkowania.

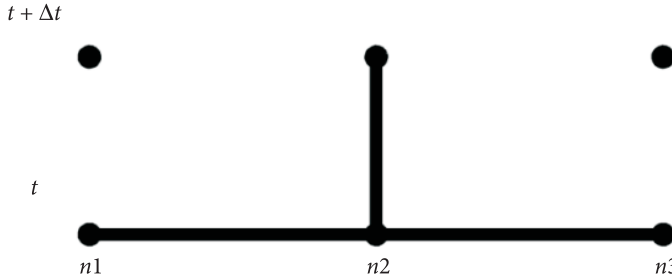
Podstawiając je do równania ruchu, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\Delta t^2}(x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t})M + \frac{1}{2\Delta t}(x_{t+\Delta t} - x_{t-\Delta t})C + Kx_t = F_t, \quad (2.3)$$

gdzie: M — macierz mas;
 C — macierz tłumienia;
 K — macierz sprężystości;
 F_t — wektor obciążeń.

Rozwiązując to równanie, możliwe jest obliczenie stanu przemieszczeń w chwili $t + \Delta t$, na podstawie stanu układu w czasie t .

W metodach jawnych rozwiązywany problem numeryczny jest o wiele prostszy niż w metodach niejawnych. Stąd obliczenia wykonywane są dużo szybciej, a zapotrzebowanie na zasoby komputerowe (szczególnie pamięć operacyjną) jest znacząco



Rys. 1. Graficzna reprezentacja całkowania wg schematu jawnego (*explicit*)

mniejsze. Ponieważ jednak schemat oblicza wynik następnego kroku „w ciemno”, bez korekcji, pojawia się istotna kwestia stabilności metody, która uzależniona jest od kroku czasowego. Jeżeli jest on zbyt duży, model rozwiązywany będzie w sposób pozbawiony fizycznego sensu i rozwiązanie szybko straci stabilność. W systemie LS-Dyna użytym w przeprowadzanych badaniach domyślnym algorytmem szukającym rozwiązania dla zadanego problemu jest metoda różnic centralnych. Krok czasowy dobierany jest w tym wypadku przez program automatycznie (z możliwością skalowania przez użytkownika) i uzależniony jest od wielkości charakterystycznej (np. przekątnej lub długości boku) najmniejszego elementu skończonego oraz od prędkości rozchodzenia się fali dźwiękowej w materiale [9]. Krok czasowy dla schematu jawnego obliczany jest w LS-Dyna według zależności:

$$\Delta t = 0,9 \Delta t_{\text{critical}} = \frac{L_s}{c}, \quad (2.4)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (2.5)$$

gdzie: L_s — wielkość charakterystyczna;
 c — prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej w materiale;
 ρ — gęstość materiału;
 ν — moduł Poissona.

Z uwagi na bardzo mały krok czasowy, metoda różnic centralnych jest z powodzeniem wykorzystywana do analizowania dynamicznych, krótkotrwałych zjawisk.

W szczególności zderzeń czy detonacji, gdzie uwzględniony jest efekt dużych przemieszczeń [12-14]. Mały krok czasowy sprawia jednak, że stosowanie schematu *explicit* do symulacji zjawisk odbywających się na przestrzeni dłuższej niż kilka sekund staje się bardzo kłopotliwe. Powodem tego są narastające z czasem błędy całkowania numerycznego.

Stając przed problemem analizy statycznej, gdzie interesujący dla nas jest stan końcowy w położeniu równowagi lub gdy symulowane zjawisko fizyczne zachodzi na przestrzeni kilkunastu sekund i dłużej, słuszne jest rozważenie wykorzystania schematu niejawnego. W LS-Dyna jednym z dostępnych schematów niejawnych jest metoda Newmarka. Na jej bazie możliwe jest poszukiwanie rozwiązania za pomocą całej rodziny algorytmów, w zależności od dwóch ustalonych przez użytkownika parametrów γ oraz β . Najczęściej stosowane algorytmy oraz odpowiadające im wartości parametrów przedstawione zostały w tabeli 1. Warto zaznaczyć, że algorytm o stałej wartości przyspieszenia jest stosowany domyślnie. Jest tak, ponieważ zapewnia stosunkowo wysoką dokładność obliczeń, a jednocześnie w odróżnieniu od metody różnic centralnych jego stabilność nie zależy w żaden sposób od kroku czasowego (stabilność bezwarunkowa). W razie potrzeby zwiększenia dokładności obliczeń możliwe jest zastosowanie algorytmu o liniowej zmianie przyspieszenia, należy jednak pamiętać, że w tym wypadku stabilność jest już uwarunkowana krokiem czasowym [2]. Metoda Newmarka opisana jest następującymi zależnościami:

$$M\ddot{x}_{t+\Delta t} + C\dot{x}_{t+\Delta t} + Kx_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}, \quad (2.6)$$

$$x_{t+\Delta t} = \tilde{x}_{t+\Delta t} + \Delta t^2 \beta \ddot{x}_{t+\Delta t}, \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \tilde{\dot{x}}_{t+\Delta t} + \Delta t \gamma \ddot{x}_{t+\Delta t}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{x}_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{x}_t, \quad (2.9)$$

$$\tilde{\dot{x}}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{x}_t, \quad (2.10)$$

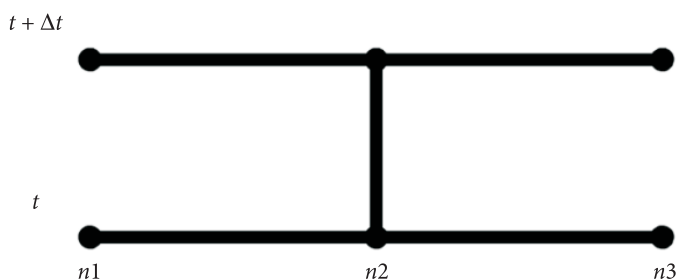
$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 0. \quad (2.11)$$

TABELA 1

Popularne algorytmy oparte o metodę Newmarka

Algorytm	γ	β	Uwagi
Fox-Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	Bardzo duża dokładność, warunkowa stabilność
Przyśpieszenie liniowe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	Duża dokładność, warunkowa stabilność
Przyśpieszenie stałe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Dostateczna dokładność, bezwarunkowa stabilność
Różnic centralnych	$\frac{1}{2}$	0	Metoda jawna (<i>explicit</i>)

Ważną cechą każdej metody obliczeniowej jest stabilność. Można ją scharakteryzować jako właściwość danego algorytmu do utrzymania wielkości błędów całkowania numerycznego w pewnych określonych granicach w każdym kolejnym kroku całkowania. W razie utraty stabilności błędy całkowania numerycznego narastają wykładniczo i rozwiązanie traci arytmetyczny sens już po kilku krokach obliczeniowych. W ujęciu matematycznym istnieje wiele rodzajów stabilności. Poniżej opisano te najczęściej spotykane w metodach numerycznych.

Rys. 2. Graficzna reprezentacja całkowania wg schematu niejawnego (*implicit*)

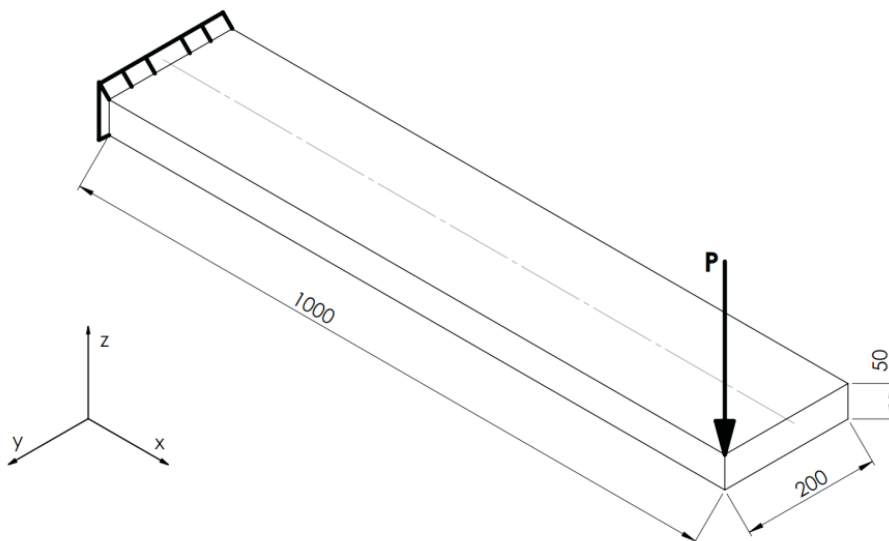
- a) Algorytmy, których stabilność uwarunkowana jest rozmiarem kroku czasowego, nazywamy warunkowo stabilnymi. Przykładem takiego algorytmu jest metoda różnic centralnych, czyli domyślna metoda obliczeniowa programu LS-Dyna. Krok dt dobierany jest z uwagi na skomplikowanie problemu lub wg pewnej wartości charakterystycznej. W przypadku zastosowania ww. kodu numerycznego, jak wspomniano wcześniej, będzie to gęstość i jakość siatki oraz parametry materiałowe. W zagadnieniach nieliniowych określona wartość kroku czasowego może zapewniać stabilność tylko dla pewnego fragmentu analizy. W celu utrzymania stabilności konieczne stanie się jego zmniejszenie w toku obliczeń, co często jest automatycznie zapewniane przez oprogramowanie. Zbyt

mały krok czasowy jednak znacząco wydłuży czas obliczeń, a narastające błędy odcięcia będą miały wpływ na dokładność wyniku.

- b) Jeżeli stabilność algorytmu nie jest zależna od kroku czasowego, to nazywamy go bezwarunkowo stabilnym. Należy jednak uważać na rozumienie stabilności metody jako jej dokładności. Bezwarunkową stabilność można bardziej obrazowo przedstawić jako właściwość algorytmu do zachowywania energii całkowitej układu, niezależnie od domeny czasu i postaci rozwiązania. Jest to bardzo pożądana cecha, dzięki której możliwe jest stosowanie dłuższych kroków całkowania niż w przypadku metod *explicit*, które z definicji są tylko warunkowo stabilne. Co ciekawe, rzadko przekłada się to na krótszy czas obliczeń z uwagi na większe skomplikowanie numeryczne tych pierwszych (por. rys. 1 i 2) [15].

3. Przypadek niesymetrycznie obciążonej płyty wspornikowej

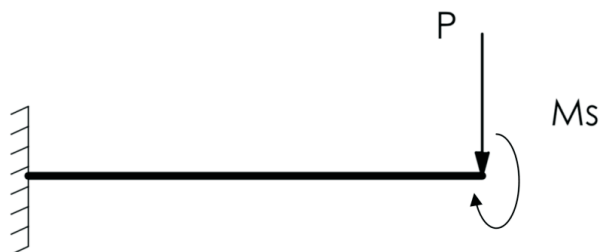
W celu ukazania, jak dużym problemem może być uzyskanie wiarygodnej analizy strukturalnej z wykorzystaniem MES oraz jak dużo parametrów ma wpływ na ostateczny jej wynik, postanowiono przebadąć następujący przypadek. Jednostronnie utwierdzony wspornik wykonany ze stali obciążono liniowo narastającą siłą P działającą wzdłuż osi Z (rys. 3).



Rys. 3. Analizowana płyta wspornikowa — schemat obciążenia

3.1. Przybliżone rozwiązanie analityczne

Tak postawiony problem zamodelowano jako jednostronnie utwierdzoną belkę o przekroju prostokątnym. Model fizyczny rozpatrywanego przypadku pokazany jest na rysunku 4.



Rys. 4. Fizyczny model obciążenia wspornika do obliczeń analitycznych

Z uwagi na powstający od siły P moment skręcający oraz całkowite utwierdzenie z jednej strony, w teorii wytrzymałości przypadek ten nazywany jest skręcaniem nieswobodnym. W celu znalezienia rozwiązania analitycznego potrzebne byłoby wykorzystanie elementów teorii Własowa z uwzględnieniem wpływu bimomentu [16]. Jest ona z powodzeniem stosowana przy obliczaniu wytrzymałości elementów nośnych o cienkościennych profilach otwartych i zamkniętych. Jednak z uwagi na przewidywany niewielki wpływ momentu skręcającego na całkowite odkształcenie analizowanego wspornika, postanowiono oprzeć się o klasyczne wzory wytrzymałościowe stosowane w przypadkach skręcania swobodnego, korzystając z teorii małych przemieszczeń. Podejście to, uzasadnione w literaturze i w praktyce inżynierskiej, jest zazwyczaj wystarczające [16, 17].

Dzięki takiemu uproszczeniu możliwe jest szybkie znalezienie szacunkowego rozwiązania analitycznego, które posłuży jako odniesienie do wyników otrzymanych drogą numeryczną. Poszukiwanymi wielkościami jest strzałka ugięcia oraz kąt skręcenia belki, ponieważ przemieszczenia są podstawowym wynikiem obliczeń MES.

Zależność na strzałkę ugięcia jednostronnie utwierdzonej belki, obciążonej na swobodnym końcu siłą skupioną, jest następująca:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI}, \quad (2.12)$$

gdzie: P — siła skupiona;
 l — długość belki;
 E — moduł Younga;
 I — moment bezwładności.

Wynik ugięcia z przeprowadzonych obliczeń wynosi $f = 8$ mm. Występujący w układzie moment skręcający M_s wynika z niesymetryczności obciążenia płyty wspornikowej i wynosi:

$$M_s = \frac{b}{2} P. \quad (2.13)$$

Zależność na kąt skręcenia pręta o przekroju prostokątnym jest analogiczna jak w przypadku prętów z przekrojem kołowym, z tą różnicą, że zamiast momentu bezwładności I_0 wykorzystujemy zastępczy moment bezwładności I_s . Kąt obrotu φ jest obliczany wg następującego wzoru:

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_s}, \quad (2.14)$$

gdzie: $I_s = \frac{1}{3} h^4 \left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right)$ – zastępczy moment bezwładności [16],

przy czym $n = \frac{h}{b} > 1$,

l – długość belki;

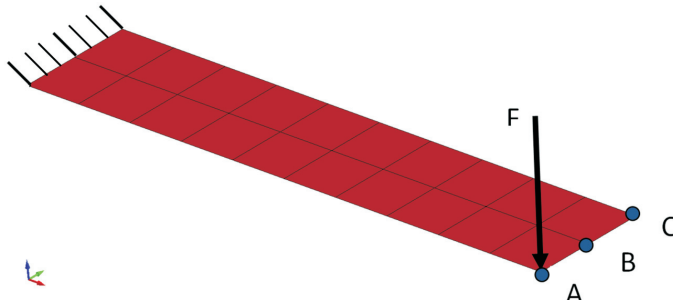
G – moduł Kirchoffa.

Ostatecznie kąt skręcenia wynosi $\varphi = \approx 0,1^\circ$, skutkuje to ugięciem w punkcie o 0,18 [mm]. Stosując zasadę superpozycji, całkowita obliczona wartość przemieszczenia punktu A na kierunku osi Z wynosi 8,18 [mm].

3.2. Analizy numeryczne z wykorzystaniem schematu jawnego (*explicit*)

Przyjęte warunki początkowo-brzegowe oraz parametry do liniowego modelu konstytutywnego i analizy numerycznej postawionego zadania zestawiono w tabeli 2. Symulacja nie uwzględnia zjawisk nieliniowych oraz tłumienia układu.

Dyskretyzacja geometrii płyty wykonana została poprzez zbudowanie siatki czterowęzłowych elementów dwuwymiarowych. Wartość siły F narastała w układzie liniowo przez cały założony czas symulacji do wartości końcowej 10 000 [N]. W celu zbierania i łatwego porównywania danych wybrano trzy węzły na swobodnej krawędzi wspornika. Do węzła A przyłożona została siła wymuszająca, węzeł B leży w osi wspornika, natomiast węzeł C jest symetrycznie położony względem osi poziomej przechodzącej przez punkt B.



Rys. 5. Model numeryczny badanego przypadku

TABELA 2

Parametry symulacji

Długość [m]	Szerokość [m]	Grubość [m]	Moduł Younga [Pa]	Moduł Poissona	Gęstość [kg/m ³]	Siła F [N]	Czas symulacji [s]
1	0,2	0,05	2,1e11	0,33	7850	10 000	1

3.2.1. Sformułowanie elementu skończonego wg Belytschko-Lin-Tsay

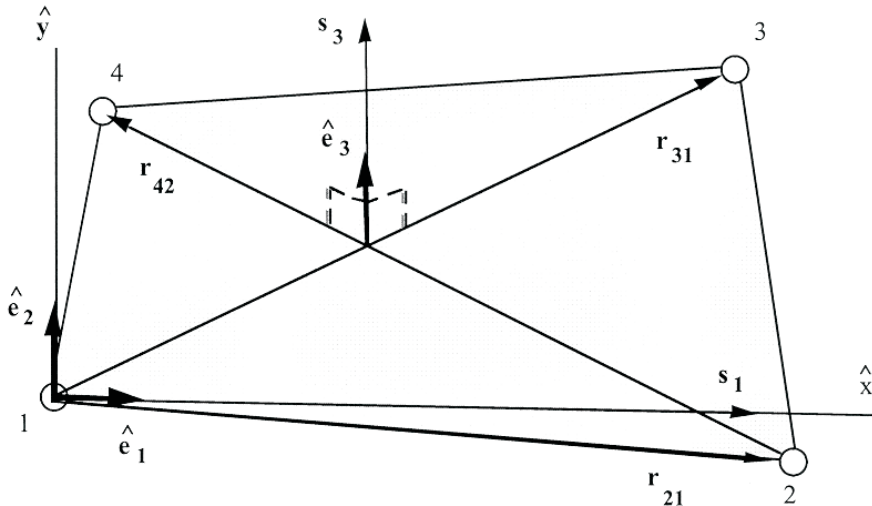
W pierwszej kolejności dokonano sprawdzenia, jaki wpływ na wyniki może mieć zmiana sformułowania elementu skończonego. Domyślnym i zalecanym elementem typu powłokowego w LS-Dyna jest Belytschko-Lin-Tsay. Powodem tego jest uniwersalność oraz mała liczba operacji matematycznych wymaganych do znalezienia rozwiązania, przez co znacząco skrócony zostaje czas symulacji.

Elementy te powstały poprzez „zdegenerowanie” trójwymiarowego elementu bryłowego do postaci powłoki i oparte są o dwa założenia. Pierwszym jest opis geometrii wykonany w korotacyjnym układzie współrzędnych. Dzięki temu liczba operacji matematycznych jest znacząco mniejsza niż np. w sformułowaniu Hughesa-Liu. Drugim założeniem jest sformułowanie równań konstytutywnych w oparciu o prędkość przemieszczeń [5].

Główną ideą stojącą za układem korotacyjnym jest rozdzielenie przemieszczenia ciała (ruch sztywny) od deformacji spowodowanych odkształceniem materii. Układ ten ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) pokazany jest na rysunku 6. Jego wyznaczenie opiera się najpierw o wyznaczenie wektora jednostkowego prostopadłego do głównej przekątnej elementu.

$$s_3 = r_{31} \times r_{42}, \quad (2.15)$$

$$\|s_3\| = \sqrt{s_{31}^2 + s_{32}^2 + s_{33}^2}, \quad (2.16)$$



Rys. 6. Korotacyjny układ współrzędnych w elemencie Belytschko-Lin-Tsay [6]

$$\hat{e}_3 = \frac{s_3}{\|s_3\|}. \tag{2.17}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie lokalnego układu $\hat{x} - \hat{y}$, w którym oś x w przybliżeniu odpowiada kierunkowi krawędzi pomiędzy węzłem 1 oraz 2. Dzięki temu łatwiejsza będzie późniejsza interpretacja naprężeń występujących w elemencie. W tym celu definiuje się wektor s_1 , który jest prawie równoległy do wektora r_{21} .

$$s_1 = r_{21} - (r_{21} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3, \tag{2.18}$$

$$\hat{e}_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}. \tag{2.19}$$

Ostatni wektor jednostkowy otrzymujemy jest na drodze iloczynu wektorowego:

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1. \tag{2.20}$$

Kiedy wszystkie cztery węzły są koplanarne, wektory jednostkowe \hat{e}_1 i \hat{e}_2 są styczne do powierzchni referencyjnej, natomiast wektor \hat{e}_3 definiuje kierunek normalny. Wraz z deformowaniem się elementu, kąt pomiędzy faktycznym kierunkiem normalnym a tym wyznaczonym przez wektor \hat{e}_3 będzie się zmieniał. Wartość tego kąta charakteryzowana jest przez następujące wyrażenie:

$$|\hat{e}_3 \cdot f - 1| < \delta, \tag{2.21}$$

gdzie: f — rzeczywisty kierunek normalny dla elementu;
 δ — parametr zależny od wielkości odkształceń.

Według Belytschko w większości zastosowań inżynierskich wartość δ powinna wynosić ok. 10^{-2} . Warto zaznaczyć, że nierówność (3.10) nie ogranicza przemieszczeń elementu wynikających z obrotów sztywnych, a jedynie odkształcenia powodujące znaczną deplanację powierzchni referencyjnej [5]. Zależności na prędkość przemieszczeń są oparte o teorię Mindlina dla płyt i powłok:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^m - \hat{z}\mathbf{e}_3 \times \Theta, \quad (2.22)$$

gdzie: \mathbf{v}^m — prędkość powierzchni referencyjnej;
 Θ — wektor prędkości kątowej;
 \hat{z} — odległość na kierunku normalnym.

Składowe prędkości przemieszczeń w układzie korotacyjnym opisane są następująco:

$$\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i} \right). \quad (2.23)$$

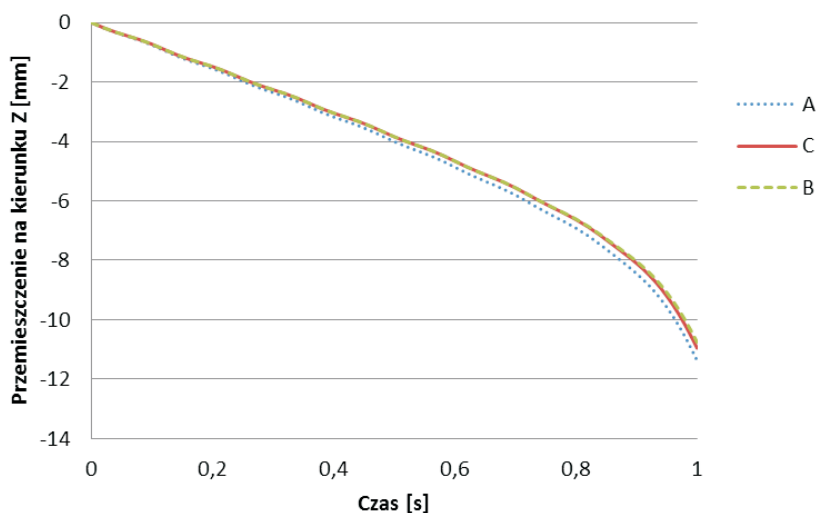
Po obliczeniu wszystkich składowych prędkości przemieszczenia, w każdym punkcie kwadratury, wykorzystywany jest standardowy model bilinearny w celu interpolowania wyników na całą powierzchnię elementu. Wykorzystywane w tym celu funkcje kształtu dane są następującymi zależnościami:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\}. \quad (2.24)$$

Obliczony z zależności (2.4-2.5) krok całkowania dla rozpatrywanej siatki elementów skończonych wyniósł $\Delta t = 1,16e - 5[s]$. Na rysunku 7 zaprezentowano wyniki w postaci przemieszczeń dla tego elementu, dla trzech wcześniej wspomnianych węzłów ABC rozmieszczonych na swobodnej krawędzi płyty.

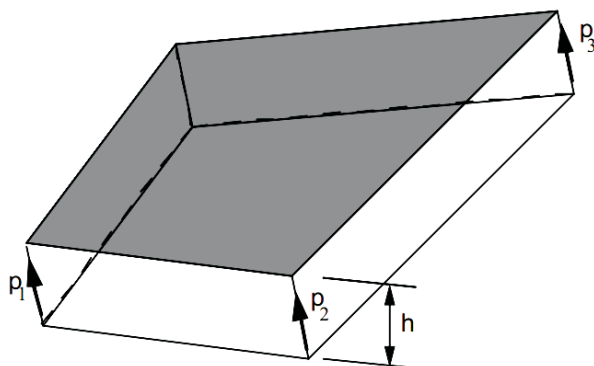
3.2.2. Sformułowanie elementu skończonego wg Belytschko-Wong-Chiang

Następnie zmieniono sformułowanie elementów na Belytschko-Wong-Chiang (B-W-C), w którym wprowadzono poprawki dotyczące przenoszenia naprężeń ściskających. Jest to częsty problemem w elementach powłokowych. W sformułowaniu



Rys. 7. Przemieszczenie wzdłuż osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w funkcji czasu dla sformułowania Belytschko-Tsai

Belytschko-Tsai powodem tego jest bazowanie na idealnie płaskiej geometrii. W większości wypadków podejście to sprawdza się bardzo dobrze, a ograniczona liczba operacji matematycznych znacznie przyspiesza obliczenia. Wystąpienie dużych przemieszczeń w węzłach względem osi normalnej (np. podczas zginania lub skręcania spowoduje, że otrzymane wyniki będą nieprawdziwe. W elementach Belytschko-Wong-Chiang wprowadzone zostały zmiany, których celem jest poprawienie zachowania elementu w takich przypadkach.



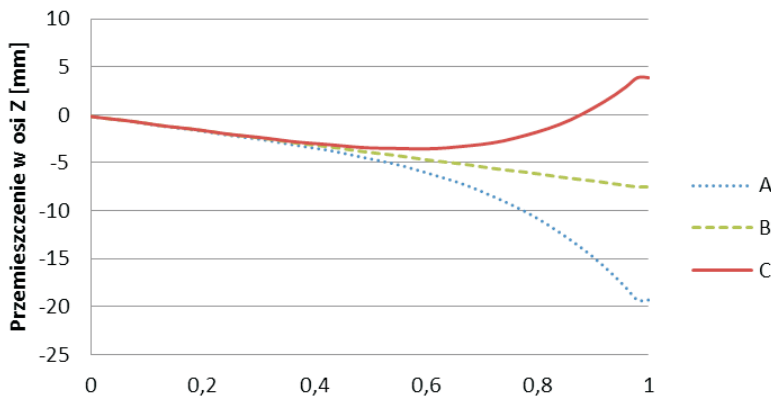
Rys. 8. Węzłowe wektory normalne [6]

Najważniejszą zmianą jest dodanie wektorów zgodnych z kierunkiem normalnym dla trzech węzłów (rys. 8). Po wprowadzeniu tych wektorów geometria elementu interpolowana jest na powierzchni powłoki z następującego równania:

$$x = x^m + \bar{\zeta}p = (x_l + \bar{\zeta}p_l)N_l(\xi, \eta), \quad (2.25)$$

gdzie: $\bar{\zeta} = \frac{\zeta h}{2}$, ζ — jednostkowy wektor normalny do powierzchni referencyjnej elementu.

Wektory te są uwzględnione w równaniach konstytutywnych powłoki. Efektem jest element, który pomimo wprowadzonych poprawek wciąż jest relatywnie mało wymagający obliczeniowo, a który może zapewnić dokładniejsze wyniki niż standardowy Belytschko-Tsay. Wyniki analizy z wykorzystaniem sformułowania Belytschko-Wong-Chiang przedstawia rysunek 9.



Rys. 9. Przemieszczenie w osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania Belytschko-Wong-Chiang

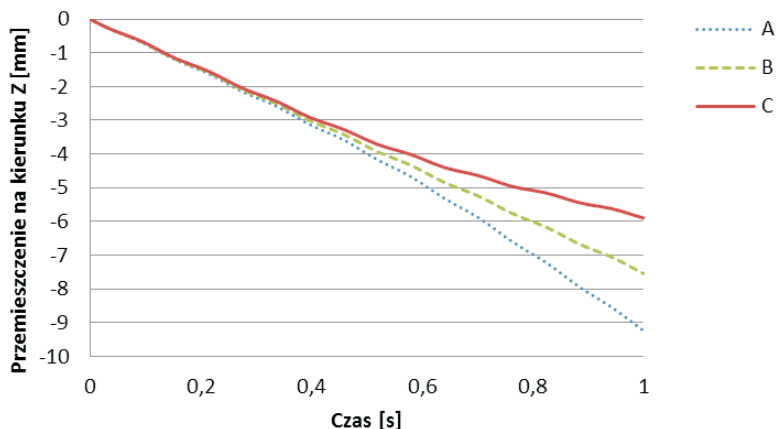
Różnica pomiędzy otrzymanymi wynikami jest dość znaczna. Nietypowy kształt wykresu przemieszczenia w drugim przypadku jest wynikiem znacznego skręcenia płyty pod obciążeniem. Efekt ten był praktycznie niezauważalny podczas pierwszej analizy.

3.2.3. Sformułowanie elementu skończonego wg Belytschko-Leviatan

Trzecim przebadanym sformułowaniem elementów był Belytschko-Leviatan. Jest on numerycznie bardziej wymagający od wykorzystywanych poprzednio o ok. 40%. Dodatkowo zaimplementowano w nim między innymi automatyczną kontrolę nad tzw. energią pasożytniczą będącą wynikiem zjawiska „hourglassing” występującego

w elementach z jednym punktem całkowania w płaszczyźnie elementu. Wyniki z wykorzystaniem tego elementu zaprezentowane zostały na rysunku 8.

Porównanie wyników z rysunków 7, 9 i 10 może posłużyć jako dowód do omawianego we wstępie artykułu problemu. Każda z przeprowadzonych analiz spełniła założenia energetyczne, zakończyła się bez błędów, a jedyną różnicą pomiędzy nimi był rodzaj sformułowania elementu skończonego.

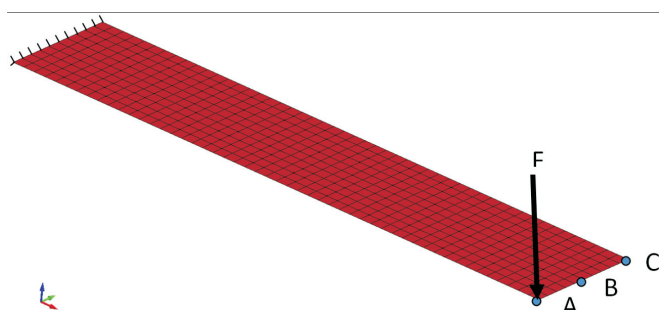


Rys. 10. Przemieszczenie wzdłuż osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Leviatan

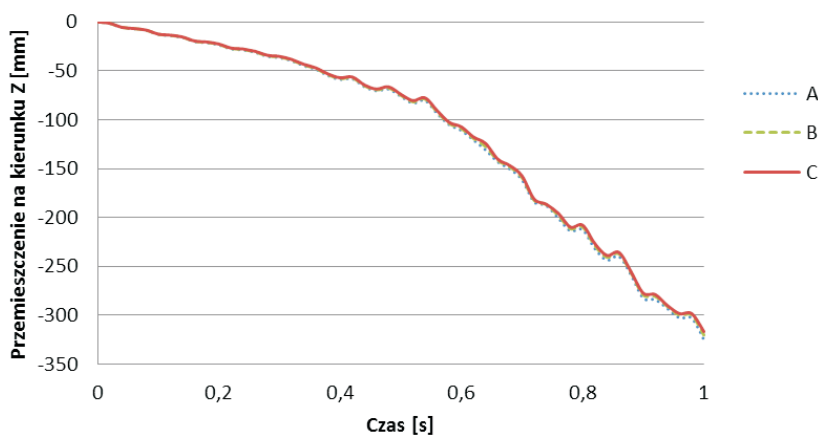
3.2.4. Zagęszczenie siatki elementów skończonych

Następnie postanowiono zbadać, jaki efekt na wyniki analizy będzie miało zagęszczenie siatki obliczeniowej. W tym celu przygotowano model z analogicznymi warunkami brzegowymi jak poprzednio, lecz w znaczący sposób zwiększono liczbę elementów skończonych. Rysunek 9 przedstawia modelowaną płytę z nałożoną gęstą siatką elementów skończonych.

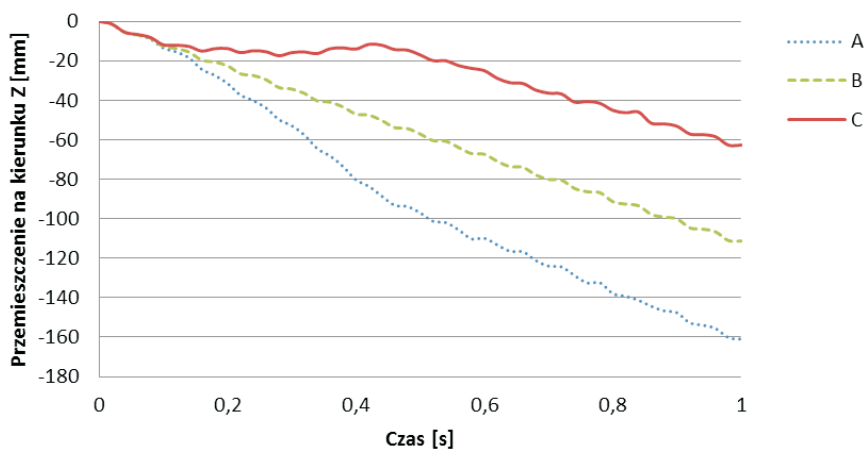
Dla tak przygotowanego modelu ponownie przeprowadzono serię analiz z wymienionymi powyżej sformułowaniami elementu skończonego. Zagęszczenie siatki obliczeniowej miało znaczący wpływ na krok całkowania. Zgodnie ze wzorem (2.4), wyznaczony on został na poziomie $\Delta t = 2,31e - 6 [s]$, czyli był pięciokrotnie mniejszy od tego w analizach z rzadką siatką. Wraz ze wzrostem liczby elementów znacznie wydłużył się czas prowadzonych analiz. Wyniki na rysunkach 11-13 w postaci przemieszczeń zostały zebrane dla trzech węzłów, które znajdowały się w miejscach odpowiadających tym z modelu o rzadkiej siatce MES.



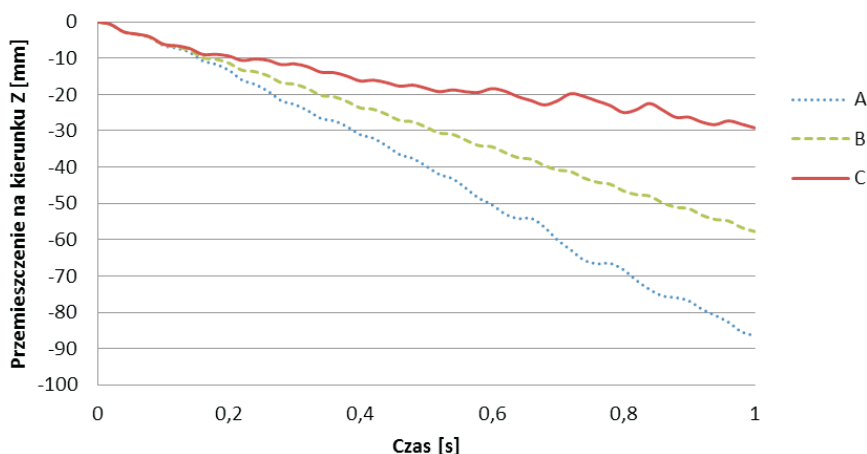
Rys. 11. Zagęszczona siatka dla badanego wspornika



Rys. 12. Przemieszczenie w osi Z węzłów w modelu o gęstej siatce obliczeniowej na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Tsay



Rys. 13. Przemieszczenie w osi Z węzłów w modelu o gęstej siatce obliczeniowej na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Wong-Chiang



Rys. 14. Przemieszczenie w osi Z węzłów w modelu o gęstej siatce obliczeniowej na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Leviatan

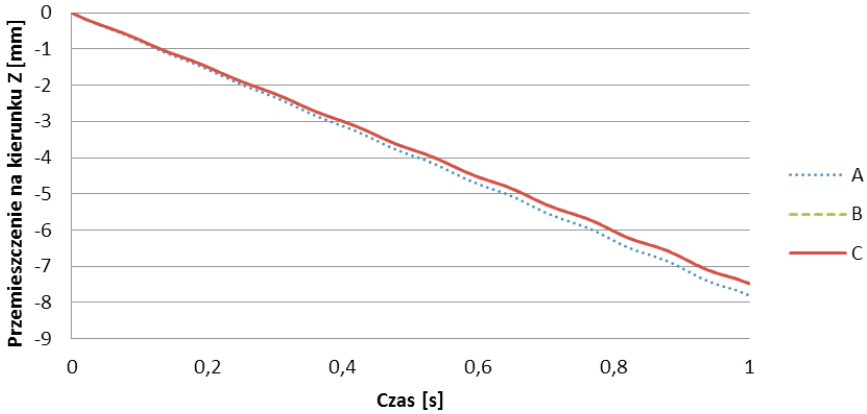
Biorąc pod uwagę, że wszystkie trzy sformułowania elementów opierają się w sporej mierze na tych samych zależnościach matematycznych, powyższy rozrzut wyników był zaskoczeniem. Szczególnie, jeżeli weźmiemy pod uwagę zachowanie elementu domyślnego, gdzie różnica w przemieszczeniu węzłów, pomiędzy modelem z zagęszczoną siatką, a rzadką jest ponad dwudziestokrotna.

3.3. Analizy numeryczne z wykorzystaniem schematu niejawnego (*implicit*)

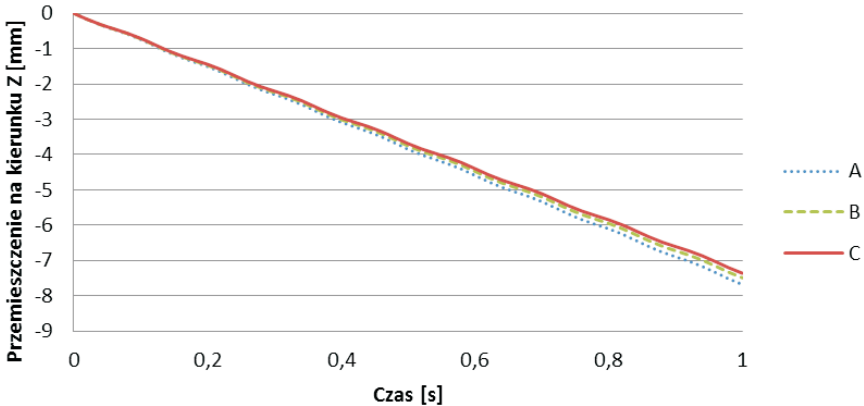
Kolejnym wziętym pod uwagę aspektem był schemat całkowania. Dotychczas wykorzystywaną jawną metodę różnic centralnych zamieniono na schemat niejawny. Warunki początkowo-brzegowe pozostały niezmienione. Symulacje przeprowadzono na modelu z rzadką siatką obliczeniową dla dwóch algorytmów opartych o metodę Newmarka. Pierwszym jest algorytm przyśpieszenia średniego ($\beta = 1/2$, $\gamma = 1/4$), drugi to algorytm przyśpieszenia liniowego ($\beta = 1/2$, $\gamma = 1/6$). Niestety nie było możliwe wykorzystanie tych samych sformułowań elementów co w analizach *explicit* z uwagi na ograniczenia narzucone przez oprogramowanie. W chwili obecnej LS-Dyna nie obsługuje w analizach *implicit* sformułowań Belytschko-Wong-Chiang i Belytschko-Leviatan, automatycznie zmieniając je na Belytschko-Tsay. W ich miejsce przeprowadzono próby na sformułowaniach S/R Hughes-Liu i Fast Hughes-Liu. Dla algorytmu przyśpieszenia średniego krok całkowania wynosił $dt = 0,01$ [s], natomiast dla obliczeń algorytmem przyśpieszenia liniowego wymagane było jego zmniejszenie do wartości $dt = 1e-5$ [s] w celu zachowania stabilności. Wykresy na rysunkach 15-18 prezentują wyniki tych analiz.

Niezależnie od algorytmu obliczeniowego oraz sformułowania elementu, wyniki były w gruncie rzeczy zbieżne. Porównując wyniki otrzymane metodą *explicit* z metodą

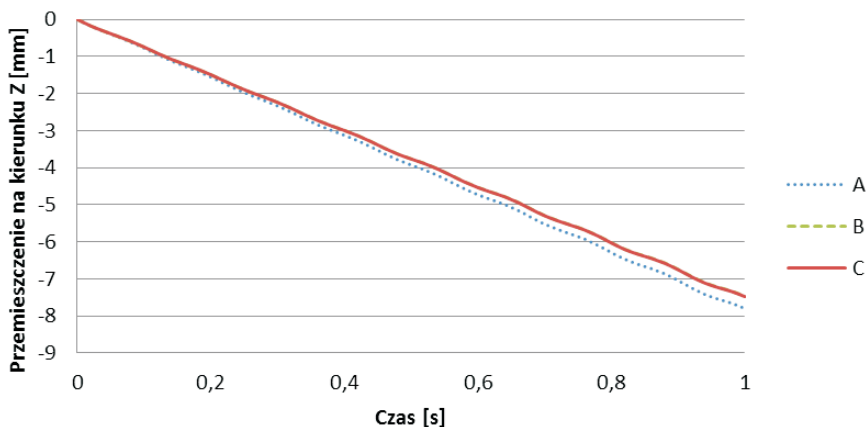
implicit można zauważyć, że sformułowanie elementu Belytschko-Leviatan (rys. 6) dało wyniki najbliższe tym, które otrzymano przy użyciu schematu niejawnego, co może być podstawą do zalecenia tego elementu w analizach *explicit*, w których modelowane powłoki, oprócz momentu gnącego, poddawane są także oddziaływaniu sił tnących.



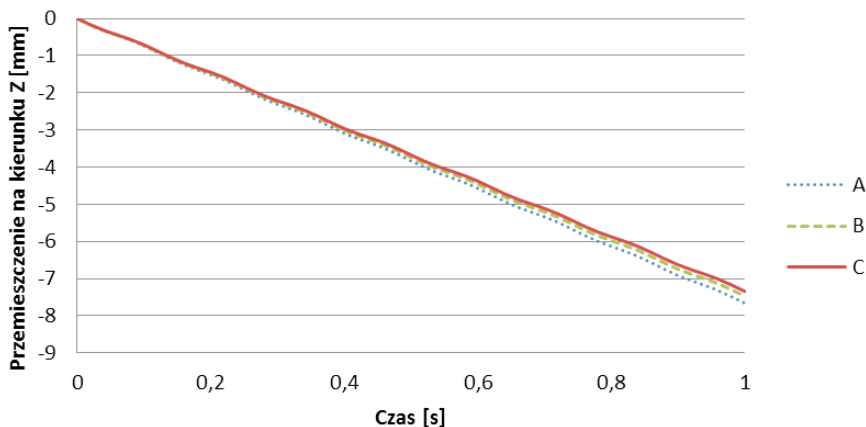
Rys. 15. Przemieszczenie w osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Tsay — algorytm średniego przyśpieszenia



Rys. 16. Przemieszczenie wzdłuż osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg S/R Hughes-Liu — algorytm średniego przyśpieszenia



Rys. 17. Przemieszczenie wzdłuż osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty dla sformułowania wg Fast Huges-Liu — algorytm średniego przyśpieszenia



Rys. 18. Przemieszczenie wzdłuż osi Z węzłów na swobodnej krawędzi płyty w czasie dla sformułowania wg Belytschko-Tsay — algorytm liniowego przyśpieszenia

4. Podsumowanie

Wraz z ogromnym zapotrzebowaniem przemysłu na narzędzia efektywnie wykorzystujące analizy numeryczne, jednym z wiodących problemów jest obecnie ich dokładność i wiarygodność. Nierzadko testy walidacyjne obliczeń numerycznych okazują się niezwykle czaso- i pracochłonne. Zadanie to jest o tyle trudne, że pomimo rozległej dokumentacji technicznej profesjonalnych środowisk MES, niektóre aspekty ich funkcjonowania pozostają tajemnicą handlową firm za nie odpowiedzialnych. Oznacza to, że ugruntowana i usystematyzowana wiedza na temat fizyki analizowanego zjawiska oraz metod numerycznych wykorzystywanych do jego

modelowania jest warunkiem koniecznym, aby wyniki analiz uznać za wiarygodne bez ich weryfikacji na drodze analitycznej oraz lub eksperymentalnej.

Przedstawiony w artykule przypadek niesymetrycznie obciążonej płyty dobrze obrazuje, jak nawet proste zagadnienie z dziedziny mechaniki może okazać się bardzo kłopotliwe, jeżeli do rozwiązania problemu postanowimy wykorzystać metody numeryczne. Należy pamiętać, że zagadnienie to zostało wybrane i specjalnie zdefiniowane w ten sposób, aby zobrazować, z jak dużą rezerwą należy podchodzić do wyników otrzymanych wyłącznie na drodze symulacji MES. Jest to szczególnie ważne, jeżeli wyniki te podane są bez opisu warunków brzegowych oraz parametrów analizy. Dobrą praktyką w modelowaniu zjawisk z wykorzystaniem metod numerycznych jest w początkowej fazie badań uproszczenie analizowanego modelu do tego stopnia, aby możliwa była relatywnie łatwa weryfikacja wstępnych wyników na drodze obliczeń analitycznych. Dopiero w kolejnych etapach uzasadnione będzie zwiększanie poziomu skomplikowania modelu numerycznego.

Artykuł wpłynął do redakcji 7.02.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 10.01.2014 r.

Artykuł powstał dzięki finansowaniu z polsko-norweskiego programu badań, Norway Grants oraz EEA Grants, Pol-Nor/200957/47/2013.

LITERATURA

- [1] JALON G.J., BAYO E., *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The real time Challenge*, Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [2] GERADIN M., RIXEN D., *Mechanical Vibrations: Theory and Applications to Structural Dynamics, Second Edition*, Wiley, John & Sons Incorporated, 1997.
- [3] RIDLOVA, *Seismic Performance of Rail-Counterweight System of Elevator in Buildings*, Appendix A, Blacksburg, Virginia, 2004.
- [4] RAKOWSKI G., KACPRZYK Z., *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.
- [5] HALLQUIST J.O., *LS-DYNA3D Theoretical Manual*, Livermore Software Technology Corporation, Livermore, 1993.
- [6] Livermore Software Technology Corporation, *LS-DYNA Keyword User's Manual*, vol. I, Livermore, 2012.
- [7] *LS-DYNA Implicit Static Analysis Introduction*, http://www.oasys-software.com/dyna/en/training/ls_work/implicit_analysis.zip, stan z 15.01.2014.
- [8] ŁUKASZ M., *Elementy powłokowe*, prezentacja multimedialna, WAT, Warszawa, 26.11.2013.
- [9] *Time integration in LS-DYNA*, <http://www.dynasupport.com/tutorial/ls-dyna-users-guide/time-integration>, stan z 09.01.2014.
- [10] Livermore Software Technology Corporation, *Getting Started with LS-Dyna*, <http://ftp.lstc.com/anonymous/outgoing/trent001/manuals/getting-started/GettingStarted.pdf>, stan z 10.01.2014.
- [11] WOLNY S., SIEMIENIEC A., *Wytrzymałość Materiałów, Część I. Teoria i zastosowanie. Wydanie drugie*, Wydawnictwo AGH, Kraków, 2002.

- [12] BARANOWSKI P., GIELETA R., MAŁACHOWSKI J., DAMAZIAK K., MAZURKIEWICZ Ł., *Split Hopkinson pressure bar impulse experimental measurement with numerical validation*, Metrology and Measurement Systems, 21, 1, 2014, 1-5.
- [13] MAZURKIEWICZ Ł., MAŁACHOWSKI J., BARANOWSKI P., DAMAZIAK K., *Comparison of numerical testing methods in terms of impulse loading applied to structural elements*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 51, 3, 2013, 615-625.
- [14] BARANOWSKI P., BUKAŁA J., DAMAZIAK K., MAŁACHOWSKI J., MAZURKIEWICZ Ł., NIEZGODA T., *Badania numeryczne procesu zderzenia siatki obezwładniającej i ciała sztywnego w locie*, Problemy Mechatroniki: uzbrojenie, lotnictwo, inżynieria bezpieczeństwa, 1, 2013, 59-76.
- [15] SADŁOWSKI P., *Parametryzacje rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody*, praca doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, 2007.
- [16] GAWĘCKI A., *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, Politechnika Poznańska, Poznań, 2003.
- [17] JAKUBOWICZ A., ORŁOŚ Z., *Wytrzymałość materiałów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1978.

M. KRZESZOWIEC, J. MAŁACHOWSKI

Study on the influence of finite element formulation and equation of motion solution scheme on FEM analysis results based on the asymmetrically loaded plate problem

Abstract. Computer simulations of physical phenomena are at the moment common both in science and industry. The possibility of finding approximate solutions for complicated systems of differential equations, mathematically describing issues in the fields of mechanics, physics or chemistry, allows for shorten design and research time, often significantly reducing the need for expensive experimental studies or costly production of prototypes. However, the mentioned prevalence of these methods, particularly the Finite Element Method, resulted in analysis outcomes to be often in advance regarded as accurate ones. The purpose of the article is to showcase, on a simple stress analysis problem, how parameters such as the density of the finite element mesh, finite element formulation or integration scheme significantly influence on the simulation results and how easy it is to end up with the results that do not hold any physical sense, despite the fact that all the basic assumptions of correct analysis (suitable boundary conditions, total system energy stored etc.) have been met. The results of this study can serve as a warning against premature conclusion drawing from calculations carried out by means of FEM simulation.

Keywords: computational mechanics, finite element method, shell elements, numerical integration

