

Justyna SKAKUJ

Absolwentka Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Rzeszowskiego

Czym są atraktory IFS?

Streszczenie. Artykuł ten jest poświęcony konstrukcji, charakterystycznym własnościom oraz głównym definicjom i twierdzeniom związanym z atraktorami. Pierwsza część zawiera podstawowe informacje niezbędne do wprowadzenia Czytelnika w omawianą tematykę. Druga część skupia się na pojęciach istotnych dla zdefiniowania atraktorów, takich jak odwzorowanie zwężające, zbiory niezmiennicze, układ IFS i na przedstawieniu definicji samych atraktorów. W ostatniej części przedstawione zostały przykłady typowych atraktorów.

Słowa kluczowe: atraktor, układ IFS, odwzorowanie zwężające, zbiór niezmienniczy

1. Wstęp

Czy spoglądałeś kiedyś w lustro, trzymając w rękach inne lustro? Jaki obraz można w ten sposób zobaczyć? W podobny sposób zachowuje się atraktor IFS - interesujący obiekt matematyczny, który jest zbudowany z nieskończonej ilości swoich kopii.

Wśród typowych cech atraktorów wyróżnia się m. in. samopodobieństwo, czy konstrukcja z wykorzystaniem przekształceń zwężających. Inną typową własnością atraktorów IFS jest ich niezmienniczość na odwzorowania zwężające, tzn. że po poddaniu określonego atraktora IFS odpowiednio dobranym przekształceniom zwężającym i skonstruowaniu z otrzymanych w ten sposób obiektów nowej figury otrzymamy początkowy atraktor.

Jeszcze zanim pojęcie atraktora zostało zdefiniowane, wielu znanych matematyków badało ich przykłady, np. Waclaw Sierpiński czy George Cantor. Do najbardziej znanych atraktorów należą: zbiór Cantora, krzywa Kocha, trójkąt i dywan Sierpińskiego, kostka Mengera.

Głównym celem poniższego artykułu jest zdefiniowanie pojęcia atraktora IFS, omówienie jego własności i przegląd podstawowych przykładów.

2. Podstawowe pojęcia

W całej pracy będziemy oznaczać przez \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{R} odpowiednio zbiór liczb naturalnych, zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych, zbiór liczb rzeczywistych. Przestrzeń euklidesową n -wymiarową będziemy oznaczać przez \mathbb{R}^n . W tej części artykułu omówimy podstawowe pojęcia istotne dla omawianej tematyki. Dzięki nim wprowadzimy przestrzeń spełniającą wszystkie konieczne warunki dla atraktorów IFS. Przede wszystkim przybliżmy pojęcie odległości. *Odległość (metryka)* to funkcja d , która dowolnej parze elementów przyporządkowuje liczbę rzeczywistą. Każda taka funkcja musi spełniać następujące warunki:

- a) $d(x, y) \geq 0$ dla dowolnych elementów $x, y \in X$;
- b) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
- c) $d(x, y) = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$;
- d) $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Najbardziej intuicyjnym przykładem metryki jest metryka euklidesowa d_e . Za jej pomocą można określić odległość „w linii prostej” między dwoma elementami.

Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d) , gdzie X jest zbiorem, a d metryką. Wszystkie poniższe rozważania będziemy przeprowadzać w przestrzeniach metrycznych.

Konstrukcja niektórych atraktorów IFS wymaga skorzystania z ciągu zstępującego zbiorów. Jest to ciąg (A_n) zbiorów spełniający warunek

$$A_n \supset A_{n+1}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ciąg $(f^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ kolejnych iteracji odwzorowania $f : X \rightarrow X$ będziemy określać w następujący sposób:

$$f^0(x) := x, \quad f^k(x) := f(f^{k-1}(x)) \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Odwzorowania stosowane do konstrukcji atraktorów IFS powinny być ciągłe. Istnieje wiele definicji ciągłości. Tutaj będziemy skupiać się na tej związanej z metryką. Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe w punkcie x_0 , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do $x_0 \in X$, (tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$) ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$ (tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(x_0)) = 0$). Z kolei odwzorowanie ciągłe w każdym punkcie nazywamy ciągłym.

Wyjaśnijmy teraz czym jest przestrzeń metryczna zupełna oraz przestrzeń metryczna zwarta.

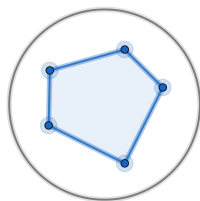
Przestrzenią metryczną zupełną nazywamy taką przestrzeń, w której każdy ciąg spełniający tzw. *warunek Cauchy'ego* jest ciągiem zbieżnym. Jak wygląda ten warunek?

Mówimy, że ciąg (x_n) , gdzie $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geq n_0$ i $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon.$$

Oznacza to, że wraz ze wzrostem wartości indeksu n odległość między wyrazami ciągu dąży do zera. Natomiast przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta, jeżeli każdy ciąg (x_n) elementów $x_n \in X$ zawiera podciąg zbieżny w X . Analogicznie, zbiór $A \subset X$ nazywamy zwartym, jeśli każdy ciąg (x_n) elementów $x_n \in A$ zawiera podciąg zbieżny w A .

W przypadku przestrzeni euklidesowej (\mathbb{R}^n, d_e) zbiór A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony (można go zawrzeć w pewnej kuli) i domknięty (zawiera swój brzeg, np. przedział domknięty).



Rysunek 1. Zbiór zwarty w przestrzeni euklidesowej

Warto jeszcze wspomnieć o pewnych typowych własnościach zbiorów zwartych: zauważmy, że suma skończonej liczby zbiorów zwartych jest również zbiorem zwartym oraz odwzorowanie ciągle przekształca każdy zbiór zwarty na zbiór zwarty.

Za pomocą metryki euklidesowej i innych dość znanych metryk (maksimum, taksówkowa, rzeka) można określić odległość między dwoma punktami. Ale jak określić odległość pomiędzy całymi zbiorami?

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, zbiór $A \subset X$ będzie niepustym zbiorem zwartym oraz niech $x \in X$. Odległość punktu x od zbioru A określamy jako

$$d(x, A) := \min\{d(x, y) : y \in A\}.$$

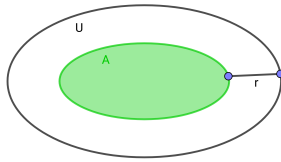
Otoczką domkniętą zbioru $A \subset X$ o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór postaci

$$U(A, r) := \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

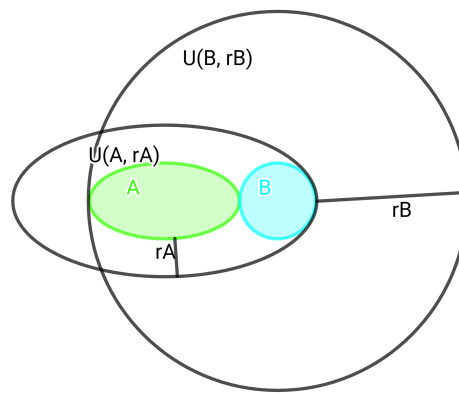
Definicja 1. (zob. [4], str. 29) Oznaczmy przez $K(X)$ zbiór wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów zbioru X . Określmy na $K(X)$ funkcję $d_H : K(X) \times K(X) \rightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób

$$d_H(A, B) := \inf\{r > 0 : A \subseteq U(B, r), B \subseteq U(A, r)\}.$$

Zdefiniowaną powyżej funkcję d_H nazywamy metryką Hausdorffa.



Rysunek 2. Otoczenie zbioru zwanego

Rysunek 3. Metryka Hausdorffa (w tym wypadku $d_H = r_B$)

Jak widać (rysunek 3), odległość Hausdorffa można utożsamiać z kresem dolnym takich promieni otoczeń, dla których zbiór A jest zawarty w otoczeniu zbioru B i zbiór B jest zawarty w otoczeniu zbioru A .

Zauważmy, że funkcja d_H podana w Definicji 1 spełnia warunki metryki.

Przedstawmy tutaj jeszcze dość istotny lemat związany z metryką Hausdorffa.

Lemat 1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech $A_i, B_i \in K(X)$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$. Wówczas zachodzi nierówność

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcup_{i=1}^m B_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(A_i, B_i) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

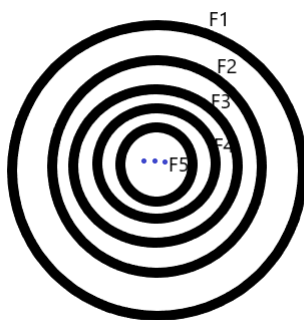
Dowód tego lematu można przeprowadzić metodą indukcji matematycznej.

Wprowadziliśmy w ten sposób nową przestrzeń metryczną: $(K(X), d_H)$ niepustych zwartych podzbiorów przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) z metryką Hausdorffa d_H . Będziemy ją nazywać *przestrzenią*

podzborów zwartych. Można wykazać, że jest ona przestrzenią zupełną. To właśnie ją "zamieszkują" atraktory IFS.

3. Atraktory IFS

Przed wszystkim, zauważmy, że w zwartych przestrzeniach metrycznych dla zstępujących ciągów (F_n) niepustych zbiorów domkniętych zachodzi $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Twierdzenie to zostało przedstawione w [3]. Otrzymany w ten sposób zbiór jest niepusty, co jest niezbędnym warunkiem stworzenia atraktora IFS.



Rysunek 4. Ciąg zstępujący niepustych zbiorów domkniętych

Istotnym pojęciem niezbędnym do wprowadzenia pojęcia atraktora IFS jest kontrakcja. Zgodnie z intuicją, możemy stwierdzić, że jest to odwzorowanie, które zmniejsza odległości.

Definicja 2. (zob. [4], str. 27) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odwzorowanie $C : X \rightarrow X$ nazywamy odwzorowaniem zwężającym (kontrakcją) na X , jeśli istnieje liczba $c \in (0, 1)$, taka że

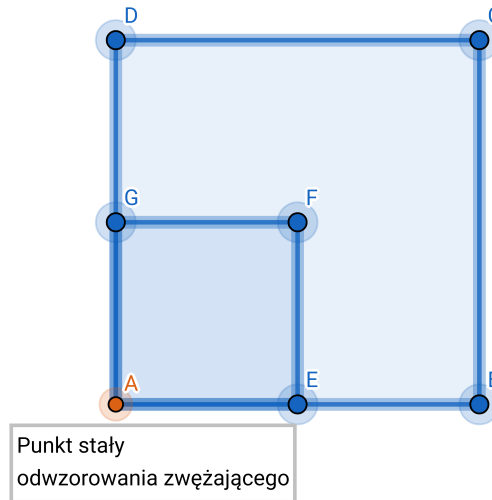
$$d(C(x), C(y)) \leq c \cdot d(x, y), \quad \text{dla każdego } x, y \in X.$$

Liczbę c będziemy nazywali współczynnikiem odwzorowania zwężającego C .

Ponadto, jeżeli $A \in K(X)$, to przyjmujemy oznaczenie $C(A) := \{C(x) : x \in A\}$. Warto zauważyć również, że każde odwzorowanie zwężające jest ciągle.

Innym istotnym zagadnieniem związanym z omawianą tematyką jest pojęcie punktu stałego x_0 odwzorowania f . Zgodnie z definicją, taki punkt spełnia warunek $f(x_0) = x_0$. W przypadku punktu stałego kontrakcji zachodzi poniższe twierdzenie, które często utożsamia się z planem miasta upuszczonym na terytorium tego miasta: z pewnością jeden z punktów mapy upadnie na punkt na ziemi, który reprezentuje.

Twierdzenie 1. (zob. [3], str. 43) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech $C : X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem zwężającym. Wówczas istnieje jednoznacznie określony punkt $x_\infty \in X$, dla którego zachodzi $C(x_\infty) = x_\infty$, tzn. punkt x_∞ jest punktem stałym odwzorowania C .



Rysunek 5. Punkt stały odwzorowania zwężającego

Szkic dowodu: Dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ należy rozpatrzyć dwa przypadki: $C(x_0) = x_0$ lub $C(x_0) \neq x_0$. W drugim przypadku ustalamy ciąg (x_n) , taki, że $x_{n+1} = C(x_n)$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ i wykazujemy, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$ i pewnego $c \in (0, 1)$ zachodzi

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (1 + c + c^2 + \dots + c^{p-1}) \cdot d(x_n, C(x_n)) \leq \frac{1}{1-c} \cdot d(x_n, C(x_n))$$

oraz $d(x_n, C(x_n)) \leq c^n \cdot d(x_0, C(x_0))$. Na mocy $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, C(x_0))$ stwierdzamy, że ciąg (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego oraz dowodzimy, że jest on zbieżny do granicy $x_\infty \in X$, która spełnia warunek

$$C(x_\infty) = C\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_\infty. \quad (3)$$

Ostatecznie, korzystając z dowodu nie wprost dowodzimy jednoznaczności otrzymanego punktu stałego. (powyższy dowód w pełnej wersji, jak i inne dowody tego twierdzenia można znaleźć w [3].)

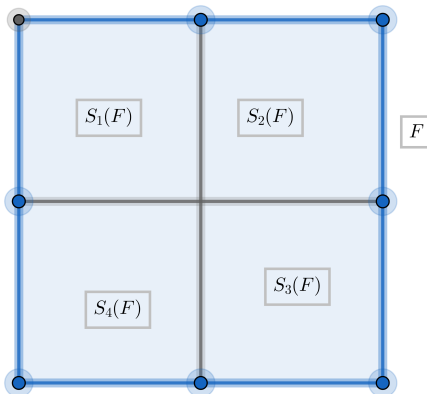
Wprowadźmy teraz niezwykle istotne w tej tematyce pojęcie układu IFS.

Definicja 3. (zob. [4], str. 31) Każdą skończoną rodzinę S_1, \dots, S_m odwzorowań zwężających na X będziemy nazywać iterowanym układem funkcyjnym lub układem IFS (ang. iterated function scheme) i oznaczać

$$\{X, S_1, \dots, S_m\}.$$

Określmy teraz czym jest zbiór niezmienniczy na określone przekształcenie. Zgodnie z intuicją, jest to taki zbiór, który nie zmienia się po poddaniu go temu przekształceniu. Natomiast niepusty zwarty zbiór F nazywamy *zbiorem niezmienniczym na odwzorowania zwięzające* S_1, \dots, S_m , jeśli

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$



Rysunek 6. Zbiór niezmienniczy na odwzorowania zwięzające S_1, \dots, S_4

Ograniczmy teraz nasze rozważania do przestrzeni metrycznej (\mathbb{R}^n, d_e) , gdzie d_e jest metryką euklidesową.

Niech S_i , $i \in \{1, \dots, m\}$ będą odwzorowaniami zwięzającymi. Ustalmy odwzorowanie $S : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ zdefiniowane poprzez

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad (4)$$

dla $E \in K(\mathbb{R}^n)$ oraz niech $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem odwzorowań S , spełniającym założenia zawarte we wzorze (1).

Przejdźmy teraz do przedstawienia i wykazania głównego twierdzenia w tym artykule. Przedstawia ono konstrukcję i typowe własności atraktorów IFS.

Twierdzenie 2. (zob. [2], str. 114) Niech $K(\mathbb{R}^n)$ będzie rodziną niepustych zwartych podzbiorów \mathbb{R}^n oraz niech S_1, \dots, S_m będą odwzorowaniami zwięzającymi na \mathbb{R}^n . Wówczas istnieje jednoznacznie określony zbiór $F \in K(\mathbb{R}^n)$, niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_m , tzn. spełniający warunek

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Ponadto, niech $S : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ będzie odwzorowaniem określonym poprzez (4) i niech $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem kolejnych iteracji odwzorowań S . Wówczas

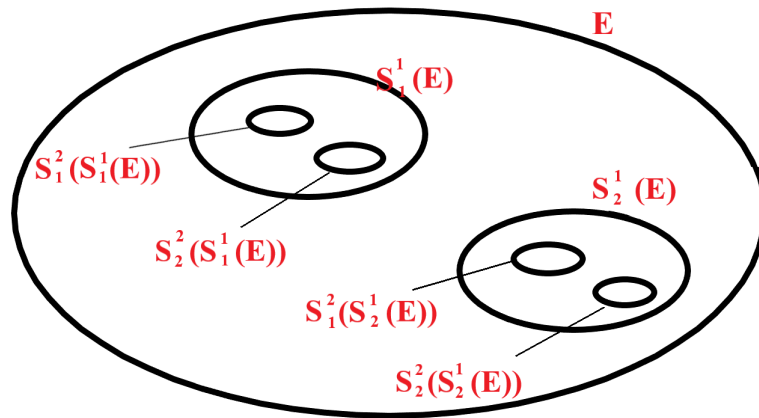
$$F = \bigcap_{k=0}^{+\infty} S^k(E)$$

dla dowolnego zbioru $E \in K(\mathbb{R}^n)$, spełniającego dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$ warunek $S_i(E) \subset E$.

Szkic dowodu: Załóżmy, że S_1, \dots, S_m są odwzorowaniami zwięzającymi na \mathbb{R}^n oraz przekształcenie S dane jest wzorem $S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$. Zauważamy, że dla dowolnego zbioru $E \in K(\mathbb{R}^n)$ i dowolnych takich kontrakcji S_1, \dots, S_m spełniających warunek $S_i(E) \subset E$ zachodzi $S(E) \subset E$. Dowodzimy, że zachodzi też ogólnie $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, czyli ciąg kolejnych odwzorowań S^k jest zstępujący. Następnie wykazujemy, że zbiór $F := \bigcap_{k=0}^{+\infty} S^k(E)$ jest niepusty i zwarty oraz na mocy

$$S(F) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} S^k(E) = F$$

również niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_m . Ostatecznie, korzystając z Lematu 1, dowodzimy, że zbiór F jest określony jednoznacznie (Pełny dowód tego twierdzenia można znaleźć w [2]).



Rysunek 7. Ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ odwzorowań zwięzających

Zauważmy, że określony w powyższym twierdzeniu zbiór F jest odpowiednikiem punktu stałego dla pojedynczej kontrakcji.

Definicja 4. (zob. [1], str. 81) Niech $\{\mathbb{R}^n, S_1, \dots, S_m\}$ będzie iterowanym układem funkcyjnym przestrzeni metrycznej zupełnej. Niech $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ będzie przestrzenią podzbiorów zwartych, a odwzorowanie $S :$

$K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ będzie dane wzorem

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad \text{dla } E \in K(\mathbb{R}^n)$$

Zbiór $\mathbb{A}_\infty \in K(\mathbb{R}^n)$ niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_m , spełniający warunek

$$\mathbb{A}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E)$$

nazywamy atraktorem IFS.

Istnienie powyższej granicy wynika z twierdzenia o punkcie stałym (patrz twierdzenie 1), ponieważ zbiór \mathbb{A}_∞ utożsamia się z punktem stałym kontrakcji.

Zauważmy jeszcze, że jeśli ciąg odwzorowań $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ jest zstępujący (tzn. $S^{k+1}(E) \subset S^k(E)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$), to

$$\mathbb{A}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E),$$

czyli

$$\mathbb{A}_\infty = F.$$

4. Wybrane przykłady atraktorów

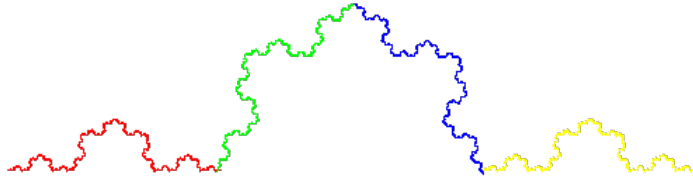
W tej części artykułu zajmiemy się omówieniem kilku typowych przykładów atraktorów IFS. Są one znanymi fraktalami, ale tutaj przedstawimy te ich cechy, które konstytuują je jako atraktory.

4.1. Krzywa Kocha

Niech (\mathbb{R}^2, d_e) będzie przestrzenią metryczną z metryką euklidesową. *Krzywa Kocha* $\mathbb{K}_\infty \subset \mathbb{R}^2$ zdefiniowana poniżej za pomocą wzoru (5) jest generowana przez ciąg odpowiednich przekształceń zbioru początkowego będącego odcinkiem domkniętym (patrz rysunek 8).

Geometrycznie kolejne etapy konstrukcji krzywej Kocha są następujące:

- a) odcinek domknięty dzielimy na trzy odcinki trzykrotnie krótsze od początkowego i usuwamy odcinek środkowy,
- b) powyżej usuniętego odcinka konstruujemy dwa kolejne w ten sposób, aby wraz z usuniętym odcinkiem tworzyły trójkąt równoboczny,
- c) powyższą procedurę powtarzamy dla czterech skonstruowanych odcinków,



Rysunek 8. Krzywa Kocha. Źródło: <http://www.catenasc.pl/afiniczne/index.html>

d) punkty a), b), c) stosujemy nieskończenie wiele razy.

Omówmy proces generowania zbioru \mathbb{K}_∞ za pomocą iterowanego układu funkcyjnego. Niech zbiór $\mathbb{K}_0 \in K(\mathbb{R}^2)$ będzie określony jako

$$\mathbb{K}_0 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \right\}$$

oraz niech $\{\mathbb{R}^2, S_1, \dots, S_4\}$ będzie układem IFS, gdzie odwzorowania S_1, \dots, S_4 przekształcające punkty płaszczyzny są określone wzorami:

$$\begin{aligned} S_1((x, y)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y \right), \\ S_2((x, y)) &:= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \right), \\ S_3((x, y)) &:= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \right), \\ S_4((x, y)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y \right). \end{aligned}$$

Odwzorowania S_1, \dots, S_4 są kontrakcjami, gdyż dla każdych $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$d_e(S_i((x_1, y_1)), S_i((x_2, y_2))) \leq \frac{1}{3} \cdot d_e((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \quad i \in \{1, \dots, 4\},$$

a współczynnik odwzorowań zwięzających $c_i = \frac{1}{3}$ dla $i \in \{1, \dots, 4\}$.

Ustalmy odwzorowanie $S : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$ w sposób następujący

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^4 S_i(A) \quad \text{dla} \quad A \in K(\mathbb{R}^2)$$

oraz ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, dla którego zachodzi $S^0(A) := A$ i $S^k(A) = S(S^{k-1}(A))$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas mamy $S^0(\mathbb{K}_0) = \mathbb{K}_0$. Krzywa Kocha jest granicą ciągu $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, tzn.

$$\mathbb{K}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\mathbb{K}_0). \quad (5)$$

Zbiór $\mathbb{K}_\infty \in K(\mathbb{R}^2)$ oraz

$$\mathbb{K}_\infty = S(\mathbb{K}_\infty) = \bigcup_{i=1}^4 S_i(\mathbb{K}_\infty),$$

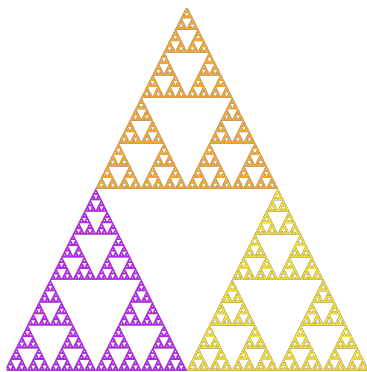
co oznacza, że zbiór \mathbb{K}_∞ jest niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_4 . Wnioskujemy więc, że krzywa Kocha jest atraktorem IFS.

4.2. Trójkąt Sierpińskiego

Niech (\mathbb{R}^2, d_e) będzie przestrzenią metryczną z metryką euklidesową. *Trójkąt Sierpińskiego* $\mathbb{S}_\infty \in \mathbb{R}^2$ zdefiniowany poniżej za pomocą wzoru (6) jest generowany przez ciąg odpowiednich przekształceń zbioru początkowego będącego domkniętym trójkątem równobocznym.

Geometrycznie konstrukcja trójkąta Sierpińskiego (patrz rysunek 9) przebiega następująco:

- domknięty trójkąt równoboczny dzielimy na cztery przystające domknięte trójkąty równoboczne, których krawędź ma długość o połowę krótszą od długości krawędzi figury początkowej,
- usuwamy trójkąt niezawierający żadnego z wierzchołków figury początkowej,
- procedurę powtarzamy dla trzech pozostałych trójkątów,
- powyższą konstrukcję stosujemy nieskończenie wiele razy.



Rysunek 9. Trójkąt Sierpińskiego. Źródło: <http://www.catenasc.pl/afiniczne/index.html>

Przeanalizujmy proces generowania trójkąta Sierpińskiego za pomocą układu IFS. Niech zbiór $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{R}^2$ będzie określony jako

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_0 := & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x \leq 1, 0 \leq y \leq -\sqrt{3}x + \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\mathbb{S}_0 \in K(\mathbb{R}^2)$. Niech $\{\mathbb{R}^2, S_1, \dots, S_3\}$ będzie iterowanym układem funkcyjnym, gdzie odwzorowania S_1, S_2, S_3 przekształcające punkty płaszczyzny określone są wzorami:

$$\begin{aligned} S_1((x, y)) &:= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \\ S_2((x, y)) &:= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right), \\ S_3((x, y)) &:= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \end{aligned}$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowania S_1, S_2, S_3 są kontrakcjami ze współczynnikami $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$.

Ustalmy odwzorowanie $S : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$ takie, że

$$S(A) := \bigcup_{i=1}^3 S_i(A) \quad \text{dla} \quad A \in K(\mathbb{R}^2)$$

oraz ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ taki, że $S^0(A) := A$ i $S^k(A) := S(S^{k-1}(A))$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas mamy $S^0(\mathbb{S}_0) = \mathbb{S}_0$, a zbiór $\mathbb{S}_\infty \subset \mathbb{R}^2$ definiujemy następująco

$$\mathbb{S}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\mathbb{S}_0). \quad (6)$$

Zauważmy, że ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ jest zstępujący. Ponadto, z Twierdzenia 2 wynika, że $\mathbb{S}_\infty \in K(\mathbb{R}^2)$ oraz trójkąt Sierpińskiego jest niezmienniczy na kontrakcje S_1, S_2, S_3 , tzn.

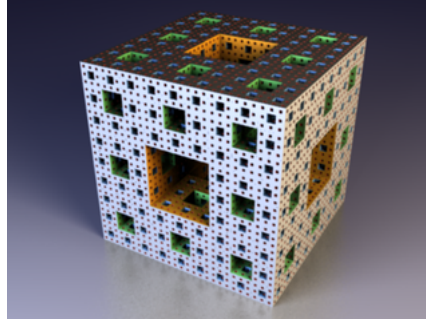
$$\mathbb{S}_\infty = S(\mathbb{S}_\infty) = \bigcup_{i=1}^3 S_i(\mathbb{S}_\infty).$$

Tak więc zbiór $\mathbb{S}_\infty \in K(\mathbb{R}^2)$ jest atraktorem IFS.

4.3. Kostka Menger

Niech (\mathbb{R}^3, d_e) będzie przestrzenią metryczną z metryką euklidesową. *Kostka Menger* $\mathbb{M}_\infty \subset \mathbb{R}^3$ zdefiniowana poniżej za pomocą wzoru (7) jest generowana przez ciąg odpowiednich przekształceń zbioru początkowego będącego sześcianem domkniętym.

Pierwszym etapem konstrukcji jest podział sześcianu domkniętego na 27 przystających domkniętych sześcianów o krawędzi równej $\frac{1}{3}$ krawędzi bryły początkowej. Usuujemy sześcian środkowy oraz sześciany zawierające środki ścian bryły początkowej. Powyższą procedurę stosujemy dla 20 pozostałych sześcianów. Kostkę Menger konstruujemy powtarzając opisaną procedurę nieskończenie wiele razy (patrz rysunek 10).



Rysunek 10. Kostka Mengera. Źródło: <https://plus.maths.org/content/build-mega-menger>

Przedstawmy proces generowania atraktora M_∞ poprzez iterowany układ funkcyjny. Niech $M_0 \subset \mathbb{R}^3$ będzie sześcianem domkniętym o krawędzi długości 1, tzn.

$$M_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Zauważmy, że $M_0 \in K(\mathbb{R}^3)$. Ustalmy układ IFS postaci $\{\mathbb{R}^3, S_1, \dots, S_{20}\}$, gdzie odwzorowania zwiężające S_1, \dots, S_{20} przekształcające punkty przestrzeni \mathbb{R}^3 dane są wzorami:

$$\begin{aligned} S_1((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z\right), & S_2((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z\right), \\ S_3((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z\right), & S_4((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z\right), \\ S_5((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z\right), & S_6((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z\right), \\ S_7((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z\right), & S_8((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z\right), \\ S_9((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\right), & S_{10}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\right), \\ S_{11}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\right), & S_{12}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}\right), \\ S_{13}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), & S_{14}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), \\ S_{15}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), & S_{16}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), \\ S_{17}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), & S_{18}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), \\ S_{19}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right), & S_{20}((x, y, z)) &:= \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Powyższe przekształcenia są odwzorowaniami zwiężającymi, gdzie współczynnik $c_i = \frac{1}{3}$ dla każdego $S_i, i \in \{1, \dots, 20\}$.

Niech odwzorowanie $S : K(\mathbb{R}^3) \rightarrow K(\mathbb{R}^3)$ będzie dane wzorem

$$S(A) := \bigcup_{i=1}^{20} S_i(A), \quad A \in K(\mathbb{R}^3).$$

Ustalmy ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ takich odwzorowań, dla którego $S^0(A) := A$ oraz $S^k(A) := S(S^{k-1}(A))$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $S^0(\mathbb{M}_0) = \mathbb{M}_0$, a kostkę Mengera definiujemy następująco

$$\mathbb{M}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\mathbb{M}_0). \quad (7)$$

Zauważmy, że ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ jest zstępujący. Zbiór \mathbb{M}_∞ należy do $K(\mathbb{R}^3)$. Ponadto, jest niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_{20} , tzn.

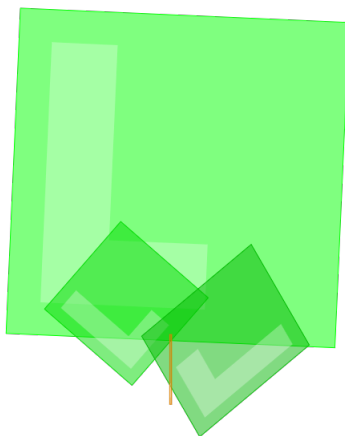
$$\mathbb{M}_\infty = S(\mathbb{M}_\infty) = \bigcup_{i=1}^{20} S_i(\mathbb{M}_\infty).$$

Zatem kostka Mengera jest atraktorem IFS.

4.4. Paproć Barnsley'a

Interesującym przykładem atraktora IFS z powodu łudzącego podobieństwa do naturalnych roślin jest paproć Barnsley'a.

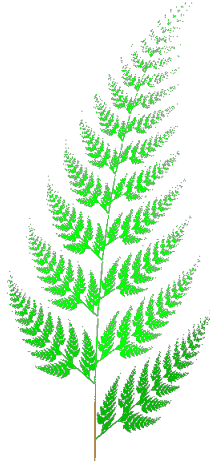
Niech (\mathbb{R}^2, d_e) będzie przestrzenią metryczną z metryką euklidesową. Paproć Barnsley'a $\mathbb{B}_\infty \subset \mathbb{R}^2$ zdefiniowana za pomocą wzoru (8) jest generowana przez ciąg odpowiednich przekształceń zbioru początkowego, np. prostokąta domkniętego.



Rysunek 11. Pierwszy etap konstrukcji paproci Barnsley'a. Źródło: <http://www.catenasc.pl/afiniczne/index.html>

Konstrukcja geometryczna paproci Barnsley'a wygląda następująco:

- stosujemy przekształcenia afiniczne prostokąta początkowego, takie jak skalowanie, translacja, obrót, symetria i ich złożenia otrzymując w ten sposób układ nowych figur, tak jak na rysunku 11,
- te same przekształcenia powtarzamy dla powstałych figur,
- powyższą procedurę powtarzamy nieskończenie wiele razy.



Rysunek 12. Paproć Barnsley'a. Źródło: <http://www.catenasc.pl/afiniczne/index.html>

Omówmy proces generowania paproci Barnsley'a za pomocą układu IFS. Zbiorem początkowym \mathbb{B}_0 może być np. prostokąt domknięty.

Niech $\{\mathbb{R}^2, S_1, \dots, S_4\}$ będzie układem IFS, gdzie odwzorowania S_1, \dots, S_4 przekształcające punkty płaszczyzny określone są wzorami:

$$S_1((x, y)) := (0; 0, 16y),$$

$$S_2((x, y)) := (0, 85x + 0, 04y; -0, 04x + 0, 85y + 1, 6),$$

$$S_3((x, y)) := (0, 2x - 0, 26y; 0, 23x + 0, 22y + 1, 6),$$

$$S_4((x, y)) := (-0, 15x + 0, 28y; 0, 26x + 0, 24y + 0, 44).$$

Można stwierdzić, że odwzorowania powyższe są kontrakcjami.

Ustalamy odwzorowanie $S : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$ dane za pomocą wzoru

$$S(A) := \bigcup_{i=1}^4 S_i(A), \quad A \in K(\mathbb{R}^2)$$

oraz ciąg $(S^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ taki, że $S^0(A) := A$ oraz $S^k(A) := S(S^{k-1}(A))$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $S^0(\mathbb{B}_0) = \mathbb{B}_0$.

Zbiór dany wzorem

$$\mathbb{B}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\mathbb{B}_0) \tag{8}$$

jest paprocią Barnsley'a. Zbiór ten należy do $K(\mathbb{R}^2)$ oraz jest niezmienniczy na odwzorowania S_1, \dots, S_4 , tzn.

$$\mathbb{B}_\infty = S(\mathbb{B}_\infty) = \bigcup_{i=1}^4 S_i(\mathbb{B}_\infty).$$

Wnioskujemy ostatecznie, że paproć Barnsley'a jest atraktorem IFS.

5. Podsumowanie

Atraktory są wykorzystywane w wielu dziedzinach nauki, technologii i sztuki. Z powodu wysokiego stopnia szczegółowości i możliwości generowania figur ludzko podobnych do obiektów występujących w naturze atraktory znalazły zastosowanie chociażby w kompresji danych, grafice komputerowej, czy kinematografii. Stosuje się je także do badania wielu zjawisk zachodzących w naturze jak i w różnorodnych obszarach działalności ludzkiej. Za ich pomocą można przedstawić złożoność roślin, linii brzegowych, naczyń krwionośnych, błyskawic, itp. Dlatego też budzą duże zainteresowanie wśród naukowców i zasługują na dogłębną analizę.

Podziękowania: Chciałabym podziękować recenzentom artykułu za cenne uwagi. Składam również podziękowania dr. Sławomirowi Sorkowi i dr. hab. Jackowi Chudziakowi, prof. UR - odpowiednio promotorowi i recenzentowi mojej pracy magisterskiej, napisanej w trakcie studiów na Uniwersytecie Rzeszowskim, na podstawie której przygotowałam ten artykuł.

Literatura

1. Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Morgan Kaufmann, San Diego - San Francisco - New York - Boston - London - Sydney - Tokyo, 1993.
2. Falconer, K., *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Willey and Sons, Chichester - New York - Brisbane - Toronto - Singapore, 1990.
3. Górnicki, J., *Banach, Cantor i fraktale*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie, Rzeszów **17**, 1996, 41–47.
4. Kudrewicz, J., *Fraktale i Chaos*, Wydawnictwo WNT, Warszawa, 2007.