

Dr inż. Joanna RUT
Katedra Inżynierii i Bezpieczeństwa Pracy
Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
Politechnika Opolska

MODELOWANIE ROZKŁADU WILGOTNOŚCI JEDNORODNEJ MIESZANINY ZIARNISTEJ®

W artykule przedstawiono modelowanie rozkładu wilgotności w złożu jednorodnej mieszaniny ziarnistej zawierającej ziarna pszenicy. Na podstawie opracowanych modeli opisanych prostymi funkcjami matematycznymi, przeprowadzono analizę porównawczą przy pomocy metod statystycznych i wybrano model najlepiej opisujący korelację pomiędzy czasem a wilgotnością w badanej mieszaninie ziarnistej.

Słowa kluczowe: wilgotność, jednorodna mieszanina ziarnista, mieszanie materiałów ziarnistych, ziarno zbóż.

WSTĘP

Większość spotykanych w praktyce przemysłowej układów ziarnistych, to układy niejednorodne różniące się takimi cechami jak wymiar ziaren lub gęstość ziaren [4, 21]. Mieszaniny jednorodne natomiast to z reguły układy składające się z takich składników, których nie można odróżnić wzrokowo.

Ziarno zbóż stanowi jedną z większych grup jednorodnych materiałów ziarnistych. W większości przypadków podlega ono dalszemu przetworzeniu w różnych procesach technologicznych [12]. Jednym z podstawowych procesów technologicznych powszechnie spotykanych w różnych gałęziach przemysłu jest mieszanie materiałów ziarnistych [3, 20].

Odpowiednie poznanie właściwości parametrów roślinnych materiałów ziarnistych może przyczynić się do efektywnego i lepszego ujednorodniania układów ziarnistych [6]. Wilgotność jest parametrem, który istotnie wpływa na własności materiałów pochodzenia roślinnego. Dotyczy to zagadnień jakościowych i smakowych, a także technologicznych, takich jak transport czy przechowywanie [8, 14].

Celem artykułu jest przedstawienie uzyskanych wyników badań dotyczących modelowania rozkładu wilgotności jednorodnej mieszaniny ziarnistej.

CEL BADAŃ

Celem prowadzonych badań własnych było opracowanie modelu matematycznego opisującego rozkład wilgotności w jednorodnej mieszaninie ziarnistej przy różnym udziale procentowym wilgotności, wykorzystując metody statystycznego opisu uzyskanych wyników badań.

METODYKA BADAŃ

Do badań użyto ziarno pszenicy zwyczajnej *Triticum vulgare*. Przygotowanie odpowiedniej jednorodnej mieszanki polegało na zmieszaniu ziarna pszenicy, w kombinacji ziarno suche – wilgotne w udziale procentowym 50/50, 60/40, 70/30. Układy ziarniste poddawano mieszaniu w laboratoryjnym mieszalniku przesypowym. Mieszalnik składał się

z trzech identycznych zbiorników umieszczonych jeden nad drugim (wysokość części cylindrycznej – 500 mm, średnica wewnętrzna – 300 mm, wysokość części stożkowej – 90 mm, średnica otworu wysypowego – 30 mm). Składnikiem kluczowym było ziarno wilgotne, umieszczane każdorazowo w górnej części mieszalnika zasilającego, a składnikiem pozostałym było ziarno suche. Wilgotność względna złoża ziarna mokrego pszenicy wynosiła 16,1% ($\pm 0,5$), a wilgotność złoża ziarna suchego pszenicy wynosiła 11,4% ($\pm 0,5$) [17].

Po napełnieniu zasilającego górnego zbiornika mieszalnika, rozpoczynano proces mieszania w drodze kolejnych przesypów tj. kroków mieszania, opróżniając zbiorniki na drodze wysypu grawitacyjnego (zbiorniki zamieniano kolejno miejscami). W prowadzonych badaniach dla pewności uzyskanych wyników wykonano dziesięć kroków mieszania. Z uwagi na okresowość procesu, czas mieszania wyrażony został poprzez liczbę kolejnych przesypów, czyli tzw. kroków mieszania. W ostatnim etapie każdego kroku mieszania materiał wsypywano do minisilosów przewietrzanych powietrzem atmosferycznym, o objętości 0,0075 m³. Podczas przewietrzania złoża ziarna pszenicy mierzono strumień przepływu powietrza przez złoże badanego ziarna, który wynosił 4,863 m³/h [17].

Minisilosy wyposażono w miernik wilgotności złoża ziarna Rotronic HygroPalm – produkcji szwajcarskiej wraz z sondą pomiarową HygroClip SP05. Sondę pomiarową umieszczono pionowo w środku minisilosu. Przez cały czas trwania pomiarów, badano wilgotność w pomieszczeniu laboratoryjnym wilgotnościomierzem powietrza – Termohigrometrem TA 120. Odczyty dokonywane były przez pierwsze 4 godziny w 15 minutowych interwałach, następnie przez 4 godziny w 30 minutowych interwałach, kolejno przez 6 godzin w 60 minutowych interwałach, przez następne 8 godzin w 120 minutowych interwałach oraz przez kolejnych 50 godzin w 240 minutowych interwałach, za pomocą aplikacji komputerowej DIGITEMP działającej pod kontrolą systemu operacyjnego Linux – kernel 2.6.24.1. [16, 17].

Proces przechowywania zmieszanych układów ziarnistych różniących się wilgotnością w różnych udziałach procentowych prowadzono przez 72 godziny (zgodnie do zaleceń [11, 19]). Przeprowadzono 3 serie badań pomiaru wilgotności w złożu ziarna pszenicy w mieszaninie ziaren suchych i wilgotnych, a po uzyskaniu wyników rozkładu wilgotność

w złożu ziarna jednorodnej mieszaniny ziarnistej [16] dokonano analizy zebranych wyników i przeprowadzono modelowanie matematyczne oraz wnioskowanie.

ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Na podstawie otrzymanych wyników rozkładu wilgotności w złożu jednorodnej mieszaniny ziarnistej przeprowadzono modelowanie uśrednionych danych za pomocą funkcji logarytmicznej, potęgowej, homograficznej.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją określoną wzorem [9]:

$$f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

Funkcją potęgową o wykładniku a nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = x^a \quad (2)$$

Dziedzina funkcji potęgowej zależna jest od wykładnika a . Wykresy funkcji potęgowej będą różne w zależności od wykładnika a .

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję wymierną opisaną wzorem:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (3)$$

gdzie: $ad \neq bc$ i $c \neq 0$,

Przedstawione funkcje stanowiły podstawę do opracowania matematycznego opisu rozkładu wilgotności w złożu ziarna pszenicy (przewietrzanego powietrzem atmosferycznym), w różnych udziałach procentowych. Wilgotność początkową dla ziaren pszenicy określono poniższym wzorem:

$$X_{ap} = z_1 X_1 + z_2 X_2 \quad (4)$$

gdzie: X_{ap} – wilgotność początkowa [%],
 z_i – udział masowy składnika [%],
 X_i – wilgotność masowa udziału [%].

Poniżej przedstawiono postaci modeli opisujące wilgotność dla przewietrzanego ziarna pszenicy w różnych udziałach procentowych.

Model korelacyjny A – logarytmiczny dla ziarna pszenicy w udziałach procentowych 50/50, 60/40, 70/30.

$$X_a = a \cdot \ln(t) + X_{ap} \quad (5)$$

gdzie: X_a – wilgotność [%],
 a – parametr adaptacyjny,
 X_{ap} – wilgotność początkowa [%],
 t – czas w minutach $t \in <1; 4320>$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 50/50

$$X_a = -0,4775 \ln(t) + 13,7 \quad (6)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 60/40

$$X_a = -0,4115 \ln(t) + 13,3 \quad (7)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 70/30

$$X_a = -0,3225 \ln(t) + 12,8 \quad (8)$$

Tabela 1. Przykładowe wyniki uzyskanych wartości obliczeniowych wilgotności dla ziarna pszenicy w badanych udziałach procentowych

Table 1. Example results calculated values for wheat grain humidity in various percentage proportions

Nazwa	udział procentowy	X_{ap} [%]	X_a [%]					
			15 [min]	360 [min]	720 [min]	1440 [min]	2880 [min]	4320 [min]
Pszenica	50/50	13,7	12,46	10,94	10,61	10,28	9,96	9,75
	60/40	13,3	12,19	10,88	10,59	10,31	10,02	9,86
	70/30	12,8	11,93	10,90	10,68	10,45	10,23	10,10

Źródło: Opracowanie własne

Model korelacyjny B – potęgowy dla ziarna pszenicy udziałach procentowych 50/50, 60/40, 70/30.

$$X_a = X_{ap} t^a \quad (9)$$

gdzie: X_a – wilgotność [%],
 a – parametr adaptacyjny,
 X_{ap} – wilgotność początkowa [%],
 t – czas w minutach $t \in <1; 4320>$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 50/50

$$X_a = 13,7 t^{0,038} \quad (10)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 60/40

$$X_a = 13,3 t^{0,034} \quad (11)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 70/30

$$X_a = 12,8 t^{0,028} \quad (12)$$

Tabela 2. Przykładowe wyniki uzyskanych wartości obliczeniowych wilgotności dla ziarna pszenicy w badanych udziałach procentowych

Table 2. Example results calculated values for wheat grain humidity in various percentage proportions

Nazwa	udział procentowy	X_{ap} [%]	X_a [%]					
			15 [min]	360 [min]	720 [min]	1440 [min]	2880 [min]	4320 [min]
Pszenica	50/50	13,7	12,36	10,95	10,67	10,39	10,12	9,97
	60/40	13,3	12,13	10,89	10,63	10,38	10,14	10,00
	70/30	12,8	11,87	10,85	10,65	10,44	10,24	10,13

Źródło: Opracowanie własne

Model korelacyjny C – homograficzny dla ziarna pszenicy udziałach procentowych 50/50, 60/40, 70/30.

$$X_a = \frac{at}{t+c} + X_{ap} \quad (13)$$

gdzie: X_a – wilgotność [%],
 a, c – parametr adaptacyjny,
 X_{ap} – wilgotność początkowa [%],
 t – czas w minutach $t < 4320$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 50/50

$$X_a = \frac{-4,1t}{1,1t + 150} + 13,7 \quad (14)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 60/40

$$X_a = \frac{-4,3t}{1,3t + 150} + 13,3 \quad (15)$$

Ziarno pszenicy – udział procentowy 70/30

$$X_a = \frac{-2,9t}{1,1t + 160} + 12,8 \quad (16)$$

Tabela 3. Przykładowe wyniki uzyskanych wartości obliczeniowych wilgotności dla ziarna pszenicy w badanych udziałach procentowych

Table 3. Example results calculated values for wheat grain humidity in various percentage proportions

Na- zwa	udział procentowy	X_{ap} [%]	X_a [%]					
			15 [min]	360 [min]	720 [min]	1440 [min]	2880 [min]	4320 [min]
Pszenica	50/50	13,7	13,33	10,99	10,57	10,30	10,14	10,08
	60/40	13,3	12,92	10,79	10,45	10,24	10,12	10,07
	70/30	12,8	12,55	10,92	10,61	10,40	10,29	10,24

Źródło: Opracowanie własne

Uzyskane modele korelacyjne porównano za pomocą statystyk porównawczych. Współczynnik determinacji R^2 nie informuje nas o tym, które zmienne są istotne. Przy dodawaniu zmiennych do modelu wartość ta stale rośnie. Okazuje się jednak, że wzrostowi R^2 często towarzyszy brak istotności dodawanych zmiennych niezależnych [10,18]. Skorygowany współczynnik determinacji nie został wprowadzony ze względu na zastosowanie kryterium Akaike (AIC), które jest dokładniejszym kryterium informacyjnym [2]. Kryterium to wprowadza „karanie” funkcji wiarygodności tak, żeby prostsze modele były preferowane. W przypadku dopasowywania do danych modelu o q parametrach, kryterium to zdefiniowane jest jako $D - \alpha q$, gdzie D jest odchyleniem, a q jest parametrem rozproszenia. Można pokazać, że $\alpha \approx 2$ prowadzi do minimalnych błędów w predykcji. Jednak w sytuacji, gdy q jest stałe wartość $\alpha \approx 4$ jest odpowiedniejsza, odpowiada bowiem w przybliżeniu testowaniu parametru na poziomie 0,05 [13]. Wybieramy ten model dla którego wyrażenie to jest minimalne. Czas potrzebny do obliczenia statystyki AIC może być dłuższy niż dla innych

kryteriów, otrzymujemy jednak zazwyczaj dokładniejsze wyniki [13] ogólnie:

$$AIC = n \log \left(\frac{SSR}{n} \right) + 2k + n(1 + \log 2\pi) \quad (17)$$

gdzie: n – liczba obserwacji,
 k – liczba zmiennych,
 SSR – suma kwadratów odchyłeń regresyjnych.

Uzyskane wyniki dla przewietrzanego ziarna pszenicy w różnych udziałach procentowych przedstawiono w tabeli 4.

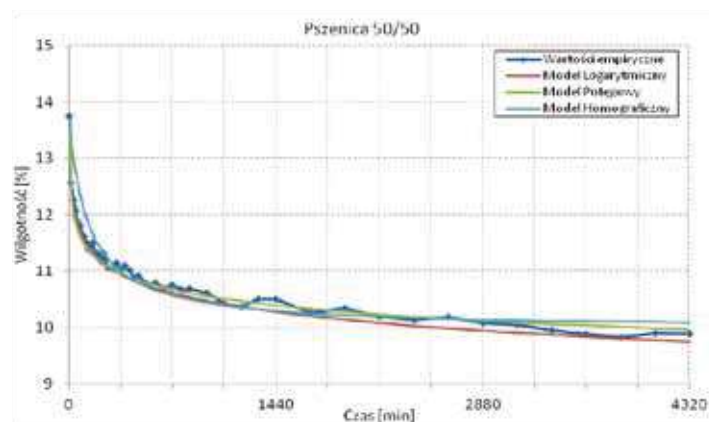
Tabela 4. Zestawienie wyników obliczeń dla przewietrzanego ziarna pszenicy w różnych udziałach procentowych 50/50, 60/40, 70/30

Table 4. Statement of calculation results in the difference ventilated wheat in various percentage proportions of in 50/50, 60/40, 70/30

Przewietrzane ziarno pszenicy				
Model	Typ modelu	Udziały procentowe	R^2	AIC
A	Logarytmiczny	50/50	0,958	-24,831
		60/40	0,965	-21,984
		70/30	0,969	-23,298
B	Potęgowy	50/50	0,924	-15,627
		60/40	0,949	-11,482
		70/30	0,938	-17,245
C	Homograficzny	50/50	0,898	25,718
		60/40	0,886	31,469
		70/30	0,892	29,487

Źródło: Opracowanie własne

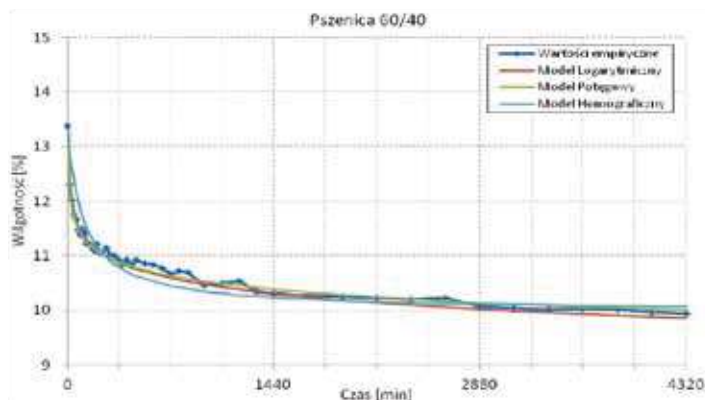
Zestawienie wyników obliczeń dla wszystkich modeli, względem poszczególnych udziałów procentowych ziaren pszenicy, zobrazowano graficznie (rys.1 do rys. 4) wraz z ujętymi danymi empirycznymi.



Rys. 1. Wyniki obliczeń modele A, B, C, wraz z wartościami empirycznymi rozkładu wilgotności przewietrzanego ziarna pszenicy w udziale procentowym 50/50.

Fig. 1. Calculation results for A, B, C models together with the empirical values humidity distribution ventilated wheat in percentage proportions of in 50/50.

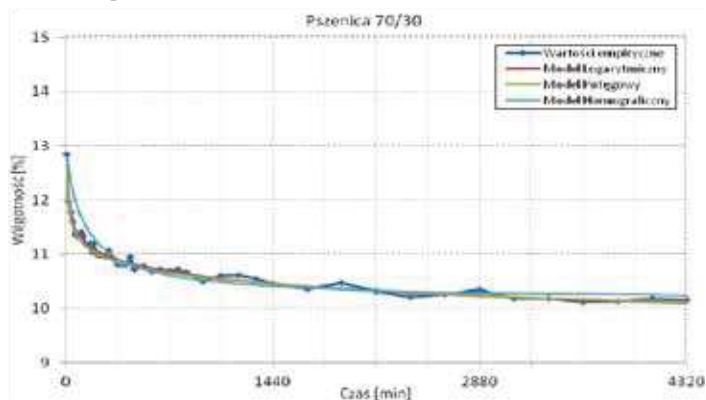
Źródło: Opracowanie własne



Rys. 2. Wyniki obliczeń wg modeli A, B, C, wraz z wartościami empirycznymi rozkładu wilgotności przewietrzanego ziarna pszenicy w udziale procentowym 60/40.

Fig. 2. Calculation results for A, B, C models together with the empirical values humidity distribution ventilated wheat in percentage proportions of in 60/40.

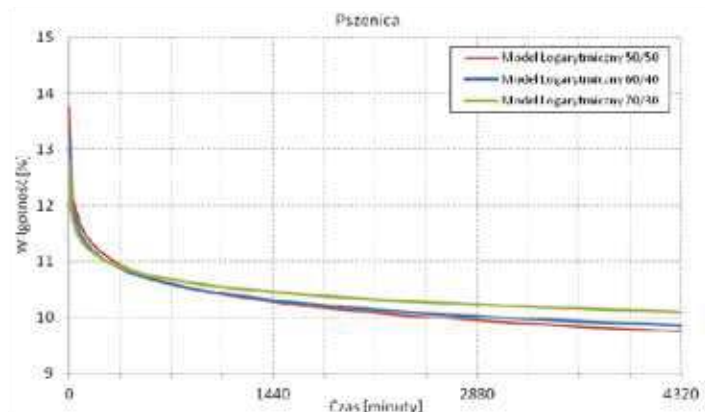
Źródło: Opracowanie własne



Rys. 3. Wyniki obliczeń wg modeli A, B, C, wraz z wartościami empirycznymi rozkładu wilgotności przewietrzanego ziarna pszenicy w udziale procentowym 70/30.

Fig. 3. Calculation results for A, B, C models together with the empirical values humidity distribution ventilated wheat in percentage proportions of in 70/30.

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 4. Zestawienie danych doświadczalnych względem modelu logarytmicznego modelowego rozkładu wilgotności dla przewietrzanego ziarna pszenicy w udziałach procentowych 50/50, 60/40, 70/30.

Fig. 4. Graph showing the model distribution of moisture for ventilated wheat in various percentage proportions of in 50/50, 60/40, 70/30.

Źródło: Opracowanie własne

Badając korelację pomiędzy wilgotnością a czasem przewietrzanego ziarna pszenicy w różnych udziałach procentowych można zauważyć, że spośród trzech zaproponowanych modeli najlepiej opisującym modelem jest model logarytmiczny (tabela 4).

$$X_a = a \cdot \ln(t) + X_{ap} \quad (18)$$

gdzie: X_a – wilgotność [%],

a – parametr adaptacyjny,

X_{ap} – wilgotność początkowa [%],

t – czas w minutach $\epsilon < 1; 4320 >$

Cechuje się on największym współczynnikiem R^2 spośród pozostałych modeli przy równoczesnej najmniejszej wartości kryterium Akaike AIC. Model A – logarytmiczny jest modelem statystycznym wykrywającym systematyczną tendencję w danych, pozostawiając na boku zmienność losową [1]. Na rys. 4 przedstawiono rozkład modelowej wilgotności dla ziaren pszenicy w badanych udziałach procentowych.

Do badania aktualności i przydatności modelu stosuje się współczynnik Janusowy [15]. Na jego podstawie określić można przydatność modelu do stosowania w szerszym zakresie wilgotności.

$$J^2 = \frac{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (y_t - y_t^P)^2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} \quad (19)$$

gdzie: n – liczba obserwacji,

h – horyzont prognozy,

y_t – wartość empiryczna badanej zmiennej w momencie t ,

\hat{y}_t – wartość modelowa badanej zmiennej w momencie t ,

y_t^P – wartość prognozowania badanej zmiennej dla momentu t .

W liczniku współczynnika Janusowego występuje wariancja średniego błędu predykcji ex post, a w mianowniku wariancja resztowa modelu. Jeżeli $J^2 < 1$ to oznacza, że opracowany model jest odpowiedni [5,7]. W celu przydatności modelu w późniejszym okresie czasu należy obliczyć współczynnik Janusowy [15].

WNIOSKI

1. Na podstawie przeprowadzonych badań i uzyskanych wyników stwierdzono, że model korelacyjny A – logarytmiczny dobrze opisuje rozkład wilgotności w przewietrzonym złożu ziaren pszenicy w czasie suszenia 72 godzin.
2. Wysoki współczynnik determinacji R^2 i najniższy wskaźnik informacyjny AIC informują o dobrym dopasowaniu modelu logarytmicznego.

3. Badając współzależności procesowe za pomocą prostych funkcji matematycznych można ocenić rozpoznane powiązania oraz opisać w miarę dokładnie nieznanie dotychczas współzależności procesowe.

LITERATURA

- [1] **ACZEL A. D. 2005.** Statystyka w zarządzaniu. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [2] **AKAIKE H. 1973.** Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, In Proceedings of the 2nd International Symposium on Information, edited by Petrov B.N. and Czaki F. Budapest, 267-281.
- [3] **BOSS J. 1987.** Mieszanie materiałów ziarnistych, PWN Warszawa, 8.
- [4] **BOSS J. 2002.** Współczesne problemy mieszania materiałów ziarnistych. Inżynieria i Aparatura Chemiczna, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej nr 4, 31-32.
- [5] **BRONSZTEJN J. N., SIEMIENDIAJEW K. A., MUSIOL G., MUHLIG H. 2007.** Nowoczesne kompendium matematyki. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [6] **FRĄCZEK J., ŚLIPEK Z. 2006.** Modele roślinnych struktur ziarnistych. Inżynieria Rolnicza 12, 145-154.
- [7] **GAJDA J.B. 2004.** Ekonometria. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [8] **GOŹDZIEWSKA M., PIEKARSKI D., ANDREJKO D. 2007.** Wpływ wilgotności na wybrane właściwości mechaniczne ziarna pszenicy. Inżynieria Rolnicza, 5(93), 179-187.
- [9] **HELLWING Z. 1998.** Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [10] **KUFEL T. 2004.** Ekonometria – rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem program GRETJ. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [11] **KUSIŃSKA E. 1998.** Zjawiska towarzyszące migracji wilgoci w silosie zbożowym. Zesz. Problemy Postępów Nauk Rolniczych z. 454, 521-528.
- [12] **LASKOWSKI J., SKONECKI S. 2001.** Pomiar współczynnika tarcia wewnętrznego pszenicy o różnej wilgotności i stopniu rozdrobnienia. Acta Agrophysica, 46, 95-104.
- [13] **MAGIERA R. 2007.** Modele i metody statystyki matematycznej cz. II Wnioskowanie statystyczne, Wydawnictwo GiS Wrocław.
- [14] **MOLEND A., HORABIK J. 2003.** Właściwości fizyczne sypkich surowców spożywczych istotne w procesach magazynowania i przewietrzania. Operacje Mechaniczne Inżynierii Procesowej, Łódź-Stok, 78-93.
- [15] **NOWAK J. 1974.** Współczynnik Janusowy jako narzędzie badania stabilności modelu ekonometrycznego; [w] Przegląd Statystyczny (z. 4), 595-602.
- [16] **RUT J. 2013.** Badanie rozkładu temperatury i wilgotności w złożu jednorodnej mieszaniny ziarnistej. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, Warszawa 1.
- [17] **RUT J. 2011.** Efekty suszenia materiałów ziarnistych w mieszalniku przesypowym. Rozprawa doktorska, Politechnika Opolska, Opole.
- [18] **STANISZ A. 2007.** Przystępny kurs statystyki, modele liniowe i nieliniowe. Tom 2, Wydawnictwo StatSoft Polska Kraków.
- [19] **ŚCIBISZ M. 2008.** Rozkład wilgotności w mieszaninie materiałów organicznych. Annales UMCS, Agricultura Vol 63 nr 2, Warszawa, 8-14.
- [20] **TUKIENDORF M. 2003.** Wpływ zmiany skali urządzenia mieszającego na wyniki procesu mieszania materiałów ziarnistych podczas wysypu ze zbiornika. XI Ogólnopolska Konferencja: Postęp w Inżynierii Żywności, Frombork, 9-12.
- [21] **TUKIENDORF M. 2002.** Zagadnienia rozkładu koncentracji składników niejednorodnej mieszaniny ziarnistej podczas mieszania w przesypie. Inżynieria i Aparatura Chemiczna nr 4. IZACAX 41 (33), 139-140.

MODELING OF HUMIDITY DISTRIBUTION IN THE LAYER OF HOMOGENEOUS GRANULAR MIXTURE

SUMMARY

The article presents modeling of humidity distribution in the homogeneous layer of mixture consisting of wheat grain. Based on the models described with a mathematical functions, was performed an analysis using statistical methods and select the model that are best connected with the correlation between time and humidity in the investigated granular mixture.

Key words: humidity, homogeneous granular mixture, mixing of granular materials, cereal grains.