

## OCENA NIEPEWNOŚCI POMIARÓW O ROZKŁADZIE TRAPEZOWYM METODĄ MAKSYMALIZACJI WIELOMIANU I ANALIZA JEJ EFEKTYWNOŚCI

Serhii W. ZABOLOTNII<sup>1</sup>, Zygmunt Lech WARSZA<sup>2</sup>

1. Cherkaskij Nacjonalnyj Tekhnichnij Universitet, Ukraina  
tel.: +38 0503138697, e-mail: s.zabolotnii@chdtu.edu.ua
2. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP  
tel.: +48 692033661, e-mail: zlw@op.pl

**Streszczenie:** Omówiono w skrócie efektywność estymatorów menzurandu dla próbek danych pomiarowych pobranych z populacji o symetrycznym rozkładzie trapezowym Trap. Rozpatrzono użycie niekonwencjonalnej metody maksymalizacji wielomianu stochastycznego (PMM) do wyznaczania estymatorów wartości i odchylenia standardowego menzurandu próbek z rozkładu trapezowego Trap o różnym stosunku podstaw. Oszacowano niepewności standardowe wartości średniej, środka rozpięcia i estymatora menzurandu wyznaczonego metodą PMM z danych tych próbek z użyciem kumulantów i za pośrednictwem momentów centralnych. Metodą symulacji Monte Carlo (MC) dokonano porównania tych ocen z obliczanymi klasycznie ze wzorów rozkładu dla średniej wg Przewodnika GUM oraz środka rozpięcia i ich średniej. Do porównania efektywności, dla każdej metody wyznaczono granice obszaru o najmniejszej wariancji w funkcji liczby danych próbki i stosunku podstaw trapezu.

**Słowa kluczowe:** menzurand, estymata, odchylenie standardowe, rozkład trapezowy, kumulanty, wielomian stochastyczny.

### 1. WSTĘP

Zjawiska o charakterze przypadkowym zachodzące w badanym obiekcie, systemie pomiarowym i otoczeniu są przyczyną pojawienia się losowej składowej w sygnale pomiarowym menzurandu. Da zwiększenia dokładności pomiary powtarza się, lub też ciągły w czasie sygnał jest automatycznie zwykle regularnie próbkowany. Otrzymuje się próbkę pomiarową o losowym rozrzucie wartości danych. Do jego modelowania, obok normalnego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego funkcją Gaussa trzeba stosować też inne rozkłady. Według zaleceń Przewodnika GUM [1] wynik pomiarów ocenia się, jako wartość średnią i rozszerzoną niepewność pomiaru wyznaczaną z odchylenia standardowego tak jak dla rozkładu normalnego. Taka ocena niepewności pomiarów nie jest jednak najbardziej efektywna dla próbek z populacji o rozkładach niegaussowskich. Omówimy to na przykładzie symetrycznego rozkładu trapezowego Trap, stosowanego w modelowaniu systemów i przyrządów pomiarowych z elementami o przedziałowej tolerancji parametrów i przy dyskretyzacji sygnałów. Jest on splotem dwu rozkładów równomiernych o różnej szerokości. Krańcowe przypadki - to rozkład równomierny i trójkątny.

W pracach [2-4] metodą symulacji Monte Carlo (MC) porównano efektywność wartości średniej  $\bar{X}$ , środka rozstępu  $q_{V/2}=0,5(x_{max}-x_{min})$  i mediany  $X_{med}$  jako jednoelementowych (1C) estymatorów menzurandu dla próbek

danych z populacji o rozkładach w postaci symetrycznych trapezów o bokach liniowych i krzywoliniowych wklęsłych. W Suplemencie 1 do GUM [1] są one oznaczone jako Trap i CTrap. Wyznaczono standardowe odchylenia (SD) tych trzech estymatorów w funkcji liczby  $n$  danych próbki i stosunku  $\beta \in [0;1]$  długości podstaw trapezu. Dla próbek z rozkładu Trap wartość SD średniej  $\bar{X}$  jest najmniejsza w przedziale  $0 < \beta < 0,35$ . Dla większych  $\beta$ , tj. dla  $0,35 < \beta \leq 1$  mniejszą wartość SD ma środek rozstępu  $q_{V/2}$ . Ponadto w [5, 6] wykazano, że dla próbek z rozkładu Trap w całym zakresie  $\beta$  jeszcze mniejsza i to nawet o 20%, jest wartość SD dwuelementowego (2C) estymatora  $0,5(\bar{X}+q_{V/2})$ . Syntezę tych badań i porównanie estymatorów 1C i 2C zawiera monografia [7] (rozdziały 7 -9).

W praktyce, w szeregu przypadkach rodzaj rozkładu danych pomiarowych menzurandu nie jest znany a priori. Zaś jego jednoznaczna identyfikacja wymaga próbki o dużej liczbie danych. Zbadamy metodą MC dla próbek z rozkładu Trap, jakie wyniki można uzyskać alternatywną metodą maksymalizacji wielomianu o skrócie PMM (od *Polynomial Maximization Method*) [8]. Jej równania są prostsze, gdy wyrazi się je w kumulantach, które można wyznaczyć z centralnych momentów próbki. Kumulanty powyżej rzędu czwartego dla rozkładu normalnego są równe zeru.

### 2. MATEMATYCZNE UJĘCIE PROBLEMU

Poniżej symbolem  $\theta$  będzie oznaczać się estymator wartości menzurandu wyznaczany metodą PMM z próbki rozproszonych danych pomiarowych. Wartość tę estymuje się przez statystyczną analizę wektora  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Zakłada się, że dane losowe  $x_i$  są niezależne, pochodzą z tego samego rozkładu i ich wartości opisane są modelem  $\xi = \theta + \xi_0$ . W modelu tym  $\xi_0$  jest wycentrowaną zmienną losową. Rozpatrzy się próbki z populacji o rozkładzie Trap, tj. w postaci symetrycznego trapezu o liniowych bokach, szerokości dolnej podstawy  $\lambda$  i stosunku długości podstaw  $\beta$ . Poprzez próby statystyczne, dokonywane  $M = 10^4$  razy metodą MC, wyznaczy się estymaty parametrów próbki metodą wielomianową PMM, tj. niepewność i zbieżność jej rozkładu empirycznego do funkcji Gaussa, w funkcji liczby danych  $n$  próbki. Porówna się też je z ocenami odchylenia standardowego (SD) innych estymatorów menzurandu.

### 3. OCENY METODY PMM I ICH WŁAŚCIWOŚCI

#### 3.1. Podstawy teoretyczne metody PMM

W metodzie maksymalizacji wielomianu PMM podanej przez Y. Kunchenko [8], oszacowaniem wartości badanego parametru skalarnego  $\theta$  jest rozwiązanie równania

$$\sum_{i=1}^s h_i(\theta) [\hat{\alpha}_i - \alpha_i(\theta)] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $s$  - rząd wielomianu użytego do szacowania parametrów,  $\alpha_i(\theta)$  i  $\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i$  - teoretyczne i estymowane metodą PMM momenty centralne próbki  $i$ -tego rzędu,  $h_i(\theta)$  - współczynniki wagi.

Współczynniki  $h_i(\theta)$  (dla  $i = \overline{1, s}$ ) wyznacza się rozwiązując układ algebraicznych równań liniowych rzędu  $s$  podany dla warunku minimalizacji wariancji poszukiwanej estymaty wartości parametru  $\theta$  [8, 9], a mianowicie:

$$\sum_{i=1}^s h_i(\theta) F_{i,j}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \alpha_j(\theta), \quad j = \overline{1, s}, \quad (2)$$

gdzie  $F_{i,j}(\theta) = \alpha_{i+j}(\theta) - \alpha_i(\theta)\alpha_j(\theta)$ ,  $i, j = \overline{1, s}$ .

W [8] wykazano, że stanowiące rozwiązania równania (1) wielomianowe oceny wartości mierzand  $\hat{\theta}$ , są zgodne i asymptotycznie nieobciążone.

#### 3.2. Estymatory dla symetrycznych rozkładów zmiennych losowych wg metody PMM

W [8] wykazano, że oszacowanie wartości składowej stałej metodą PMM w przypadku wielomianu (1) stopnia  $s=1$  jest równoważne oszacowaniu średniej arytmetycznej dla dowolnego rozkładu zmiennej losowej. Dla rozkładów symetrycznych wartości nieparzystych kumulantów  $\kappa$  i momentów  $m$  są równe zero. Dla wielomianów stopnia  $s=2$  estymaty parametrów są takie jak wg GUM [1]. W pracy [9] (i rozdz. 10 monografii [7]) wykazano, że wyznaczenie estymat parametrów mierzand wg algorytmu PMM dla wielomianu (1) stopnia  $s=3$  i symetrycznych rozkładów danych wymaga rozwiązania równania o postaci:

$$h_1 \sum_{v=1}^n (x_v - \theta) + h_2 \sum_{v=1}^n [x_v^2 - (\theta^2 + \kappa_2)] + h_3 \sum_{v=1}^n [x_v^3 - (\theta^3 + 3\theta\kappa_2)] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (3)$$

Współczynniki  $h_1 - h_3$  minimalizujące wariancję parametru  $\theta$ , znajduje się jako rozwiązanie układu równań algebraicznych liniowych typu (2). Są one opisane wyrażeniami

$$h_1 = \frac{1}{\Delta_3} [3\theta^2\gamma_4 - \kappa_2(6+12\gamma_4 + \gamma_6)], \quad h_2 = \frac{-3}{\Delta_3} \theta\gamma_4, \quad h_3 = \frac{\gamma_4}{\Delta_3} \quad (4)$$

gdzie:  $\Delta_3 = \kappa_2^2(\gamma_4^2 - 9\gamma_4 - \gamma_6 - 6)$ ; kumulanty:  $\kappa_1 = m_1$ ,  $\kappa_2 = m_2$ ,  $\kappa_4 = m_4 - 3m_2^2$ ,  $\kappa_6 = m_6 - 15m_2m_4 + 30m_2^3$ ; współczynniki kumulantów:  $\gamma_4 = \kappa_4 / \kappa_2^2$ ,  $\gamma_6 = \kappa_6 / \kappa_2^3$ .

Podstawienie  $h_1 - h_3$  do (1) daje równanie 3-go stopnia

$$a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad (5)$$

gdzie:  $a = \gamma_4$ ,  $b = -3\gamma_4\hat{\alpha}_1$ ,  $d = (6+12\gamma_4 + \gamma_6)\kappa_2\hat{\alpha}_1 - \gamma_4\hat{\alpha}_3$ ,  $c = 3\gamma_4\kappa_2 - (6+12\gamma_4 + \gamma_6)\kappa_2 + 3\gamma_4[\hat{\alpha}_2 - \kappa_2]$ .

We wzorach (1) i (5) statystyki  $\hat{\alpha}_i$  (dla  $i = \overline{1, 3}$ ) są momentami początkowymi próbki, zaś  $\kappa_2, \gamma_4$  i  $\gamma_6$  - to parametry teoretyczne: kumulant 2-go rzędu i współczynniki kumulantów rzędów 4 i 6 zmiennej losowej  $\xi_0$ . Równanie (5) rozwiązuje się za pomocą wzorów Cardana [7- 9].

#### 3.3. Dokładność estymat odchylenia standardowego według metody PMM dla rozkładów symetrycznych

Estymator wariancji  $\sigma_{\theta}^2$  średniej arytmetycznej (taki sam jak dla metody PMM przy  $s=1$ ) nie zależy od wartości oszacowania parametru  $\theta$ . Jest on określony dla próbki przez wariancję drugiego rzędu  $m_2$  równą kumulantowi  $\kappa_2$  i przez liczbą jej danych  $n$ , według wzoru (6)

$$\sigma_{(\theta)1}^2 = \frac{\kappa_2}{n}. \quad (6)$$

Wykorzystując pojęcie wielkości informacji uzyskanej o badanym parametrze otrzymano wyrażenie analityczne [8], [9] dla asymptoty wariancji  $\sigma_{(\alpha)3}^2$  przy  $n \rightarrow \infty$ , oszacowanej metodą PMM. Opisuje ją poniższy wzór (7):

$$\sigma_{(\theta)3}^2 = \frac{\kappa_2}{n} \left[ 1 - \frac{\gamma_4^2}{6 + 9\gamma_4 + \gamma_6} \right]. \quad (7)$$

Stąd otrzymuje się współczynnik stosunku wariancji

$$g_{(\theta)3} = \frac{\sigma_{(\theta)3}^2}{\sigma_{(\theta)1}^2} = 1 - \frac{\gamma_4^2}{6 + 9\gamma_4 + \gamma_6}. \quad (8)$$

Wartości  $g_{(\theta)3}$  należą do przedziału  $(0; 1]$ . Zależą one tylko od właściwości rozkładu prawdopodobieństwa określonych przez współczynniki kumulantów  $\gamma_4$  i  $\gamma_6$  [8].

### 4. STATYSTYCZNE MODELOWANIE ESTYMATORÓW

Implementacji modelowania statystycznego dokonano za pomocą pakietu oprogramowania, który opracowano w środowisku MATLAB. Wykorzystuje się metodę Monte-Carlo (MC) opartą na wielokrotnie powtarzanych testach o losowo zmiennych danych. Umożliwia ona dokonanie analizy dokładności algorytmów wielomianowej estymacji statystycznej oraz zbadanie probabilistycznych właściwości uzyskanych oszacowań. Jako kryteria do porównywania skuteczności stosuje się eksperymentalne stosunki wariancji opisane wzorami (9):

$$\hat{g}_{(\theta)3} = \frac{\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2}{\hat{\sigma}_{(\theta)1}^2}, \quad \hat{q}_{(\theta)3} = \frac{\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2}{\hat{\sigma}_{(\theta)1/2}^2}, \quad (9)$$

gdzie  $\hat{\sigma}_{(\theta)1/2}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{(\theta)1}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2$  - uśrednione dla  $M$  prób MC wartości oszacowań wariancji parametrów  $\theta$ , obliczone odpowiednio dla statystyk środka rozpięcia  $q_{V2}$ , średniej arytmetycznej  $\bar{X}$  i metodą PMM o stopniu wielomianu  $s=3$ .

Wiarygodność wyników symulacji dokonywanej algorytmami estymacji statystycznej zależy od wielkości próbki, czyli liczby  $n$  elementów wektora  $\bar{x}$  i liczby  $M$  eksperymentów wykonanych metodą MC w jednakowych warunkach początkowych (stosunek podstaw trapezu  $\beta$ ).

Do obliczenia wartości estymat metodą wielomianową PMM korzysta się z wartości trzech parametrów modelu:  $\kappa_2$ ,  $\gamma_4$  i  $\gamma_6$ . W badaniach omówionych w [9] i opisanych też w [7] (rozdz. 10) wartości tych parametrów modelu obliczono z analitycznych wyrażen dla parametrów rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (pdf), które wiążą jego momenty oraz odpowiednie kumulanty i współczynniki kumulantów. Gdy jednak w praktyce informacja o rodzaju rozkładu pdf populacji i/lub wartości jego parametrów nie jest znana a priori, to w danym badaniu wykorzystuje się oszacowania a posteriori, uzyskiwane z zależności asymptotycznych (10) dla dużych  $n$

$$\hat{\kappa}_2 = \hat{m}_2, \quad \hat{\gamma}_4 = \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} - 3, \quad \hat{\gamma}_6 = \frac{\hat{m}_6}{\hat{m}_2^3} - 15 \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} + 30, \quad (10)$$

gdzie  $\hat{m}_i$  - moment centralny  $i$ -tego rzędu wyznaczony z próbki

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (x_v - \bar{x})^i. \quad (11)$$

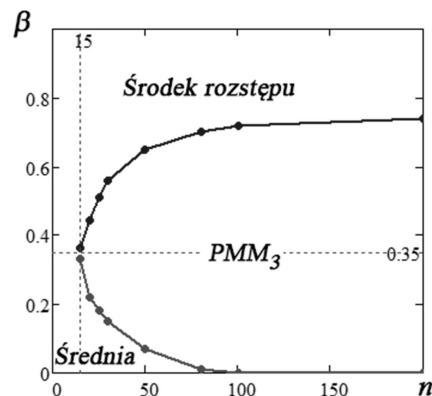
Tabela 1 podaje wyniki badań symulacyjnych uzyskane metodą Monte Carlo. Współczynniki stosunków wariancji uzyskano z  $M = 10^4$  prób dla kilku wartości parametru  $\beta$ .

Tabela 1. Wyniki modelowania MC stosunków wariancji estymat rozkładu Trap

Stosunek długości podstaw trapezu $\beta$	$g_{(\theta)3}$	Współczynniki stosunku wariancji estymat					
		$\hat{g}_{(\theta)3} = \hat{\sigma}_{(\theta)3}^2 / \hat{\sigma}_{(\theta)1}^2$			$\hat{q}_{(\theta)3} = \hat{\sigma}_{(\theta)3}^2 / \hat{\sigma}_{(\theta)V/2}^2$		
		$n$					
		20	50	200	20	50	200
$\beta=1$	0,3	0,56	0,36	0,32	2,15	3,51	10,4
$\beta = 0,75$	0,36	0,61	0,45	0,38	1,53	1,29	1,04
$\beta = 0,5$	0,55	0,78	0,63	0,57	1,02	0,85	0,74
$\beta = 0,25$	0,76	0,97	0,86	0,79	0,9	0,77	0,71
$\beta = 0$	0,84	1,03	0,95	0,87	0,84	0,76	0,69

Analiza danych z tabeli 1 otrzymanych metodą Monte Carlo wykazuje znaczną korelację pomiędzy obliczeniami analitycznymi i wynikami modelowania statystycznego. Wraz ze wzrostem liczby danych  $n$  w próbce  $\bar{x}$  różnica pomiędzy teoretycznymi  $g_{(\theta)3}$  i eksperymentalnymi  $\hat{g}_{(\theta)3}$  wartościami współczynników stosunku wariancji zmniejsza się (np. dla  $n = 50$  różnica ta nie przekracza 20%, a przy  $n = 200$  spada już poniżej 10%). Ogólnie, potwierdza się asymptotyczna właściwość o ilości pobranej informacji o badanym parametrze [9], którą wykorzystuje się do obliczania estymat wariancji metodą wielomianową PMM. Analiza pełnego zestawu wyników symulacji statystycznej z tabeli 1 potwierdza też, że efektywność zastosowania danej statystyki do oszacowania niepewności parametrów rozkładu istotnie zależy od przyjętego modelu opisującego losowe błędy pomiarowe i od liczebności  $n$  próbki. Na podstawie wyników wielu powtórzonych badań metodą MC próbek o  $n = 15 \dots 200$  danych stworzono rysunek 1. Przedstawia on w funkcji wartości parametrów  $n$  i  $\beta$  granice obszarów, które według kryterium minimalnej wariancji umożliwiają porównywanie efektywności wykorzystywania trzech statystyk: parametru  $\theta$  wg metody PMM, średniej  $\bar{X}$  i

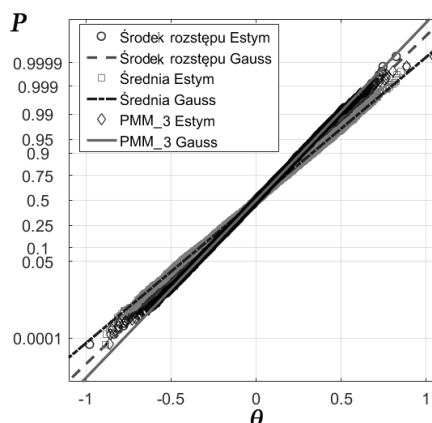
środką rozstępu  $q_{V/2}$ . Dla próbek z rozkładu Trap występuje podana w [2], [3] granica obszaru  $1 \geq \beta > 0,35$  o mniejszej wartości SD dla  $q_{V/2}$  niż dla  $\bar{X}$ .



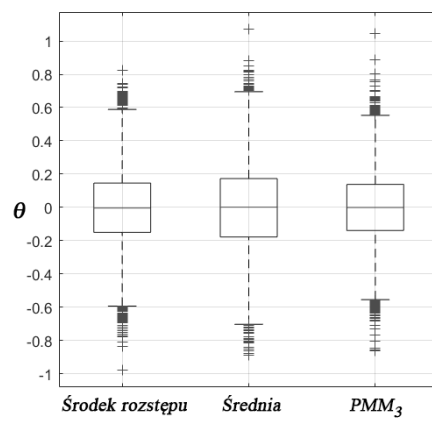
Rys. 1. Obszary efektywności metod znajdowania estymat standardowego odchylenia rozkładu trapezowego

Ważnym rezultatem statystycznego modelowania jest też potwierdzenie tezy o asymptotycznym dążeniu (przy  $n \rightarrow \infty$ ) rozkładu estymat parametrów wielomianu metody PPM do rozkładu Gaussa. Może to służyć w praktyce do wyznaczania niepewności rozszerzonej.

Na rysunkach 2a, b porównano wyniki modelowania w postaci rozkładów wartości liczbowych ocen mierzonych otrzymanych eksperymentalnie dla średniej arytmetycznej  $\bar{X}$  i środka rozpięcia  $q_{V/2}$  oraz dla  $\theta$  wg metody PMM<sub>3</sub> ( $s = 3$ ).



a)



b)

Rys. 2. Empiryczne rozkłady estymat parametru SD : a) wykres probabilistyczny (Q-Q wykres) przybliżenia do funkcji Gaussa; b) wykres typu Box-plot (dla przedziału ufności 99%)

Dane wejściowe - to  $M = 10^4$  prób wykonanych metodą MC dla próbek o  $n = 50$  danych. Są to oceny parametru  $\theta = 0$  dla rozkładu trapezowego przy  $\beta = 0,5$  i  $\lambda = 6$ .

Adekwatność hipotezy o gaussowskim rozkładzie estymat metody PPM sprawdzono też za pomocą wbudowanego w oprogramowanie MATLAB testu Lillieforsa opartego na statystyce Kołmogorowa-Smirnowa. Tabela 2 przedstawia wyniki tych badań jako zestaw parametrów wyjściowych testu następująco oznaczonych:  $CV$  - krytyczna wartość statystyki testu;  $LSTAT$  - wybrana wartość tej statystyki;  $p$  - prawdopodobieństwo testowe. Jeśli  $LSTAT < CV$  to dla danego poziomu istotności  $p = 0,05$  nie odrzuca się hipotezy zerowej (funkcji Gaussa).

Tabela 2. Wyniki kontroli hipotez o gaussowości estymat rozkładu empirycznego Trap wyznaczonych metodą  $PMM_3$  (dla  $s = 3$ )

Stosunek długości podstaw $\beta$	$CV$	Wyniki testu Lillieforsa					
		$LSTAT$			$p$		
		$n$					
		20	50	200	20	50	200
$\beta = 1$	0,009	0,029	0,021	0,008	0,001	0,001	0,12
$\beta = 0,75$		0,028	0,016	0,007	0,001	0,002	0,18
$\beta = 0,5$		0,014	0,007	0,005	0,002	0,18	0,5
$\beta = 0,25$		0,01	0,008	0,005	0,006	0,19	0,5
$\beta = 0$		0,008	0,007	0,005	0,18	0,21	0,5

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawione badania pozwalają sformułować ogólny wniosek o możliwości zastosowania metody maksymalizacji wielomianu  $PMM$  do oszacowania standardowego odchylenia rozkładu trapezowego, czyli jego składowej niepewności  $uA$  na podstawie danych pomiarowych próbki.

Analiza łączna uzyskanych wyników wykazuje, że dla określonych wartości parametrów opisujących właściwości probabilistyczne rozkładu trapezowego (rozpatrzono pełny zakres wartości stosunku długości podstaw trapezu  $\beta$ ), estymaty odchylenia standardowego  $SD$  obliczone metodą Monte Carlo dla metody wielomianowej  $PMM_3$  są bardziej efektywne (mają mniejszą wariancję) w porównaniu do estymaty  $SD$  dla średniej arytmetycznej obliczonej wg GUM [1] i estymaty  $SD$  środka rozstępu. Stopień zmniejszenia wariancji estymat parametrów, jak i stopień normalizacji ich rozkładu zależy od dostępnej do analizy liczby danych  $n$  próbki i maleje wraz ze wzrostem  $n$ . Potwierdza się przy tym ogólna zależność, że granicą ilości informacji możliwej do

pozyskania z próbki przy wzroście jej liczby danych  $n$  jest odwrotność wariancji populacji, z której ją pobrano [8], [9].

Omówiona niekonwencjonalna metoda wielomianowa o akronimie  $PMM$  opiera się na pierwszych kilku kumulantach wyznaczonych z danych próbki za pośrednictwem jej momentów centralnych.

Metodę  $PMM$  można też stosować do wyznaczania wyniku pomiarów, gdy rozkład, z którego pochodzi próbka, jest nieznan a priori, a liczba jej danych  $n$  jest jeszcze zbyt mała, by dokonać jednoznacznej jego identyfikacji.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM), BIPM, JCGM 100 (2008) + Supplement 1 – Propagation of distributions using a Monte Carlo method (2008).
2. Warsza Z. L., Galowska M.: About the best measurand estimators of trapezoidal probability distributions. Przegląd Elektrotechniczny Nr 5/2009, 86–91.
3. Warsza Z. L., Galowska M., The best measurand estimators of trapezoidal PDF. Proceedings of IMEKO World Congress "Fundamental and Applied Metrology", September 2009, Lisbon Portugal, 2405–2410.
4. Warsza Z. L., Galovskaja M. V.: Wybor najlutshej ocenki izmierajemoj velichiny na primiere trapecevidnykh raspredelenij, Sistemy Obrobki Informacii 4(78), Kharkow 2009, 28–31.
5. Warsza Z. L.: Dwuelementowe estymatory wartości mezurandu próbek danych pomiarowych o trapezowych rozkładach prawdopodobieństwa – przegląd prac, Pomiary Automatyka Kontrola, 57, Nr 1, 2011, 105–108.
6. Warsza Z. L.: Effective Measurand Estimators for Samples of Trapezoidal PDFs. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, Vol. 6, Nr 1, 2012, 35–41.
7. Warsza Z. L.: Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów. Monografia PIAP Warszawa 2016.
8. Kunchenko J., Estimations of close to Gaussian random variables. Shaker Verlag Aachen Germany 2002.
9. Zabolotnii S. W., Warsza Z. L.: A polynomial estimation of measurand parameters for samples of non-Gaussian symmetrically distributed data. R. Szewczyk et al. (ed.) Proceedings of Automation 2017 - Innovations in Automation, Robotics and Measurement Techniques. Advances in Intelligent Systems and Computing 550. Springer International Publishing AG 2017, 470-482.

## ESTIMATION OF THE UNCERTAINTY OF MEASURAND FOR TRAPEZE DISTRIBUTED DATA BY POLYNOMIAL MAXIMIZATION METHOD AND ITS EFFICIENCY

The types of measurand parameter estimators derived from samples of measured data taken from the symmetrical trapezoidal population Trap are briefly discussed. A non-standard approach to finding estimates of the non-Gaussian distributions parameters based on the unconventional method of maximizing the stochastic polynomial ( $PMM$ ) and using a moment-cumulant description of random variables is proposed. By means of multiple statistical tests of Monte Carlo method, the properties of polynomial estimators are investigated and a analysis of their accuracy is made with compare to estimates of the distributions with arithmetic mean or the mid-range as their centers. As a function of the number of sample data and the basis of trapeze ratio, the boundaries of the areas where these methods are most effective are determined. The  $PPM$  method has been proposed to use for determining estimated values of the standard deviation and uncertainties of measurand when distribution of the random errors population is a priori unknown and first few cumulants have to be find from the sample data.

**Key words:** measurand, estimate, standard deviation, trapezoidal distribution, cumulant, statistic polynomial.