

ZASTOSOWANIE LINIOWYCH NIERÓWNOŚCI MACIERZOWYCH DO SYNTEZY STEROWANIA POZIOMEM WODY W UKŁADZIE KASKADOWYM DWÓCH ZBIORNIKÓW

Monika RYBCZAK¹, Mirosław TOMERA²

1. Akademia Morska w Gdyni, Wydział Elektryczny
tel.: 58 5586576 e-mail: m.rybczak@we.am.gdynia.pl
2. Akademia Morska w Gdyni, Wydział Elektryczny
tel.: 58 5586494 e-mail: m.tomera@we.am.gdynia.pl

Streszczenie: Referat zawiera metodykę doboru parametrów regulatora stanu z wykorzystaniem liniowych nierówności macierzowych (ang. LMI - Linear Matrix Inequalities) metodą lokowania biegunów. W pracy zdefiniowano warunki rozmieszczenia biegunów w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s i wyznaczono obszary dopuszczalnych położenia biegunów. Na potrzeby rozważanej, liniowej metody projektowania dokonano linearyzacji modelu matematycznego obiektu w wybranym punkcie pracy. Zaprojektowany regulator stanu zastosowany został do sterowania obiektem rzeczywistym, którym był układ kaskadowy dwóch zbiorników. W referacie przedstawione zostały zarówno wyniki badań symulacyjnych jak i badań eksperymentalnych przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym.

Słowa kluczowe: regulator stanu, liniowe nierówności macierzowe, metoda lokowania biegunów, układ kaskadowy zbiorników.

1. WPROWADZENIE

W klasycznej teorii sterowania i zastosowań dobrze znaną metodologią osiągania pewnych, pożądanych własności związanych z czasem regulacji, maksymalnym przeregulowaniem i czasem narastania jest metoda lokowania biegunów. Kształt odpowiedzi układu regulacji w stanie przejściowym (nieustalonym) silnie zależy od położenia biegunów układu zamkniętego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Jeśli tylko obiekt jest sterowalny to dokładne położenie biegunów jest zawsze osiągalne poprzez zastosowanie odpowiedniego prawa sterowania w sprzężeniu od zmiennych stanu. Tego typu sterowanie realizowane jest przez regulator stanu, w którym należy dobrać odpowiednie wartości parametrów. Dobór wartości parametrów dla regulatora stanu metodą lokowania biegunów może zostać zrealizowany z wykorzystaniem transmitancji lub w przestrzeni stanów, poprzez klasyczne przyporządkowanie wartości własnych opartych na równaniu charakterystycznym układu zamkniętego.

Kiedy jednak w układzie występują pewne nieokreśloności to metoda dokładnego umiejscowienia biegunów może okazać się nieodpowiednia. Z tego powodu zostały rozwinięte metody, które bazują na tym, że bieguny lokowane są w pewnym obszarze na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s , który może mieć kształt wielokąta wypukłego, okręgu lub stożka. Nieznaczone przemieszczanie się

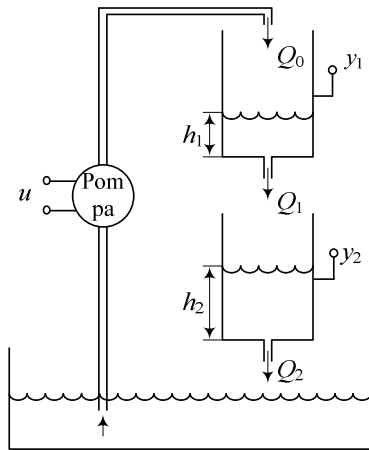
biegunów układu zamkniętego w okolicach pożądanych położenia może nie powodować silnych modyfikacji w odpowiedzi przejściowej układu regulacji i w ten sposób może zostać osiągnięta pewna krzepkość. Takimi ograniczonymi przestrzeniami mogą być obszary stosowane w metodzie LMI do przedstawienia typowego podobszaru wypukłego i symetrycznego względem osi liczb rzeczywistych [3]. Stąd, taki krzepki regulator jest łatwo zaprojektować poprzez rozwiązanie zagadnień definiowanych poprzez LMI [1]. Początki rozwoju liniowych nierówności macierzowych swymi korzeniami sięgają do pracy doktorskiej Aleksandra Lapunowa, przedstawionej na Uniwersytecie w Moskwie w roku 1892 [12]. Jak to zostało szczegółowo przedstawione w pracach [1, 5], warunki stabilności i wiele wymagań jakościowych dotyczących układów liniowych może zostać przekształcone na liniowe nierówności macierzowe obejmujące również tzw. macierz Lapunowa.

W niniejszej pracy zrealizowano sterowanie poziomem wody w dolnym zbiorniku przy użyciu regulatora stanu dla którego wzmocnienia dobierane były dwoma metodami: klasyczną w przestrzeni stanów oraz przy wykorzystaniu liniowych nierówności macierzowych (LMI). Przedstawione zostały zarówno wyniki badań symulacyjnych jak i badań eksperymentalnych przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym. Badania symulacyjne przeprowadzono na modelu matematycznym obiektu w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink, natomiast badania eksperymentalne wykonano w układzie rzeczywistym z wykorzystaniem programowalnego mikrokontrolera sygnałowego TMS320F28335.

2. LINIOWY MODEL MATEMATYCZNY OBIEKTU

Jako obiekt sterowania wybrany został układ kaskadowy dwóch zbiorników wyposażony w urządzenie wykonawcze, którym była pompa oraz w czujniki służące do pomiaru poziomów wody w zbiornikach. Na rysunku 1 pokazany został uproszczony schemat przedstawiający obiekt sterowania wraz z oznaczeniami zmiennych zastosowanych w modelu matematycznym obiektu. Zastosowane metody projektowania opierają się na liniowym modelu matematycznym obiektu. Układ kaskadowy dwóch zbiorników wraz z pompą jest układem

silnie nieliniowym i dlatego też model matematyczny obiektu wymagał linearyzacji.



Rys. 1. Definicja zmiennych w modelu matematycznym obiektu, gdzie: u – napięcie sterujące pompą, Q_0 – natężenie dopływu wody do górnego zbiornika, Q_1 , Q_2 – natężenia swobodnych wypływów wody ze zbiorników, h_1 , h_2 – poziomy wody w zbiornikach, y_1 , y_2 – wartości napięcia na wyjściach czujników

Szczegóły dotyczące wyprowadzenia zastosowanego liniowego modelu matematycznego można znaleźć w pracy [14]. Poniżej zawarte zostały najważniejsze równania opisujące uzyskany liniowy model matematyczny, składający się z następującego zestawu równań stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (1)$$

gdzie: $x_1(t) = h_1(t)$, $x_2(t) = h_2(t)$ – zmienne stanu, $u(t)$ – sygnał sterujący pompą (wyjście z regulatora), $T_1 = 67.1827$ [s], $T_2 = 65.7704$ [s] – stałe czasowe, $k = 0.4714$ – wzmacnienie.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU STEROWANIA

Na rysunku 2 zaprezentowany został schemat blokowy układu sterowania z regulatorem stanu, w którym wszystkie zmienne występujące w obiekcie są mierzone. Na wyjściach czujników dodatkowo dołączone zostały bloki „Skalowanie” w których znajdują się odwrotne charakterystyki czujników.

Zadaniem układu regulacji będzie stabilizacja poziomu wody w dolnym zbiorniku na zadanym poziomie $r(t) = h_{zad}$. W regulatorze stanu zastosowane zostało dodatkowe wzmacnienie dla całki uchybu regulacji

$$x_3(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (x_2(\tau) - r(\tau)) d\tau \quad (2)$$

która staje się dodatkową zmienną stanu. W tym układzie sterowania takie rozwiązanie jest konieczne, gdyż zastosowany obiekt jest silnie nieliniowy i na każdym poziomie stabilizacji poziomu wody ma inne wzmacnienie.

W zapisie ogólnym uzyskuje się następujące równania dynamiczne opisujące proces sterowania pokazany na rysunku 2

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Er(t) \quad (3)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Głównym celem projektowania jest znalezienie wartości wektora wzmacnień K

$$u(t) = -Kx(t) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

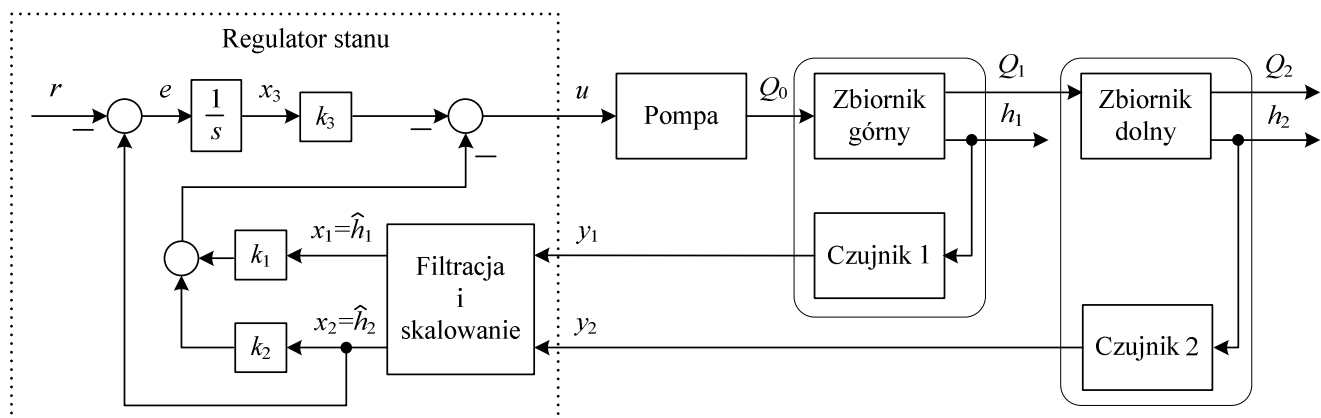
który pozwoli na spełnienie następujących wymagań projektowych:

- a) zamknięty układ regulacji będzie asymptotycznie stabilny;
- b) maksymalne przeregulowanie ($M_p\%$), mniejsze od 5%;
- c) czas regulacji (t_R), mniejszy od 200s ($\Delta = 2\%$).

Po podstawieniu zależności (4) do równania (3) uzyskuje się nową macierz stanu A_c projektowanego układu regulacji

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Er(t) = A_c x(t) + Er(t) \quad (5)$$

Poddając równanie (5) obustronnemu przekształceniu



Rys. 2. Schemat blokowy układu regulacji

Laplace i odpowiednio je przekształcając, uzyskuje się następujące macierzowe równanie charakterystyczne

$$|sI - (A - BK)| = 0 \quad (6)$$

którego wartości własne zależą od poszukiwanych wzmocnień wektora K (4).

4. DOBÓR PARAMETRÓW REGULATORA STANU

Poniżej przedstawione zostały dwie metody doboru wartości wzmocnień regulatora stanu. Pierwsza jest metodą klasyczną, natomiast druga wykorzystuje liniowe nierówności macierzowe (LMI). W obydwu przykładach wykorzystana została metoda lokowania biegunów. Najpierw, na podstawie zadanych wymagań projektowych związanych ze stabilnością, maksymalnym przeregulowaniem i czasem narastania, na płaszczyźnie s wyznaczony został obszar dopuszczalnych położenia biegunów, pozwalający na spełnienie założonych wymagań projektowych (Rys. 3).

W metodzie klasycznej z wyznaczonego obszaru dopuszczalnych położenia biegunów zostały wybrane trzy bieguny wzorcowe (12) i na tej podstawie obliczone zostały wzmocnienia regulatora stanu w taki sposób, aby wartości własne macierzy projektowanego układu (6) znalazły się dokładnie tam gdzie założone bieguny wzorcowe.

Przy wyznaczaniu wartości wzmocnień regulatora stanu wykorzystującego LMI, najpierw określony został ograniczony sektor (Rys. 4), a następnie przy użyciu odpowiedniego programu optymalizacyjnego zostały wyznaczone wzmocnienia regulatora stanu w taki sposób, aby wartości własne projektowanego układu (6) znalazły się w tym ograniczonym sektorze.

Najpierw rozważone zostały wymagania jakościowe nakładane na projektowany układ, które zostały przeliczone na parametry związane z płaszczyzną s .

Pierwsze wymaganie (a) związane ze stabilnością zostanie spełnione wówczas, jeśli wszystkie bieguny projektowanego układu regulacji będą znajdowały się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Drugie wymaganie (b) dotyczy maksymalnego przeregulowania, które dla tzw. prototypowego układu regulacji II rzędu opisane jest następującym wzorem

$$M_p\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\% \quad (7)$$

Z przekształcenia wzoru (7) uzyskuje się warunek związany z minimalną wartością tłumienia ζ w układzie

$$\zeta \geq \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = 0.69 \quad (8)$$

Ze współczynnikiem ζ związane jest ograniczenie, które na płaszczyźnie s przedstawia się przy użyciu półprostej o nachyleniu

$$\theta = \arccos \zeta = 46.4^\circ \quad (9)$$

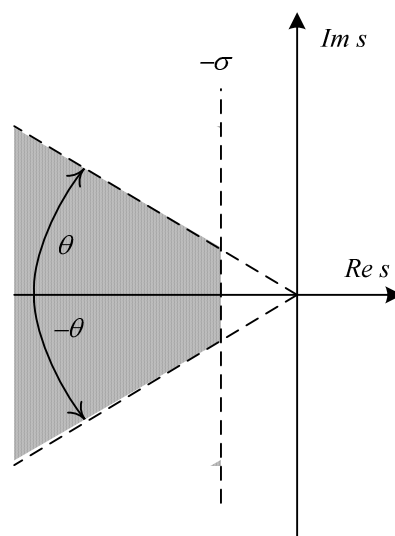
Trzecie wymaganie (c) związane jest czasem regulacji t_R , które dla strefy dokładności Δ wynoszącej 2% opisane jest wzorem

$$t_R = \frac{4}{\sigma} \quad (10)$$

gdzie σ jest wartością bezwzględną części rzeczywistej biegunu znajdującego się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Z przekształcenia wzoru (10) uzyskuje się warunek związany z minimalną odległością biegunów znajdujących się w lewej półpłaszczyźnie od osi liczb urojonych.

$$\sigma \geq \frac{4}{t_R} = 0.02 \quad (11)$$

Na rysunku 3 zaznaczone zostały wyznaczone ograniczenia i pokazany został obszar dopuszczalnych położenia biegunów projektowanego układu regulacji, znajdujący się w lewej półpłaszczyźnie pomiędzy wyznaczonymi ograniczeniami. Z rysunku 3 widać, że część rzeczywista biegunów może przyjmować wartość z zakresu $(-\infty, \dots, -\sigma)$.



Rys. 3. Obszar dopuszczalnych położenia biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s wynikający z nałożonych wymagań projektowych

4.1. Metoda klasyczna

Przy wyznaczaniu wzmocnień metodą klasyczną przyjęte zostały trzy bieguny wzorcowe znajdujące się w wyznaczonym obszarze dopuszczalnych położenia biegunów (Rys. 3)

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.1, \quad s_3 = -0.025 \quad (12)$$

Pożądane równanie charakterystyczne, wyznaczone w oparciu o przyjęte wartości biegunów (12), jest następujące

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + 0.225s^2 + 0.025s + 0.0005 = 0 \quad (13)$$

Po odpowiednich podstawieniach do równania (6) i dalszych przekształceniach uzyskuje się drugie równanie charakterystyczne zawierające nieznanne jeszcze, poszukiwane wartości wzmocnień K regulatora stanu (4)

$$s^3 + (0.4714k_1 + 0.0301)s^2 + (0.0072k_1 + 0.0070k_2 + 0.0002)s + 0.0070k_3 = 0 \quad (14)$$

Porównując współczynniki równania (13) z odpowiadającymi im współczynnikami z równania (14) uzyskuje się następujący układ równań

$$\begin{cases} 0.4714k_1 + 0.0301 = 0.225 \\ 0.0072k_1 + 0.0070k_2 + 0.0002 = 0.025 \\ 0.0070k_1 = 0.0005 \end{cases} \quad (15)$$

Z rozwiązania powyższego układu równań (15) uzyskuje się poszukiwane wartości wzmocnień regulatora stanu wyznaczone metodą klasyczną

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [0.4135 \quad 3.1085 \quad 0.0713] \quad (16)$$

4.2. Liniowe nierówności macierzowe (LMI)

Liniowe nierówności macierzowe należą do zagadnień optymalizacji wypukłej stosowanych między innymi do syntezy regulatora krzepkiego (ang. robust). Postać kanoniczna liniowych nierówności macierzowych jest następująca:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i x_i \succ 0 \quad (17)$$

gdzie: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ – wektor zmiennej decyzyjnej (niewiadoma), $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – macierze rzeczywiste i symetryczne.

W równaniu (17) zapis " $\succ 0$ " oznacza, że macierz $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ jest dodatnio określona¹.

Warunki LMI tworzą wypukły zbiór ograniczeń, który należy sformułować dla procesu syntezy regulatora stanu. W rozważanym przypadku ograniczenia dotyczą obszaru umieszczenia biegunów w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s co ma wpływ na właściwości dynamiczne projektowanego układu regulacji. Synteza związana jest z wyznaczeniem wartości macierzy wzmocnień \mathbf{K} dla regulatora stanu opisanego wzorem (4). Zapis liniowych nierówności macierzowych (LMI) ma następującą postać:

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} \quad (18)$$

Z równania (18) widać, że do wyznaczenia macierzy wzmocnień \mathbf{K} konieczna jest znajomość macierzy \mathbf{X} i \mathbf{Y} , które są wyznaczone przy użyciu specjalnego programu optymalizacyjnego w oparciu o zdefiniowane obszary LMI na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . W tym celu należy założyć, że macierz \mathbf{X} jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, stąd kolejne założenie brzmi, że istnieje dla niej macierz odwrotna \mathbf{Y}^{-1} , która jest rzeczywista (dowód w [7]).

W celu opisu obszaru na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s , gdzie będą umieszczane bieguny układu zamkniętego, podana zostanie następująca definicja, według [4].

Definicja 1. Obszar D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s nazywany jest obszarem LMI wówczas, jeśli istnieją symetryczne macierze $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ i $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ takie, że

$$D = \{s \in \mathbb{C}^- : \mathbf{F}_D(s) < 0\} \quad (19)$$

gdzie \mathbf{F}_D jest funkcją charakterystyczną obszaru D

$$\mathbf{F}_D(s) = \mathbf{L} + s\mathbf{M} + \bar{s}\mathbf{M}^T \quad (20)$$

natomiast \bar{s} jest zmienną zespoloną sprzężoną do s .

We wzorze (19) \mathbb{C}^- oznacza lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej s . Obszar LMI jest wypukły i symetryczny względem osi liczb rzeczywistych. Dlatego też, w przypadku gdy obszary LMI przecinają się to pozostają niezmiennie. Przecinanie się dwóch obszarów LMI oznaczonych jako D_1 i D_2 jest również obszarem LMI z funkcją charakterystyczną o postaci

$$\mathbf{F}_{D_1 \cap D_2}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} + \bar{s} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

W konsekwencji dowolny obszar składający się z przecięcia krzywych stożkowych, pasów pionowych lub pasów poziomych może być rozpatrywany jako obszar LMI.

W sposób uproszczony, dla celów syntezy projektowanego sterowania można zapisać następujące twierdzenie [2].

Twierdzenie 1. Niech $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ oraz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ będą macierzami rzeczywistymi i symetrycznymi. Wówczas macierz $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ ma wszystkie wartości własne w obszarze LMI (18) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rzeczywista, symetryczna i dodatnio zdefiniowana macierz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz rzeczywista macierz $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. W takim przypadku spełniony jest warunek LMI

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{L} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{V}^T \prec 0 \quad (22)$$

gdzie \otimes jest iloczynem Kroneckera², oraz

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \quad (23)$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^{-1} \quad (24)$$

jest wykonalne.

W przypadku układu liniowego, ciągłego wartości własne macierzy \mathbf{A}_c mają ujemne części rzeczywiste, ponieważ lewa półpłaszczyzna jest opisana przez $\mathbf{L} = 0$ i $\mathbf{M} = 1$ to Twierdzenie 1 w prosty sposób oznacza, że

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{A}_c \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_c^T \prec 0 \quad (25)$$

Przykłady różnych obszarów LMI i opis sposobów w jaki są konstruowane można znaleźć w pracach [4, 7, 8, 11].

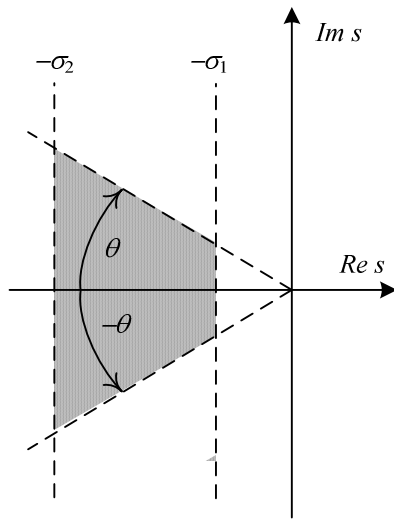
² (Definicja 182 wg [6]) Iloczynem Kroneckera $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ macierzy

$\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i macierzy $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ nazywamy macierz blokową postaci:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

¹(Twierdzenie 8.4. wg [6]) Rzeczywista forma kwadratowa jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne jej macierzy współczynników \mathbf{A} są dodatnie.

Na podstawie wcześniejszych rozważań dotyczących analizy zadanych wymagań jakościowych projektowanego układu opisanego równaniami (4) i (5), zdefiniowany został obszar LMI pokazany na rysunku 4. W porównaniu z rysunkiem 3 wprowadzone zostało dodatkowe ograniczenie z lewej strony.



Rys.4. Lewa półpłaszczyzna zmiennej zespolonej s z zaznaczonym obszarem LMI, gdzie $\theta = 46.4^\circ$, oraz $\sigma_1 = 0.02$ oraz $\sigma_2 = 0.2$

Wypadkowy obszar LMI pokazany na rysunku 4 powstał ze złożenia pasa pionowego zawartego pomiędzy liniami pionowymi $-\sigma_1$, $-\sigma_2$ oraz stożka zawartego pomiędzy półprostymi nachylonym względem ujemnej osi liczb rzeczywistych pod kątami $-\theta$, $+\theta$.

Pas pionowy zawarty pomiędzy dwoma liniami pionowymi $-\sigma_1$ oraz $-\sigma_2$ ma następujący obszar LMI

$$D_1 = \left\{ s \in C^- : -\sigma_2 < \frac{1}{2}(s + \bar{s}) < -\sigma_1 < 0 \right\} \quad (26)$$

Po odpowiednich przekształceniach układu nierówności (26) funkcja charakterystyczna dla obszaru D_1 przyjmuje postać

$$F_{D_1}(s) = \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & -2\sigma_2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \bar{s} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

gdzie $L_1 = \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & -2\sigma_2 \end{bmatrix}$, $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Drugi obszar składowy to sektor stożka zawarty pomiędzy dwoma półprostymi nachylonymi względem ujemnej osi liczb rzeczywistych o kąt $\pm\theta$, przy założeniu, że $\text{Re}(s) = x$, $\text{Im}(s) = y$ to można go opisać następująco:

$$D_2 = \left\{ s \in C^- : -|y| > x \cdot \text{tg} \theta \right\} \quad (28)$$

Po przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń w układzie nierówności (28) otrzymano postać funkcji charakterystycznej dla sektora stożka zawartego pomiędzy dwoma półprostymi

$$F_{D_2}(s) = s \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} + \bar{s} \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

gdzie: $L_2 = 0$; $M_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$.

Następnie, zgodnie ze wzorem (21) należy dokonać złożenia funkcji charakterystycznych wyznaczonych we wzorach (27) i (29). Ponieważ składane są ze sobą dwa obszary to wypadkowe równanie charakterystyczne przyjmuje postać opisaną wzorem (20), przy czym

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sigma_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tak zdefiniowanego problemu odbywa się przy pomocy specjalnych programów optymalizacyjnych. W tym przypadku obliczenia wykonano w pakiecie Matlab do którego zostały doinstalowane dodatkowe darmowe biblioteki SeDuMi (z ang. Self - Dual - Minimization) [13] oraz YALMIP [9]. Ze względu na złożoność zagadnienia nie odniesiono się do algorytmu optymalizacji, który dokładnie przedstawiony w [4] oraz [10].

Dla proponowanego obszaru LMI pokazanego na rysunku 4, poszukiwana dodatkowo określona i symetryczna macierz $X = X^T \succ 0$ przyjmuje następujące wartości:

$$X = \begin{bmatrix} 3.9929 & -0.3001 & 0.6573 \\ -0.3001 & 0.0470 & -0.3348 \\ 0.6573 & -0.3348 & 5.2010 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (30)$$

Obliczona w programie optymalizacyjnym macierz Y , której wymiar jest określony jako wymiar macierzy B^T ma postać:

$$Y = [-1.1595 \quad 0.0159 \quad 0.3457] \quad (31)$$

Następnie ze wzoru (24) wyznaczona została macierz poszukiwanych wartości wzmocnień K projektowanego regulatora stanu:

$$K = [0.6296 \quad 4.8823 \quad 0.1683] \quad (32)$$

Po podstawieniu wyznaczonej macierzy K (32) do wzoru (6), wyznaczone zostały wartości własne projektowanego układu sterowania, które wynoszą odpowiednio:

$$s_{1,2} = -0.1410 \pm j0.0804, \quad s_3 = -0.0448 \quad (33)$$

Potwierdzeniem, że układ jest stabilny jest istnienie wartości własnych układu zamkniętego w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

5. WYNIKI BADAŃ UKŁADÓW STEROWANIA

Ocena jakości pracy układów sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku, wykorzystujących zaprojektowane regulatory stanu, badana była w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink oraz w badaniach eksperymentalnych na obiekcie rzeczywistym z wykorzystaniem programowalnego mikrokontrolera sygnałowego TMS320F28335. Wszystkie elementy objęte na rysunku 2 linią przerywaną i przynależne do „Regulatora stanu” zostały zapisane w języku programowania C

i posłużyły do odpowiedniego zaprogramowania mikrokontrolera sygnałowego.

W tym celu w regulatorze stanu zawierającym sterowanie całkujące została przeprowadzona dyskretyzacja członu całkującego metodą Eulera

$$x_3(k) = x_3(k-1) + T \cdot e(k) \quad (34)$$

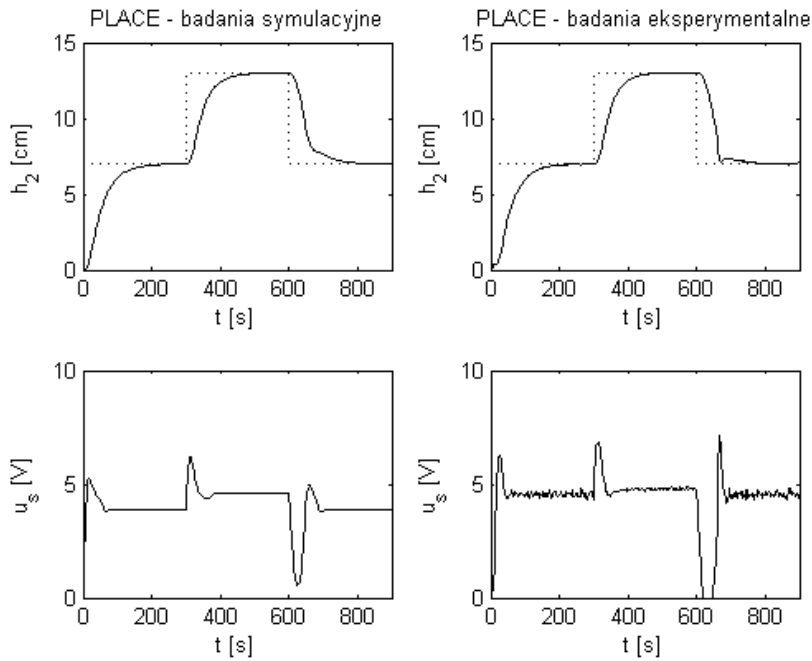
gdzie: $T = 0.5$ [s] – okres próbkowania, $x_3(k)$, $x_3(k-1)$ – wartość bieżąca i poprzednia całki uchybu regulacji, $e(k)$ – wartość uchybu regulacji w chwili próbkowania.

W bloku oznaczonym jako „Filtracja i skalowanie” zrealizowane zostały dwa zadania. Pierwsze z nich polegało

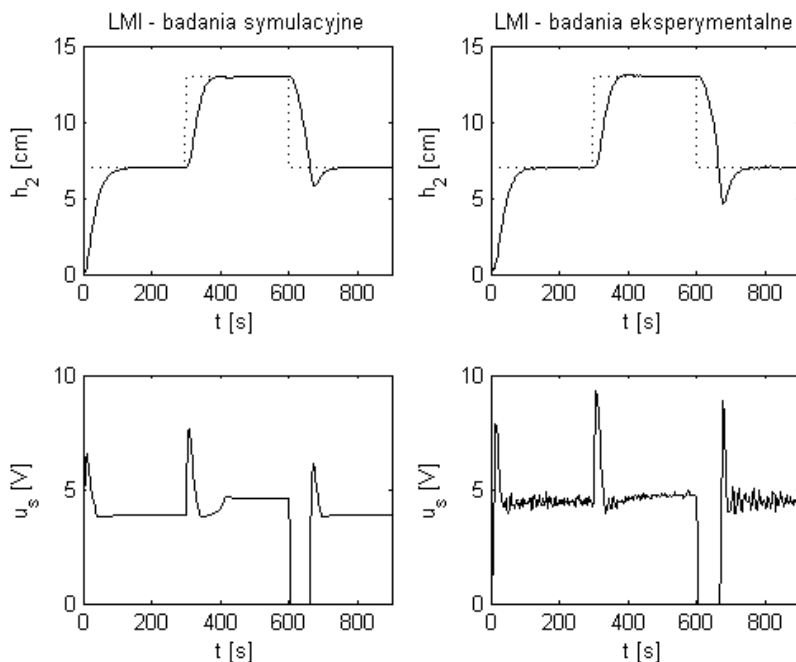
na filtracji sygnałów napięciowych y_1 i y_2 otrzymanych z wyjścia czujników poziomów wody w zbiornikach górnym i dolnym, w celu wyeliminowania z nich szumów pomiarowych. W każdym torze pomiarowym zastosowany został filtr dolnoprzepustowy II rzędu opisany następującym zestawem równań dynamicznych

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1f}(t) \\ \dot{x}_{2f}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1f}(t) \\ x_{2f}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_f(t) \quad (35)$$

$$y_f(t) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_{1f}(t) \\ x_{2f}(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$



Rys. 5. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora stanu projektowanego klasyczną metodą lokowania biegunów (PLACE)



Rys. 6. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora stanu wykorzystującego LMI

Tabela 1. Wskaźniki oceny jakości sterowania uzyskane z wykresów czasowych pokazanych na rysunkach 5 – 6

	Metoda Doboru parametrów	Odcinek 1 (0 s – 300 s)			Odcinek 2 (300 s – 600 s)			Odcinek 3 (600 s – 900 s)			J_c
		M_p	t_R	J	M_p	t_R	J	M_p	t_R	J	
		[%]	[s]	[-]	[%]	[s]	[-]	[%]	[s]	[-]	
1.	PLACE – sym.	-	180.0	209.6	-	205.0	163.5	-	215.0	162.1	535.1
2.	PLACE – eksp.	1.0	188.0	223.9	0.5	180.0	156.7	0.8	207.5	158.1	538.7
3.	LMI – sym.	-	108.0	135.1	-	100.0	109.5	19.9	152.5	146.2	390.8
4.	LMI – eksp.	0.7	102.0	146.9	1.4	90.0	110.3	40.2	170.0	183.0	440.2

Filtr ten całkowany był w procesorze sygnałowym metodą Rungego-Kutty IV rzędu z krokiem całkowania $T = 0.01$ s. Drugie zadanie realizowane z bloku „Filtracja i skalowanie” polegało na wyznaczeniu pomierzonych wartości wysokości słupa wody w zbiornikach (h_1 , h_2) na podstawie pomierzonych wartości napięć (y_1 , y_2). W tym celu najpierw pomierzone zostały charakterystyki czujników, które zostały aproksymowane przez liniowe zależności

$$y_i(t) = m_i h_i + b_i \quad (37)$$

gdzie: m_i jest współczynnikiem nachylenia linii prostej, b_i wartością przesunięcia względem początku układu współrzędnych, $i \in \{1, 2\}$ jest numerem zbiornika.

Następnie wyznaczone zostały odwrotne charakterystyki czujników (38), które posłużyły do wyznaczenia - na potrzeby regulatora stanu - poszukiwanych, mierzonych wartości wysokości słupa wody w zbiornikach.

$$\hat{h}_i(t) = \frac{y_i - b_i}{m_i} \quad (38)$$

gdzie $i \in \{1, 2\}$ jest numerem zbiornika.

W pierwszej kolejności przeprowadzone zostały badania symulacyjne, które miały również na celu sprawdzenie poprawności przygotowanego kodu programu, służącego do zaprogramowania mikrokontrolera sygnałowego. Następnie przeprowadzona została weryfikacja badań symulacyjnych na obiekcie rzeczywistym.

Wyniki badań symulacyjnych i eksperymentalnych układu sterowania dla którego wzmocnienia wyznaczone zostały klasyczną metodą lokowania biegunów znajdują się na rysunku 5, natomiast na rysunku 6 znajdują się wyniki prób przeprowadzonych z użyciem regulatora stanu wykorzystującego LMI.

Dla każdego z rozważanych układów sterowania przeprowadzona została próba składająca się z trzech odcinków stabilizacji poziomu wody w dolnym zbiorniku, każdy o czasie trwania 300 s. W chwili załączenia układów regulacji, obydwie zbiorniki były puste. Na odcinku pierwszym zadany poziom wody wynosił 7 cm, na drugim 13 cm, a na trzecim, ostatnim odcinku ponownie 7 cm.

Ocena jakości pracy rozważanych układów regulacji polegała na ocenie wskaźników jakości definiowanych na podstawie odpowiedzi skokowej i były to: maksymalne przeregulowanie M_p , czas regulacji t_R mierzony przy strefie dokładności $\Delta = 2\%$. Dodatkowo na każdym odcinku stabilizacji poziomu wody, na podstawie pomierzonych

wartości wysokości słupa wody i sygnału sterującego pompą wyznaczony był funkcjonal

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{|e(k)| + |u(k)|\} \quad (39)$$

gdzie: $e(k) = h_2(k) - h_{zad}(k)$ – uchyb regulacji, $u(k)$ – sygnał sterujący pompą, wyjście w regulatora

Pomiar odbywał się z okresem próbkowania wynoszącym 2.0 s, co dawało $N = 150$ pomierzonych próbek w każdym odcinku stabilizacji. Dodatkowo, dla każdej próby wyznaczony został funkcjonal całkowity J_c będący sumą funkcjonałów składowych. Wyznaczone wskaźniki jakości na podstawie przeprowadzonych prób testowych znajdują się w tabeli 1.

Zaprojektowany układ sterowania z wykorzystaniem metody LMI był silniej nastrojony, co widać po położeniach wyznaczonych wartości własnych układu zamkniętego, które znajdują się dalej od osi liczb urojonych, aniżeli wartości własne układu zaprojektowanego przy użyciu klasycznej metody lokowania biegunów. W związku z tym w układzie wykorzystującym LMI uzyskiwano krótsze czasy regulacji t_R i mniejsze wartości wyznaczanych funkcjonałów J , natomiast większe wartości związane z maksymalnym przeregulowaniem M_p .

6. WNIOSKI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono metodykę związaną z wyznaczaniem wartości wzmocnień regulatora stanu przy wykorzystaniu liniowych nierówności macierzowych (LMI). Przy czym wzięto pod uwagę jedynie pierwszy z trzech warunków jakie w tym przypadku są rozważane, a mianowicie obszary LMI umieszczone w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , w których mają znaleźć się wartości własne projektowanego układu sterowania. Kolejnymi warunkami uwzględnianymi w LMI są zapisywane w formie macierzowej normy H_∞ oraz H_2 , które ze względu na obszerność zagadnienia nie zostały zawarte w tej pracy.

Przedstawione wyniki przedstawiają poprawność zaprojektowanego regulatora stanu. Dodatkowo przedstawienie klasycznej metody lokowania biegunów, wykorzystanej do wyznaczania wartości wzmocnień regulatora stanu, miało na celu ułatwienie zrozumienia wyznaczania pierwszego warunku LMI.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Boyd S. P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.: Linear Matrix Inequalities in System and Control

- Theory. Vol. 15 of Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
2. Chilali M., Gahinet P.: H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No 3, pp. 358-367, 1996.
 3. Chilali M., Gahinet P., Apkarian P.: Robust pole placement in LMI regions. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No 12, pp. 2257-2270, 1999.
 4. Duan G. R., Yu H. H.: LMIs in control systems: analysis, design and applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, London, 2013.
 5. El Ghaoui L., Niculescu S. I. (Editors): Advances in linear matrix inequality methods in control. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2000.
 6. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: Podstawy teorii sterowania. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2014.
 7. Koziński W.: Projektowanie regulatorów: wybrane metody klasyczne i optymalizacyjne. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2004.
 8. Lu, R., Wang, M., Bai, J., Xue, A., Zou, H.: Pole placement with LMI constraint of fuzzy descriptor system. Journal of the Franklin Institute, Vol. 352, No 7, pp. 2665 – 2678, 2015.
 9. Löfberg J.: YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 284-289, New Orleans, USA, 2004.
 10. Miller A., Rybczak M.: Methods of controller synthesis using linear matrix inequalities and model predictive control. Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin, No 43(115), pp. 22-28, 2015.
 11. Scherer C., Weiland S.: Linear Matrix Inequalities in Control. Lecture Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 2005.
 12. Shcherbakov P. S.: Alexander Mikhailovitch Lyapunov: On the centenary of his doctoral dissertation on stability of motion, Automatica, Vol. 28, No. 5, pp. 865-871, 1992.
 13. Sturm J. F.: Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. Optimization Methods and Software, Vol. 11, No 1-4, pp. 625–653, 1999.
 14. Tomera M., Kęska J., Kasprovicz A.: Sterowanie poziomem wody w kaskadzie dwóch zbiorników przy użyciu mikrokontrolera TMS320F28335, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 30, s. 123-132, 2011.

DESIGN OF WATER TANK LEVEL CASCADE CONTROL SYSTEM VIA LMI APPROACH

The paper describes a state feedback controller design by pole placement method using Linear Matrix Inequalities (LMI) approach. Conditions of pole placement constraints in a left half plane of the complex plane s are defined and allowable region for poles of the closed-loop control system are determined. For the purpose of using the linear design method, the mathematical model of controlled plant was linearized at a selected operating point. The designed state feedback controller was used for controlling the water level in a two-tank cascade system. The paper presents results of both computer simulations and real-time experiments.

Keywords: state feedback controller, linear matrix inequalities, pole placement method, tank cascade system.