Mieczysław MAJEWSKI
Wydział Budownictwa i Architektury
Politechnika Szczecińska

SPOSÓB WYZNACZANIA DOWOLNEJ LICZBY PUNKTÓW, ŚRODKA I ASYMPTOTY HIPERBOLI OKREŚLONEJ TRZEMA PUNKTAMI I JEDNĄ ASYMPTOTĄ[1]

Konstrukcja hiperboli, obejmująca wyznaczenie dowolnej liczby jej punktów, środka i brakującej asymptoty, gdy jest ona określona trzema dowolnymi punktami $\boldsymbol{A, B, C}$ i jedną asymptotą – $\boldsymbol{p}$ może być dokonana dwiema drogami. Pierwsza z dróg polega na wyznaczaniu najpierw odpowiedniej liczby i odpowiednio położonych dalszych punktów hiperboli, a następnie drugiej asymptoty – $\boldsymbol{q}$ i środka – $\boldsymbol{O}$. Druga droga polega na wyznaczeniu najpierw środka $\boldsymbol{O}$ i drugiej asymptoty $\boldsymbol{q}$, a następnie dowolnej liczby dalszych punktów i pozostałych elementów hiperboli.

Zajmijmy się najpierw wyznaczeniem dowolnej liczby i odpowiednio położonych względem siebie dalszych punktów hiperboli, np. w oparciu o twierdzenie Pascala, odnoszące się do sześciokąta wpisanego w stożkową [1].

Niech hiperbola $\boldsymbol{h}$ będzie określona punktami $\boldsymbol{A, B}$ i $\boldsymbol{C}$ oraz asymptotą $\boldsymbol{p}$ (rys. 1). Po uwzględnieniu punktu niewłaściwego $\boldsymbol{P}^{\infty}$ i danej asymptoty $\boldsymbol{p}$ hiperboli widzimy, że jest ona określona pięcioma elementami, a w związku z tym, wyznaczenie dowolnej liczby dalszych jej punktów możemy oprzeć na twierdzeniu Pascala.

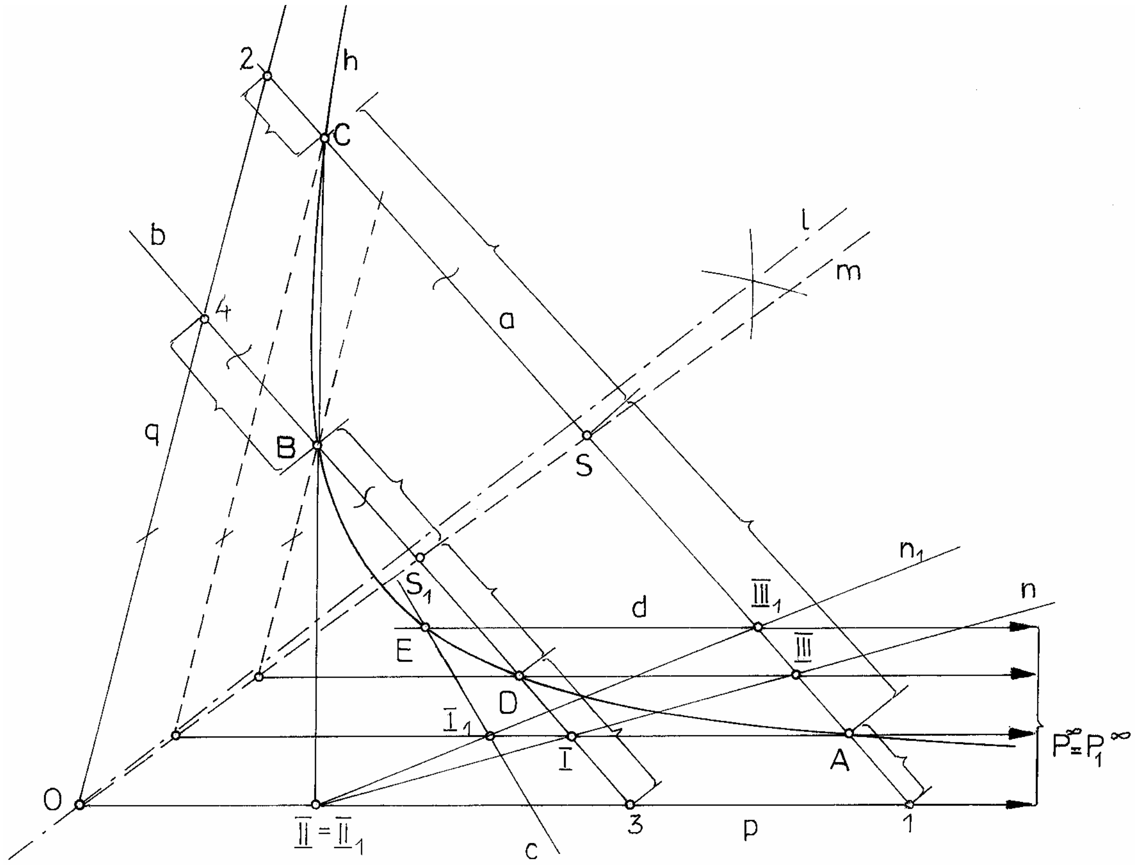
Przez punkt $\boldsymbol{B}$ poprowadźmy cięciwę $\boldsymbol{b}$ równoległą do cięciwy $\boldsymbol{a = AC}$, a następnie na podstawie twierdzenia Pascala o sześciokącie $\boldsymbol{DBCAP^{\infty}P_1^{\infty}}$ wpisanym w omawianą hiperbolę $\boldsymbol{h}$, wyznaczmy jej punkt $\boldsymbol{D \in b}$ $(\boldsymbol{D = b \cap III\ P_1^{\infty}})$, który jest punktem przecięcia cięciwy $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b = BD})$ bokiem $\boldsymbol{DP_1^{\infty}}$, przechodzącym przez punkt $\boldsymbol{III = n\ CA}$ – przecięcia się przeciwległych boków $\boldsymbol{CA}$ **i** $\boldsymbol{DP_1^{\infty}}$, należący do prostej Pascala $\boldsymbol{n = I\ II\ III}$. W analogiczny sposób możemy wyznaczyć dalsze pary cięciw równoległych omawianej hiperboli, np. $\boldsymbol{CF\ //\ AB,\ AG\ //BC,\ AH\ //DC, ...}$

Mając na uwadze własność hiperboli (stożkowych), według której środki $\boldsymbol{S, S_1, ...}$ wszystkich cięciw równoległych, np. $\boldsymbol{AC\ //\ DB\ //\ ...}$, wyznaczają jej średnicę $\boldsymbol{m}$, sprzężoną z tymi cięciwami, wyznaczamy środek hiperboli $\boldsymbol{O = pm}$ $(\boldsymbol{m = S\ S_1S_2\ ...})$, który jest punktem przecięcia asymptoty $\boldsymbol{p}$ skonstruowanymi średnicami $\boldsymbol{m, m_1, m_2, ...}$, sprzężonymi z poszczególnymi cięciwami równoległymi.

Wyznaczenie brakującej asymptoty $\boldsymbol{q \in O}$ opiera się na własności hiperboli, według której każda cięciwa przecinająca obie asymptoty i hiperbolę w punktach właściwych wyznacza odcinki, z których odcinek zawarty pomiędzy jednym z punktów należących do hiperboli i punktem należącym do jednej z asymptot jest równy odcinkowi zawartemu pomiędzy drugim z punktów hiperboli i drugim należącym do drugiej asymptoty, tj. $\boldsymbol{|2C| = |A1|}$, $\boldsymbol{|4B| = |D3|, ...}$

[1] Decydując się na opublikowanie powyższego artykułu, który pomimo dość okrężnej drogi uzasadnienia konstrukcji, wydaje się zawierać elementy o charakterze inspiracyjnym, Redakcja nie może nie wspomnieć o narzucającym się sposobie rozwiązania postawionego w nim problemu przez narysowanie jedynie dwóch cięciw hiperboli i odmierzenie na nich dwóch określonych założeniami odcinków.

itd. [2]. Punkty $\boldsymbol{2, 4, ...}$ odpowiednich cięciw równoległych $\boldsymbol{a = AC \,//\, b = DB \,//\, ...}$ wyznaczają asymptotę $\boldsymbol{q \in O}$.



Rys. 1

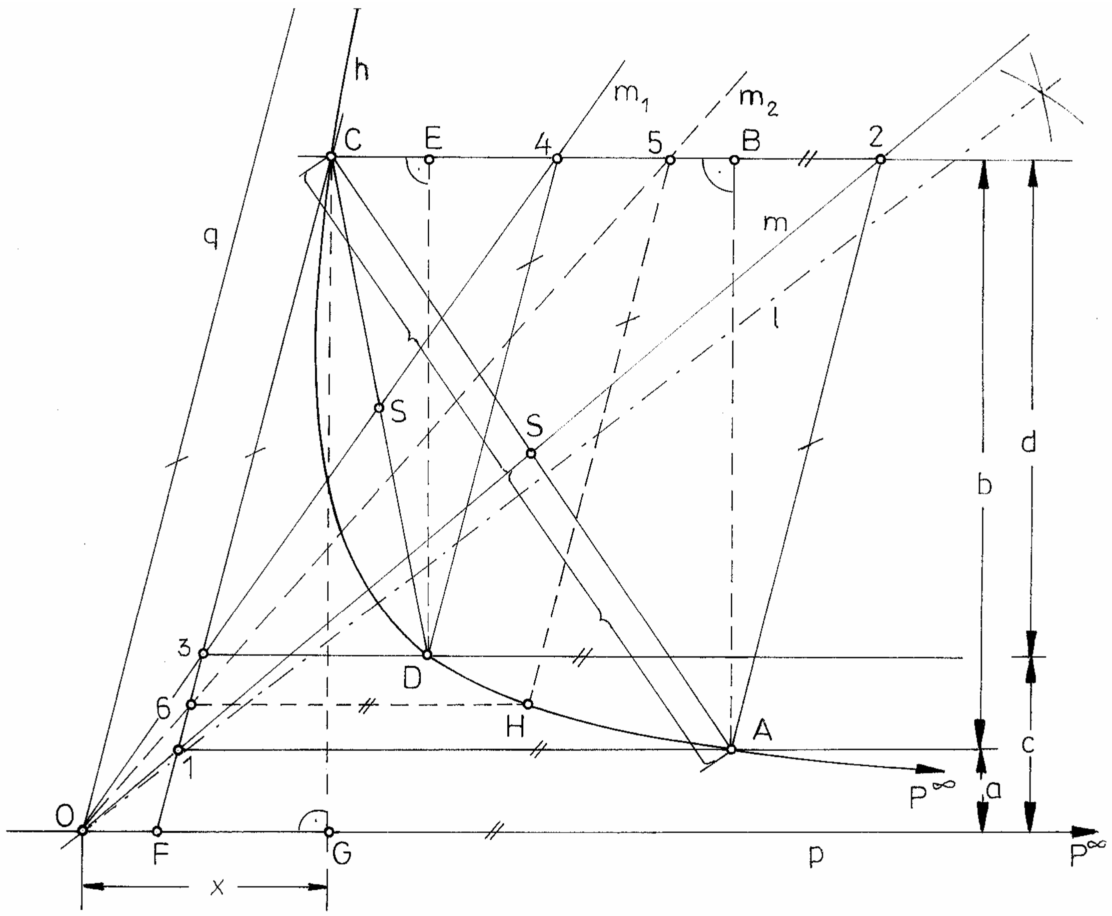
Punktem wyjścia drugiego sposobu wyznaczenia środka $\boldsymbol{O}$, asymptoty $\boldsymbol{q}$ i dowolnej liczby punktów hiperboli $\boldsymbol{h}$, określonej punktami $\boldsymbol{A, D, C}$ i asymptotą $\boldsymbol{p}$ (rys. 2), niech będzie znana konstrukcja punktów hiperboli, której dane są asymptoty i jeden punkt [3].

Ponieważ w omawianym przypadku hiperbola $\boldsymbol{h}$ jest określona jedną asymptotą – $\boldsymbol{p}$ i trzema punktami – $\boldsymbol{A, B, C}$ i wymieniona metoda nie może być bezpośrednio zastosowana (brak środka $\boldsymbol{O}$ i drugiej asymptoty), przeto wyznaczmy najpierw położenie środka $\boldsymbol{O \in p}$ i drugiej asymptoty $\boldsymbol{q \in O}$.

Położenie środka $\boldsymbol{O \in p}$ hiperboli znajdziemy z następujących zależności geometrycznych. Z podobieństwa trójkątów: $\boldsymbol{\Delta 21C \approx \Delta OF1}$ i $\boldsymbol{\Delta 43C \approx \Delta OF3}$ ustalamy, iż $\boldsymbol{|C2|ad = |C4|cb}$. Z podobieństwa trójkątów prostokątnych $\boldsymbol{\Delta 4ED \approx \Delta 2BA}$ wynika, iż $\boldsymbol{|E4| = \frac{|B2|\, d}{b}}$. Uwzględniając, iż $\boldsymbol{|C4| = |CE| + |E4|}$ **i** $\boldsymbol{|C2| = |CB| + |B2|}$ otrzymujemy:

$$\boldsymbol{|C2| = \frac{(\,|CE|\, b - |CB|\, d)\, c}{(a - c)\, d}}\,.$$

Ponadto na podstawie podobieństwa trójkątów prostokątnych $\boldsymbol{\Delta 2BA \approx \Delta 4ED \approx \Delta FGC}$ wyznaczamy odcinek $\boldsymbol{|FG| = \frac{|2B|\,(c+d)}{b}}$, gdzie odcinek $\boldsymbol{|2B| = |C2| - |CB|}$, a na podstawie podobieństwa trójkątów $\Delta 2C1 \approx \Delta OF1$ i $\Delta 4C3 \approx \Delta OF3$ wyznaczamy odcinek $|OF| = \frac{|C2|\, a}{b}$.



Rys. 2

Zatem szukany odcinek $x = |OG| = |OF| + |FG|$, ustalający położenie środka hiperboli O względem punktu $G \in p$, który jest prostokątnym rzutem punktu C hiperboli na asymptotę p ma długość:

$$x = \frac{|CE|\, bc\,(a + c + d) - |CB|\, da\,(2c + d)}{(a - c)\, db}.$$

Prosta $q \in O$, równoległa do prostej CF i przechodząca przez wyznaczony środek $O \in p$, jest szukaną drugą asymptotą omawianej hiperboli – zgodnie z wymienioną metodą wyznaczania punktów hiperboli [3].

Dowolną liczbę dalszych punktów hiperboli h, np. H, ... wyznaczamy znanym sposobem, polegającym na prowadzeniu przez środek O prostych m_2, ... przecinających proste $C2 \parallel p$ i $CF \parallel q$ w odpowiednich punktach **5, i 6, ...** i prowadzeniu przez te punkty prostych $5H \parallel q$, ... i $6H \parallel p$, ..., które w przecięciach wyznaczają punkty H, ... omawianej hiperboli h.

LITERATURA:

[1]. H.S.M. Coxeter: „Wstęp do geometrii dawnej i nowej", PWN, 1967.
[2]. B. Grochowski.: „Geometria wykreślna", Cz. II, PWN, 1962.
[3]. S. Polański, A. Kowalewski, J. Daniluk: „Geometria dla konstruktorów", WN-T, 1965.

THE METHOD OF DETERMINING ANY NUMBER OF POINTS, THE CENTER AND ASYMPTOTE OF HYPERBOLA DEFINED BY THREE POINTS AND ONE ASYMPTOTE

The subject of this work is determining optional number of points, the center and missing asymptote of hyperbola defined by three optional points and one asymptote. Presented problem is solved by two methods: the first one – based on using parallel chords determined according to Pascal theorem, and the second one issued from known construction of points of hyperbola defined by asymptotes and one point.

Recenzent: dr hab. Inż. Jerzy MROCZKOWSKI prof. Politechniki Wrocławskiej