

## MODELOWANIE PRZEPŁYWU WÓD PODZIEMNYCH METODAMI RÓŻNIC SKOŃCZONYCH I ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH – PORÓWNAWCZE BADANIA POLIGONOWE

### GROUNDWATER FLOW MODELLING USING THE FINITE DIFFERENCES METHOD AND THE FINITE ELEMENTS METHOD – COMPARATIVE MODEL STUDIES

ROBERT ZDECHLIK<sup>1</sup>, MAŁGORZATA PARTYKA<sup>1</sup>

**Abstrakt.** Filtracja wód podziemnych jest procesem skomplikowanym, o którym decydują naturalne czynniki środowiskowe (m.in. warunki hydrogeologiczne) oraz oddziaływania antropogeniczne (np. pobory wód, odwadniania, piętrzenia). Wiarygodne prognozowanie wpływu zakładanych wymuszeń na środowisko wodno-gruntowe wymaga zastosowania odpowiedniej metody badawczej, która pozwoli na precyzyjne odwzorowanie krążenia wód podziemnych. Do takich metod jest zaliczane numeryczne modelowanie procesów filtracji, wykorzystujące matematyczny opis przepływu wód podziemnych na podstawie przyjętych wielkości parametrów i warunków brzegowych. Do modelowania przepływu wód podziemnych najczęściej stosuje się oprogramowanie bazujące na metodzie różnic skończonych MRS, wykorzystujące symulatory rodziny MODFLOW. Z uwagi na liczne zalety, głównie w zakresie większej precyzji odwzorowania skomplikowanej geometrii rozpatrywanych struktur wodonośnych i obiektów kształtujących krążenie wód, coraz większego znaczenia nabiera alternatywna metoda elementów skończonych MES. W artykule przedstawiono charakterystyczne cechy modelowania obydwu metod. Opierając się na przyjętym fikcyjnym jednolitym poligonie badawczym, odwzorowującym typowe dolinne warunki hydrogeologiczne, zaprezentowano metodykę realizacji modeli i dokonano obliczeń numerycznych przepływu wód metodami MRS i MES, każdorazowo w dwóch wariantach zagęszczenia siatki dyskretyzacyjnej. Po zestawieniu otrzymanych rezultatów podjęto próbę analizy porównawczej wad i zalet obydwu metod.

**Słowa kluczowe:** metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych, modelowanie przepływu, wody podziemne.

**Abstract.** The filtration of groundwater is a complicated process, which is determined by natural environmental factors (hydrogeological conditions) and anthropogenic impacts. Reliable predictions of the impact of the established extortions on the groundwater environment require the use of an appropriate research method that will allow for a precise representation of groundwater circulation. Such methods include numerical modelling of filtration processes, using a mathematical description of groundwater flow, based on assumed parameters and boundary conditions. For groundwater flow modelling, software based on the finite differences method FDM, using MODFLOW simulators, is most commonly used. Due to the numerous advantages, mainly in terms of greater precision in the representation of the complex geometry of the aquifers and objects affecting the water circulation, the alternative FEM finite elements method is becoming increasingly important. The article presents characteristic features of modelling using both methods. Based on the established imaginary research site, representing typical valley hydrogeological conditions, the paper presents the methodology of model implementation and numerical calculations of water flow using FDM and FEM methods, each in two variants of grid density. Obtained results are presented, with an attempt to compare the advantages and disadvantages of both methods.

**Key words:** finite differences method, finite elements method, flow modelling, groundwater.

---

<sup>1</sup> AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków; e-mail: robert.zdechlik@agh.edu.pl.

## WSTĘP

Modelowanie numeryczne obecnie jest często stosowaną metodą badań hydrogeologicznych, umożliwiającą m.in. precyzyjne prognozowanie dopływów wód podziemnych do kopalń, wkopów lub ujęć, jak też dokumentowanie zasobów wód podziemnych. Upowszechnienie komputerów osobistych spowodowało ewolucję oprogramowania do modelowania zagadnień hydrogeologicznych, zarówno w kierunku usprawnienia obsługi (przez umożliwienie wymiany danych lub wręcz integrację z systemami informacji i analiz geoprzestrzennych oraz wszechstronną wizualizację rezultatów), jak i rozwoju symulatorów obliczeniowych pozwalających na rozwiązywanie problemów sprawiających dotychczas trudności. Programy do modelowania bazują na jednej z dwóch podstawowych metod obliczeniowych przepływu wód podziemnych – różnic skończonych (MRS, ang. FDM, *Finite Differences Method*) – symulatory z rodziny MODFLOW (<https://water.usgs.gov/ogw/modflow/>), lub elementów skończonych (MES, ang. FEM, *Finite Elements Method*) – FEFLOW. Obydwie metody pod względem konstrukcji modeli wyraźnie się różnią. Charakterystyczne cechy modelowania z wykorzystaniem wymienionych metod przedstawiono bazując na przyjętym fikcyjnym jednolitym poligonie badawczym, odwzorowującym typowe dolinne warunki hydrogeologiczne. Zaprezentowano metodykę realizacji modeli i dokonano obliczeń numerycznych przepływu wód, w dwóch wariantach zagęszczenia siatki dyskretyzacyjnej. Na podstawie uzyskanych wyników podjęto próbę wykonania analizy porównawczej wad i zalet obydwu metod.

## PODSTAWY MODELOWANIA MRS I MES

Modelowanie numeryczne przepływu wód podziemnych polega na rozwiązaniu różniczkowego równania filtracji, którego ogólna postać dla ruchu w niejednorodnym i anizotropowym ośrodku porowym, przy nieustalonych warunkach przepływu, była prezentowana w licznych publikacjach, m.in. w poradniku metodycznym Dąbrowskiego i in. (2010). Istnieją metody analityczne do rozwiązywania takich równań, jednak ich zakres stosowalności jest ograniczony do pewnych szczególnych przypadków (zależności liniowe, proste przypadki geometryczne) i rzadko są one w stanie dać zadowalające rezultaty dla rzeczywistych problemów (Diersch, 2014). W przypadku skomplikowanych geometrii struktur wodonośnych oraz złożonych warunków brzegowych w celu uzyskania wyników o satysfakcjonującej dokładności konieczne jest zastosowanie bardziej zaawansowanych metod obliczeniowych, do których należą metody numeryczne różnic skończonych (MRS) oraz elementów skończonych (MES). Istotą tych metod jest uzyskanie przybliżonych funkcji opisujących szukane wartości (które mają charakter ciągły w czasie i przestrzeni) na podstawie wartości dyskretnych, czyli takich, których położenie w czasie i przestrzeni jest ściśle określone (Diersch, 2014).

Program komputerowy rozwiązuje zestaw równań wygenerowany przez przybliżenie równań cząstkowych (ang. *partial differential equations*), które składają się na model matematyczny. Metody aproksymacyjne (MES lub MRS) zmieniają formę modelu na taką, która może być relatywnie szybko rozwiązana przez komputer. Zestaw równań cząstkowych przybiera w ten sposób formę równania macierzowego, a metody numeryczne służą rozwiązaniu tego równania. Uogólniając: proces obliczeniowy dzieli się na dwa etapy – zastosowanie metody numerycznej (MES lub MRS) do oryginalnego modelu matematycznego oraz rozwiązanie wynikowego równania macierzowego (Anderson, Woessner, 1992). Program może znaleźć rozwiązanie równania, jeżeli będą sprecyzowane warunki brzegowe (ang. *boundary conditions*) oraz warunki początkowe (ang. *initial conditions*). Niezależnie od wyboru metody, a co za tym idzie, sposobu dyskretyzacji obszaru (podziału na bloki obliczeniowe), w modelu numerycznym rozwiązywany jest ten sam układ równań, odzwierciedlający bilans krążenia wód podziemnych (Dąbrowski i in., 2010).

Zasadnicza różnica pomiędzy rozpatrywanymi metodami w uproszczeniu sprowadza się do kształtu siatek dyskretyzacyjnych (fig. 1), a więc do rozmieszczenia w przestrzeni punktów, do których przypisywane są wartości – węzłów (ang. *nodes*). W metodzie różnic skończonych elementy siatki przybierają kształt brył o podstawach prostokątnych, a zagęszczenie siatki w części badanego obszaru wpływa na kształt bloków na pozostałym obszarze. Ten fakt, dawniej wpływający na czasochłonność obliczeń, współcześnie przestaje mieć istotne znaczenie, zwłaszcza w modelach przepływu, gdzie bloki obliczeniowe są zazwyczaj stosunkowo duże. Przy takim kształcie siatki wartości przyjmowanych parametrów są przypisywane do centrów bloków obliczeniowych (ang. *block-centered flow*).

Metoda elementów skończonych charakteryzuje się znacznie większą elastycznością kształtu siatki dyskretyzacyjnej. Obszar obliczeniowy może być podzielony na elementy o dowolnym kształcie, najczęściej jednak przybierają one formę brył o podstawach trójkątnych. Możliwe jest zagęszczenie siatki w dowolnym fragmencie obszaru, bez konieczności modyfikacji pozostałych rejonów. Kształt siatki jest precyzyjnie dopasowywany do zdefiniowanych uprzednio granic obszaru filtracji i innych charakterystycznych elementów (np. ujęć wód podziemnych). Węzłami siatki są wierzchołki bloków obliczeniowych, co pozwala na precyzyjne odzwierciedlenie w przestrzeni np. punktów pomiaru położenia zwierciadła wody lub lokalizacji studni (fig. 1).

## CHARAKTERYSTYKA POLIGONU BADAWCZEGO

Poligon będący przedmiotem badań modelowych nie odwzorowuje konkretnego systemu rzeczywistego. Przyjęto układ fikcyjny, odpowiadający często występującym typowym warunkom hydrogeologicznym (Świerczek, 2017). Badania modelowe obejmują obszar doliny o powierzchni 22 km<sup>2</sup> (fig. 2). Ograniczenie od północy stanowi brzeg

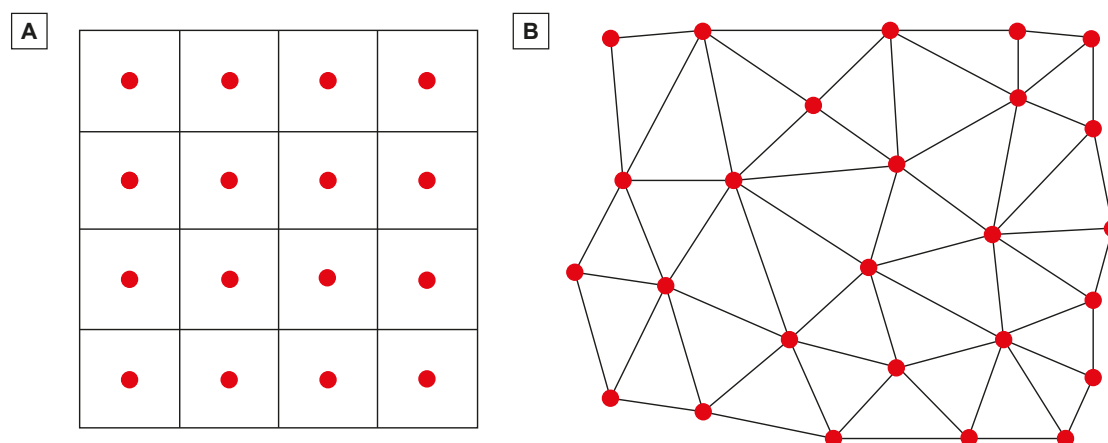


Fig. 1. Schemat 2D lokalizacji węzłów obliczeniowych w modelach MRS (A) i MES (B)

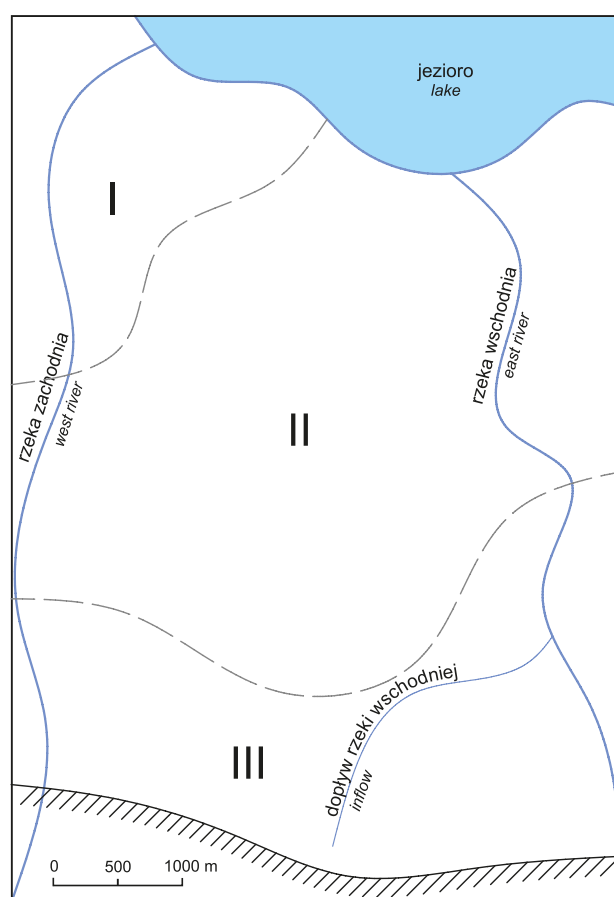
2D scheme of the location of computational nodes in FDM (A) and FEM (B) models

akwenu wodnego o dobrym kontakcie hydraulicznym z warstwą wodonośną (warunek brzegowy I rodzaju). Wschodnią oraz zachodnią granicę stanowią dwie rzeki uchodzące do jeziora, z uwagi na kolmatację cechujące się ograniczonym kontaktem hydraulicznym wód powierzchniowych z podziemnymi (warunek brzegowy III rodzaju). Granicę południową modelu założono w sposób zróżnicowany – jako granicę odsuniętą – warunek brzegowy III rodzaju (hydroizohipsa w warstwie 1), lub jako kontakt utworów wodonośnych z utworami nieprzepuszczalnymi – warunek brzegowy II rodzaju typu  $Q = 0$  (warstwy 2 i 3).

W układzie wertykalnym symulowano trzy warstwy numeryczne, odpowiadające przyjętym wydzieleniom litostratygraficznym: warstwa nr 1 (wodonośna) o charakterze swobodnym, piaski drobnoziarniste ( $k = 7$  m/d); warstwa nr 2 (słabo przepuszczalna) pylasta ( $k = 0,005$  m/d); warstwa nr 3 (wodonośna) o charakterze naporowym. Warstwa nr 3 wykazuje strefową zmienność wykształcenia: w części północno-zachodniej występują utwory żwirowe ( $k = 58$  m/d), w części centralnej piaski gruboziarniste ( $k = 22$  m/d), w części południowej – piaski średnioziarniste ( $k = 13$  m/d). Górną geometryczną granicę modelu stanowi powierzchnia terenu ( $104 \div 123,5$  m n.p.m.), dolną – spąg utworów wodonośnych ( $67,5 \div 107,5$  m n.p.m.). Miąższość utworów wodonośnych maleje w kierunku południowym. Wysokość zwierciadła wód podziemnych w warunkach naturalnych wynosi  $104 \div 120$  m n.p.m. Zasilane następuje na drodze infiltracji opadów atmosferycznych (132 mm/rok).

### KONSTRUKCJA MODELI PRZEPIYU WÓD PODZIEMNYCH

Do realizacji badań modelowych wybrano dwa szeroko rozpowszechnione programy (Zdechlik, 2016). Metodę różnic skończonych wykorzystuje program Processing Modflow 8 (Chiang, Kinzelbach, 2001), rozwijany przez firmę Simcore Software (www.simcore.com). Natomiast



Litologia warstwy 3  
Layer 3 lithology

- I żwiry  
gravels
- II piaski gruboziarniste  
coarse sands
- III piaski średnioziarniste  
medium grain sands

— rzeki  
rivers  
////// granica utworów  
nieprzepuszczalnych  
border of impermeable  
sediments

Fig. 2. Mapa dokumentacyjna modelowanego obszaru

Documentation map of the modelled area

na metodzie elementów skończonych bazuje program FEFLOW 7, rozwijany i dystrybuowany przez firmę DHI ([www.mikepoweredbydhi.com/products/feflow](http://www.mikepoweredbydhi.com/products/feflow)).

W obydwu metodach przygotowano modele o dwóch różnych stopniach zagęszczenia siatki dyskretyzacyjnej. W metodzie różnic skończonych (MRS) przyjęto bloki kwadratowe o rozmiarach  $250 \times 250$  m – 27 wierszy i 19 kolumn (wariant 1A) oraz  $125 \times 125$  m – 54 wiersze i 38 kolumn (wariant 1B). Celem zachowania porównywalnego stopnia zagęszczenia siatek dyskretyzacyjnych, w metodzie elementów skończonych założono, że pojedyncze elementy siatki (trójkąty) powinny mieć powierzchnię zbliżoną do powierzchni kwadratowego bloku MRS. W efekcie siatki modelu MES składały się z ok. 350 (wariant 2A) i 1400 (wariant 2B) elementów (fig. 3, 4).

W metodzie MRS przyjęto realizację modelu typu „3D” (odzworowanie poszczególnych wydzielen w postaci oddzielnych warstw numerycznych). Model przygotowano w sposób standardowy, poszczególnym blokom obliczeniowym bezpośrednio przypisano wartości parametrów oraz wielkości odpowiadające realizowanym warunkom brzegowym (Kulma, Zdechlik, 2009).

W metodzie MES założono konstrukcję modelu typu „Layered 3D mesh”, w którym przyjęty podział horyzontalny jest zachowany na wszystkich warstwach, a bloki w przestrzeni mają kształt graniastosłupów trójkątnych. Przygotowano tzw. *supermesh* – zbiór poligonów, linii oraz obiektów punktowych, odwzorowujących istotne elementy kształtujące model (np. granice wydzielen, rzeki, studnie), na podstawie których w dalszym etapie jest przeprowadzana dyskretyzacja. *Supermesh* decyduje o kształcie przyjmowanej przez program siatki dyskretyzacyjnej (ang. *mesh*) – na bokach poligonów oraz wzdłuż zdefiniowanych linii zostają rozlokowane ściany trójkątów, natomiast w miejscu obiektów punktowych znajdują się węzły siatki. Generowanie siatki przebiega na podstawie wybranego algorytmu, decydującego o sposobie odwzorowania geometrii. Wskazano algorytm *triangle*, uznawany za najlepszy w rozwiązywaniu zagadnień o geometrii skomplikowanej. Przyjęto minimalną wartość kąta trójkątów tworzących siatkę równą  $30^\circ$ , unikając trójkątów o małych kątach, co daje równomierne rozlokowanie węzłów w siatce. Poprawność wygenerowanej siatki skontrolowano kryterium Delaunay’a, którego spełnienie oznacza, że każde koło zbudowane na trzech sąsiadujących ze sobą punktach (węzłach) nie zawiera żadnego innego punktu.

Pionowe rozprzestrzenienie modelu jest definiowane przez przyjęcie tzw. powierzchni rozgraniczających (ang. *slice*), oddzielających poszczególne warstwy (ang. *layers*); trójwarstwowy układ modelu opisują cztery powierzchnie *slice*. Morfologię poszczególnych powierzchni odtwarza się przez interpolację danych o charakterze punktowym, pochodzących z otworów badawczych.

W programie FEFLOW 7.0 warunki brzegowe są przypisywane do węzłów siatki. Warunki brzegowe I rodzaju (*Hydraulic Head BC*) założono wzdłuż północnej granicy modelu (krawędź jeziora). Warunki brzegowe III rodzaju

(*Fluid transfer BC*), odzwierciedlające rzeki o ograniczonym kontakcie hydraulicznym z warstwą wodonośną, zastosowano w węzłach obrazujących przebieg rzek na *slice* nr 1 i 2, co odpowiada odwzorowaniu kontaktu rzeki z warstwą 1. Spadek hydrauliczny przypisywano jako zróżnicowane położenie zwierciadła wody w poszczególnych węzłach (interpolowane z wartości zadanych do węzłów w przekrojach hydrometrycznych). Opór koryta rzeczno, jako jedna z właściwości utworów wodonośnych (*Material Properties*), jest przypisywany do powierzchni (ang. *elements*) sąsiadujących z danym warunkiem brzegowym. Warunkami brzegowymi III rodzaju w węzłach położonych na południowej granicy modelu w obrębie warstwy 1 (*slice* 1 i 2), odwzorowano również granicę odsuniętą (Świerczek, 2017).

Zasilanie z infiltracji, mimo że stanowi warunek brzegowy ( $Q = \text{const}$ ), w programie jest deklarowane w menu *Material Properties* i jest przypisywane do powierzchni, a nie do węzłów. Podobnie jak wartości parametrów filtracyjnych i porowatość.

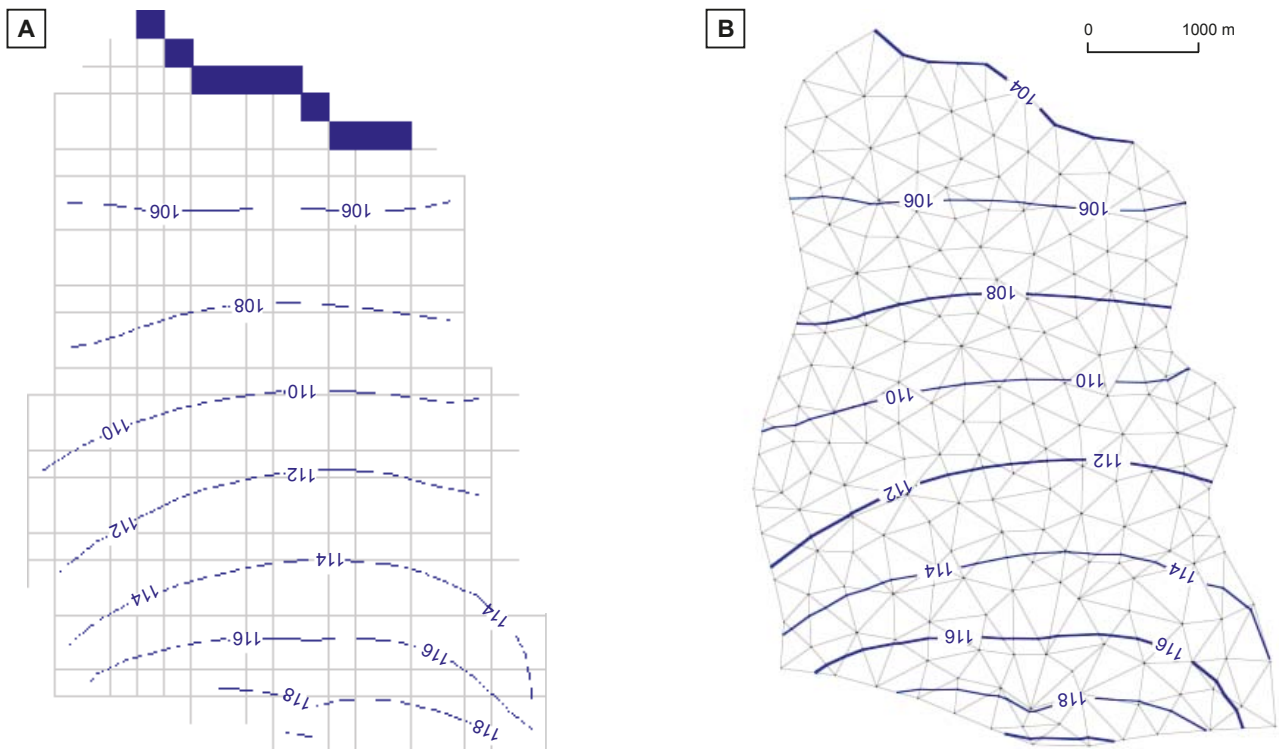
Obliczenia symulacyjne w MRS przeprowadzono symulatorem MODFLOW 2005, wykorzystując procedurę PCG2. W programie FEFLOW (MES) do obliczeń wykorzystano metodę iteracyjną PCG. Założeniem scenariusza symulacji modelowych było odtworzenie naturalnego stanu filtracji wód podziemnych.

## REZULTATY OBLICZEŃ

Wyniki obliczeń symulacyjnych przedstawiono w postaci zestawień bilansowych ilości krążących wód dla całej modelowanej struktury (tab. 1) oraz w formie map położenia wynikowego zwierciadła wody (fig. 3, 4).

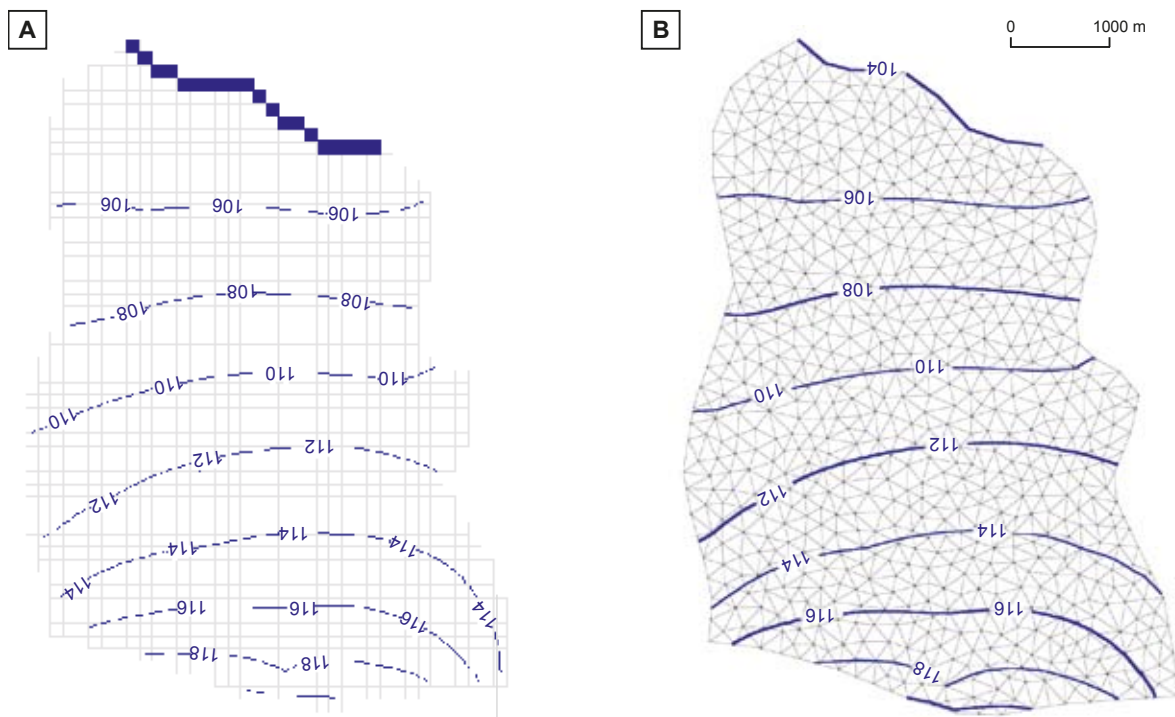
W ujęciu zgeneralizowanym, głównym składnikiem bilansów po stronie dopływów (ok. 77% zasilania) jest infiltracja opadów atmosferycznych. Istotną część zasilania (21–22%) stanowi również dopływ od strony południowej (odsunięta granica). Pozostałą niewielką część bilansu po stronie zasilania dopełnia infiltracja z rzek, głównie z dopływu rzeki wschodniej. Zasadniczą rolę po stronie drenażu odgrywa zlokalizowane w północnej części obszaru jeziora, do którego odpływa ok. 52–60% krążących w modelowanej strukturze wód. Każda z rzek drenuje górotwór, w ilości względnej od kilku do kilkunastu procent sumy bilansowej.

W ujęciu szczegółowym otrzymane wielkości zasilania i drenażu związane z poszczególnymi elementami kształtującymi bilans różnią się w zależności od rozpatrywanej metody oraz stopnia zagęszczenia siatki. Większe rozbieżności występują pomiędzy modelami MRS i MES o mniejszym zagęszczeniu (warianty 1A i 2A). Różnica w całkowitych ilościach krążących wód uzyskanych w obydwu rozpatrywanych metodach sięga  $870 \text{ m}^3/\text{d}$ , co stanowi ok. 8% sumarycznego przepływu. W przypadku modeli o większym zagęszczeniu siatki dyskretyzacyjnej (warianty 1B i 2B – mniejsze bloki, bardziej precyzyjne odwzorowanie) rozbieżność wyników jest znacznie mniejsza ( $312,5 \text{ m}^3/\text{d}$  – ok. 3% wartości sumarycznej).



**Fig. 3. Położenie zwierciadła wód podziemnych [m n.p.m.] w warstwie 3, przy mniejszym zagęszczeniu siatki (warianty 1A i 2A), dla modeli MRS (A) i MES (B)**

Groundwater head contours [m a.s.l.] in layer 3, with a lower grid/mesh density (1A and 2A variants), for FDM (A) and FEM (B) models



**Fig. 4. Położenie zwierciadła wód podziemnych [m n.p.m.] w warstwie 3, przy większym zagęszczeniu siatki (warianty 1B i 2B), dla modeli MRS (A) i MES (B)**

Groundwater head contours [m a.s.l.] in layer 3, with a higher grid/mesh density (1B and 2B variants), for FDM (A) and FEM (B) models

Porównywalne relacje zachodzą w odniesieniu do wielkości składników bilansowych (tab. 1). Znaczące różnice udziału procentowego w bilansie wodnym w poszczególnych metodach charakteryzują wymianę wód z rzekami głównymi, przy czym bardziej są zauważalne na modelach o mniejszej liczbie bloków obliczeniowych (warianty A). Największe rozbieżności występują w wielkościach drenażu górotworu przez rzeki – bezwzględne wartości rozbieżności osiągają 866 m<sup>3</sup>/d. W odniesieniu do całkowitych rezultatów uzyskanych na modelach MRS, otrzymane rozbieżności stanowią od 21 (na modelu o większym zagęszczeniu) do 35% (o mniejszym zagęszczeniu).

Znacząca różnica występuje również w przypadku wielkości zasilania z infiltracji opadów atmosferycznych. Jest to jednak łatwe do uzasadnienia – brak możliwości dokładnego dostosowania kształtu siatki MRS do granic obszaru filtracji sprawia, że powierzchnia aktywnych bloków modelu nie odpowiada w pełni rzeczywistemu rozmiarowi modelowanego obszaru (w rozpatrywanym przypadku jest większa), co automatycznie wpływa na symulowaną ilość wody infiltrującej do struktury wodonośnej. Względnie mniejsze różnice występują w przypadku odpływu wody przez północną granicę modelu, którą stanowi jezioro. Podobnie kształtują się wyniki dopływów od strony granicy odsuniętej – różnica na modelach o mniejszym zagęszczeniu wynosi nieco ponad 10%, podczas gdy na modelach o drobniejszej siatce – tylko 0,6% w odniesieniu do wartości otrzymanej na modelu MRS.

Ukształtowanie układu pola hydrodynamicznego, przedstawione w formie map hydroizohips dla warstwy nr 3 (fig. 3, 4), w obydwu metodach (MRS i MES) jest bardzo podobne. Kształt hydroizohips potwierdza silnie drenujący charakter głównych rzek (tab. 1). Stopień zagęszczenia siatek nie wpływa znacząco na uzyskane układy pola hydrodynamicznego – dla przyjętych dyskretyzacji rozkłady ciśnień w obydwu metodach są bardzo zbliżone.

Zróznicowanie rezultatów bilansowych można zauważyć, rozpatrując wyniki uzyskane w poszczególnych metodach dla różnych stopni zagęszczenia siatki dyskret-

tyzacyjnej (warianty B w odniesieniu do wariantów A). W przypadku modeli MRS sumaryczna wielkość dopływu do struktury obliczona na modelu o bardziej zagęszczonej siatce (wariant 1B) jest mniejsza niż dla modelu na siatce mniej zagęszczonej (wariant 1A) o blisko 350 m<sup>3</sup>/d. Dla modeli MES (warianty 2A i 2B) różnice są mniejsze, nieznacznie przekraczają 200 m<sup>3</sup>/d, przy czym wyższe wartości są obserwowane w wariancie większego zagęszczenia siatki (2B).

## PODSUMOWANIE

Największe rozbieżności w wynikach symulacji uzyskanych metodami MRS i MES występują w przypadku ilości wód ulegających wymianie pomiędzy warstwą wodonośną a rzekami (zasilanie/drenaż). W rozpatrywanych przypadkach różnice sięgają nawet 38% (tab. 1). Przyczyną tak istotnych rozbieżności najprawdopodobniej są ograniczenia programu FEFLOW, który w swojej standardowej postaci nie ma możliwości precyzyjnego odwzorowania geometrycznych rozmiarów cieków w obrębie bloków siatki. W aplikacjach z rodziny MODFLOW można zdefiniować charakter poszczególnych odcinków cieków wraz z ich geometrią, co pozwala na dość precyzyjne odwzorowanie oddziaływania rzek. Zastępczym rozwiązaniem tego ograniczenia w programie FEFLOW mogłoby być przedstawienie rzek nie jako obiektów liniowych, lecz w postaci poligonów, odpowiadających kształtem rozpatrywanym odcinkom rzek. Alternatywnie możliwe jest odwzorowanie rzek za pomocą warunków brzegowych I rodzaju, ale uniemożliwia to odzwierciedlenie dodatkowego oporu wywołanego obecnością w dnieniu rzeki utworów kolmatacyjnych, co może być uzasadnione jedynie w przypadku rzek większych lub o większym spadku hydraulicznym. Innym rozwiązaniem jest zintegrowane modelowanie wód podziemnych i powierzchniowych z wykorzystaniem platformy symulacyjnej dla wód powierzchniowych MIKE (Monnikhoff, Harntack,

Tabela 1

Bilanse krążenia wód [m<sup>3</sup>/d] dla modeli MRS i MES  
Water circulation balances [m<sup>3</sup>/d] for FDM and FEM models

	MRS (MODFLOW)				MES (FEFLOW)			
	zasilanie		drenaż		zasilanie		drenaż	
Wariant	1A	1B	1A	1B	2A	2B	2A	2B
Jezioro	0,0	0,0	5729,4	6147,1	0,0	0,0	6343,0	6268,1
Opady atmosferyczne	8529,6	8229,8	0,0	0,0	7924,7	7929,9	0,0	0,0
Rzeka zachodnia	7,0	3,8	2066,0	1663,0	0,0	0,0	1401,0	1449,5
Rzeka wschodnia	8,4	0,0	2497,5	2259,6	0,0	0,0	1631,8	1771,2
Dopływ rzeki wschodniej	106,1	75,1	718,8	598,7	96,5	79,7	766,1	867,0
Granica odsunięta	2361,0	2359,7	0,0	0,0	2120,6	2346,3	0,0	0,0
<b>Suma</b>	11012,1	10668,4	11011,7	10668,4	10141,8	10355,9	10141,9	10355,8

2009), co potencjalnie znacznie komplikuje proces badań modelowych.

Wyraźne, jednak względnie niezbyt duże, różnice wyników obserwuje się w przypadku wielkości zasilania z infiltracji. Jest to spowodowane ograniczeniami dyskretyzacji w MRS, gdzie o charakterze bloków (aktywne/nieaktywne) decydują relacje powierzchni poszczególnych wydzieleni. MES pozwala na precyzyjne odwzorowanie zewnętrznych konturów modelu – przy odpowiednio dobranych kryteriach generowania bloków, boki trójkątów siatki z większą precyzją odpowiadają rzeczywistym granicom modelowanego obszaru. Różnice w wielkościach zasilania z infiltracji są proporcjonalne do różnic rozmiarów symulowanych obszarów w poszczególnych metodach. Niewielkie rozbieżności w wielkości zasilania występują nawet pomiędzy modelami tego samego typu (MES) ale o różnym stopniu dyskretyzacji (warianty 2A i 2B), co świadczy o jednoznacznej zależności wielkości zadawanego zasilania z infiltracji od precyzji odwzorowania konturów obszarów rzeczywistych. W tym przypadku przewagę zyskują modele MES.

Najważniejszą metodą weryfikacji poprawności obliczeń modelowych byłoby porównanie wyników generowanych przez modele z wynikami obserwacji systemu rzeczywistego. Takie postępowanie wymagałoby przygotowania modeli w dwóch środowiskach (MRS i MES) dla tych samych obiektów/struktur rzeczywistych. Po ich kalibracji, przez odniesienie do obserwacji systemu rzeczywistego (pomiarów zwierciadła, przepływów w ciekach), można by ocenić poprawność odwzorowania warunków hydrogeologicznych przez obydwie metody. Takie działania są w fazie realizacji.

Uzyskane wyniki z przyjętego hipotetycznego, fikcyjnego poligonu badawczego wskazują na użyteczność obydwu metod. Niezaprzeczalną zaletą MES jest możliwość bardzo precyzyjnego odwzorowania skomplikowanej zmienności geometrycznej (np. przebiegu granic, cieków) i lokalizacji obiektów (np. studni), przez dodatkowe zagęszczanie elementów siatki w wybranych obszarach modelu (Sitek, 2017). Należy jednak mieć na uwadze, że obsługa programów do modelowania MES jest bardziej skomplikowana, w odniesieniu do klasycznych wersji programów MRS. Wiąże się to z inną filozofią konstruowania modeli, wykorzystującą w większym stopniu modelowanie obiektowe (przypisywanie cech/parametrów do rozpatrywanych obszarów/obiektów), niż klasyczne modelowanie dyskretyzacyjne (operowanie bezpośrednio na blokach). Tym niemniej również modelowanie w środowiskach MRS ostatnimi czasy rozwija się w kierunku obiektowego (tzw. modelowanie konceptualne – GMS i Visual MODFLOW Flex), z wykorzystaniem obiektów wraz z przypisanymi cechami/parametrami, które następnie są transponowane na układ gridowy/matrycowy rozwiązywany programem MODFLOW. Istotną zaletą jest

możliwość nie tylko bezpośredniego definiowania obiektów w programie do modelowania, lecz także możliwość wykorzystania obiektów przygotowanych w innych programach (głównie w środowisku GIS).

Przedstawione konkluzje są efektem badań na modelach skonstruowanych na podstawie przyjętych założeń. Nie można ich bezpośrednio ekstrapolować na inne schematy scenariuszy obliczeniowych. Bardziej uniwersalne i wszechstronne porównanie otrzymanych rezultatów w obydwu metodach wymaga dalszych badań porównawczych, dla zróżnicowanych założeń obliczeń prognostycznych.

Badania porównawcze prowadzone na obiektach rzeczywistych, dla których istniałaby możliwość zweryfikowania uzyskanych wyników, pozwoliłyby określić zalety i przewagę którejś z metod.

*Prace badawcze realizowano m.in. w ramach badań statutowych Katedry Hydrogeologii i Geologii Inżynierskiej AGH w Krakowie (11.11.140.797).*

## LITERATURA

- ANDERSON M., WOESSNER W., 1992 – Applied Groundwater Modeling. Simulation of flow and advective transport. Academic Press, San Diego.
- CHIANG W.-H., KINZELBACH W., 2001 – 3D-Groundwater Modeling with PMWIN. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- DĄBROWSKI S., KAPUŚCIŃSKI J., NOWICKI K., PRZYBYŁEK J., SZCZEPAŃSKI A., 2010 – Metodyka modelowania matematycznego w badaniach i obliczeniach hydrogeologicznych – poradnik. Ministerstwo Środowiska, Poznań.
- DIERSCH H.-J., 2014 – FEFLOW. Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media. Springer, Berlin.
- KULMA R., ZDECHLIK R., 2009 – Modelowanie procesów filtracji. Ucz. Wydaw. Nauk.-Dydakt. AGH, Kraków.
- MONNINKHOFF L., HARTNACK J.N., 2009 – Improvements in the coupling interface between FEFLOW and MIKE 11. *W: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International FEFLOW User Conference*, 14–16 September, Potsdam.
- SITEK S., 2017 – Modelowanie wód podziemnych na terenach górniczych z wykorzystaniem oprogramowania FEFLOW. *Prz. Geol.*, **65**, 11/3: 1451–1459.
- ŚWIERCZEK M., 2017 – Porównawcze badania modelowe filtracji wód podziemnych metodami różnic skończonych i elementów skończonych [pr. mgr., niepubl.]. AGH, Kraków.
- ZDECHLIK R., 2016 – A review of applications for numerical groundwater flow modeling. *W: 16<sup>th</sup> International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2016, Conf. Proc.*, 2–5 November, 2016, Book 3, v. 3: 11–18.
- <https://water.usgs.gov/ogw/modflow/> (dostęp: lipiec 2018).
- [www.mikepoweredbydhi.com/products/feflow](http://www.mikepoweredbydhi.com/products/feflow) (dostęp: lipiec 2018).
- [www.simcore.com](http://www.simcore.com) (dostęp: lipiec 2018).

## SUMMARY

Groundwater flow modelling consists in solving the differential equation of filtration, based on numerical methods: finite differences (FDM) and finite elements (FEM). The main difference between the methods is related to the shape of the discretization grids and the distribution of points in the space, to which the values are assigned. In the finite differences method, grid elements take the shape of solids with rectangular bases, and the density of the grid in a part of the study area influences the shape of blocks in the remaining area. The finite element method is characterized by much greater flexibility of the shape of the discretization grid. The computational area can be divided into elements of any shape, but most often they take the form of solids with triangular bases. It is possible to refine the mesh in any part of the area, without having to modify other areas.

To compare both methods, a fictitious system was adopted, corresponding to the typical hydrogeological conditions that often occur. Model research includes a valley area of 22 km<sup>2</sup>, limited from the north by a lake (type I boundary conditions), two rivers on the east and west (type III b.c.), and from the south by the so-called general-head boundary (type III b.c.). Three numerical layers were simulated: layer 1, unconfined aquifer (fine-grained sands); layer 2 (semi-permeable); layer 3, confined aquifer.

The research was carried out using Processing MODFLOW 8 (FDM) and FEFLOW 7 (FEM) programs. In both methods, two different degrees of density of the dis-

cretization grid were prepared. In the FDM, square blocks 250 × 250 m (27 rows, 19 columns) and 125 × 125 m (54 rows, 38 columns) were adopted. In the FEM, it was assumed that individual grid elements (triangles) should have an area similar to the area of the FDM square block. As a result, the FEM mesh system consisted of approximately 350 and 1400 elements.

The results of simulation calculations are presented in the form of water balance for the entire modelled structure and in the form of groundwater head contours maps. The obtained supply and drainage quantities of water differ depending on the considered method and the density of the discretization grid – larger discrepancies occur between the FDM and FEM models with lower grid density. Significant differences in the percentage of the water balance characterize the water exchange between the aquifer and rivers (inflow/outflow). The hydrodynamic field systems obtained in both methods are very similar. The shape of groundwater head contours confirms the draining nature of the rivers. The degree of mesh density does not significantly affect the shape of the hydrodynamic field.

The obtained results indicate the usefulness of both modelling methods. An undeniable advantage of FEM is the possibility of very precise mapping of complicated geometrical variability (*e.g.* the course of boundaries, rivers) and the location of objects (*e.g.* wells) by additional refinement of grid elements in selected areas of the model.