

Adam ŻUCHOWSKIZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin**Nietypowe metody eksperymentalnego wyznaczenia parametrów zastępczego modelu Strejca**

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

Streszczenie

Do opisu zachowania się wielu typów obiektów dynamicznych przydatny jest model Strejca, posiadający tylko trzy parametry: współczynnik statycznego wzmocnienia k , stałą, czasową T , oraz rząd dynamiki n . Ponieważ prawdziwa transmitancja obiektu nie jest znana, parametry te należy w praktyce wyznaczyć wykonując odpowiednie eksperymenty identyfikacyjne. Omówiono niektóre nietypowe przykłady takich metod.

Słowa kluczowe: Identyfikacja, model Strejca, wyznaczenia parametrów.

Untypical methods for experimental determining of Strejc's model parameters**Abstract**

The so-called Strejc's model of relatively simple form, having only three parameters: static amplification factor k , time constant T and order of dynamics n , is useful for simplified description of behaviour of many types of dynamic objects. Such a model makes the identification process easier and is sufficient for many practical applications. The Strejc's model parameters should be determined based on appropriate measurement experiments, since the real transfer function of the object is unknown. There are several typical identification methods useful for the determined conditions (occurrence of disturbances, limited time of experiment duration, and so on), which does not mean there is no possibility of creating new methods, more advantageous in the given conditions (more economical, less sensitive to disturbances occurring in the measurement process, simpler in respect of calculation algorithms used). In the paper there are presented proposals of a few methods which seem to be promising, relatively simple and economical. The results of simulation experiments are also given.

Keywords: identification, Strejc's model, determining of model parameters.

1. Wstęp

Rzeczywiste transmitancje obiektów mają zwykle skomplikowaną postać i zawierają wiele parametrów, co ich przydatność praktyczną stawia pod znakiem zapytania. W wielu przypadkach, na przykład w przypadku modeli wieloinercyjnych korzystne wydaje się zastąpienie rzeczywistej transmitancji obiektu $K(s)$ tak zwanym modelem Strejca:

$$K_m(s) = \frac{k}{(1+s \cdot T)^n} \quad (1)$$

o tylko trzech parametrach: współczynnika statycznego wzmocnienia k , stałej czasowej T i rzędzie dynamiki n tak dobranych eksperymentalnie (postać transmitancji rzeczywistej $K(s)$ jest nieznana), by błąd modelu był niewielki.

Można w tym celu wyznaczyć skokową charakterystykę obiektu $h(t)$ i parametry te wyznaczyć z jej przebiegu, ale obie

polecane najczęściej metody postępowania [2, 3] mają, pewne wady. Pierwsza z nich wymaga wyznaczenia parametrów punktu przegięcia charakterystyki skokowej na podstawie wykresu charakterystyki $h(t)$ co prowadzi do wyników niedokładnych, druga opiera się na założeniu, że wszystkie charakterystyki skokowe transmitancji modelu Strejca o postaci:

$$K_m(s) = \frac{k}{\left(1 + s \cdot \frac{T_1}{n}\right)^n} \quad (2)$$

mają punkt wspólny, co stanowi tylko przybliżenie rzeczywistości, a w obu metodach wykorzystuje się tak zwany wzór Stirlinga będący wzorem asymptotycznym i wprowadzający dodatkowe błędy. Uzasadnia to próby poszukiwania innych metod eksperymentalnych, ale wydaje się istotne, by spełniały one dwa postulaty: nie zajmowały zbyt wiele czasu (były pod tym względem porównywalne z metodami wspomnianymi wyżej) i nie wymagały tworzenia skomplikowanych układów pomiarowych. Niżej omówimy kilka takich metod.

2. Pomiar ustalonej odpowiedzi obiektu na sygnał sinusoidalny

Jeśli na wejście obiektu o dynamice opisanej modelem Strejca zostanie podany sygnał sinusoidalny $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)$ to odpowiedź obiektu w stanie ustalonym przyjmie postać:

$$y(t) = \frac{x_0 \cdot k}{(1 + \omega_1^2 \cdot T^2)^{n/2}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - \phi) \quad (3)$$

$$\phi = n \cdot \arctg(\omega_1 \cdot T)$$

Rejestrując tę odpowiedź w układzie współrzędnych (X, Y) (meta „a”) o osiach $X = x(t)$, $Y = y(t)$ otrzymuje się elipsę pokazaną na rys. 1a. Obowiązują przy tym następujące zależności:

$$X_m = x_0 \cdot k, \quad Y_1 = Y_m \cdot \sin(r \cdot \pi - \phi) = \pm Y_m \cdot \sin \phi \quad (4)$$

$$Y_m = X_m \cdot (1 + \omega_1^2 T^2)^{n/2}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

skąd

$$\omega_1 \cdot T = \sqrt{\left(\frac{X_m}{Y_m}\right)^{2/n} - 1} \quad (5)$$

$$\left(\frac{Y_1}{Y_m}\right)^2 = \sin^2[n \cdot \arctg(\omega_1 \cdot T)]$$

więc przy znanych wartościach ω_1, X_m, Y_m i Y_1 można wyznaczyć parametry n i T . Odpowiedni wykres pomocniczy pokazano na rys. 1.b Pozostaje w tym przypadku do wyznaczenia jedynie parametr k , na przykład przy wykorzystaniu charakterystyki skokowej. Czas wykonania obu eksperymentów (charakterystyka skokowa i ustalona odpowiedź obiektu na sygnał sinusoidalny) jest w przybliżeniu dwukrotnie dłuższy, niż w metodach „klasycznych” [2, 3], a wynik w pewnym stopniu zależy od przyjętej arbitralnie wartości pulsacji ω_1 . Wynika to stąd, że odpowiedź obiektu o dynamice nie odpowiadającej modelowi Strejca jest

niejako, „aprosymowana” takim modelem (pełna zgodność tylko dla pulsacji ω_1), natomiast nie stosuje się żadnych uproszczeń wzorów, a wartości X_m , Y_m , Y_1 i ω są łatwo dostępne i mogą być zmierzone z dobrą dokładnością.

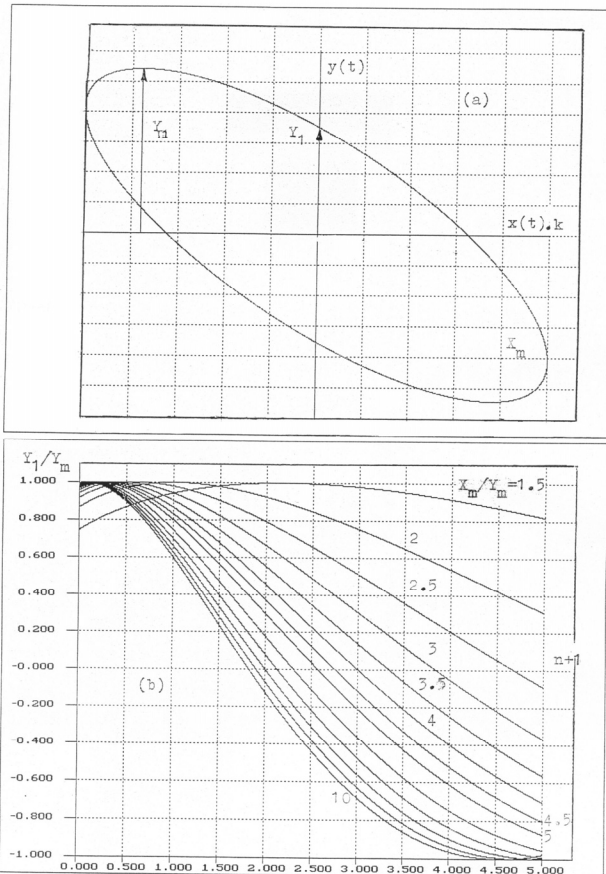
Pewna odmiana takiej metody oznaczona jako „b” polega na pomiarze amplitud Y_{m1} i Y_{m2} ustalonej odpowiedzi obiektu na sygnały sinusoidalne o dwóch różnych pulsacjach ω_1 i ω_2 . Zachodzą wtedy zależności:

$$Y_{m1} = X_m \cdot (1 + \omega_1^2 \cdot T^2)^{-n/2}, \quad Y_{m2} = X_m \cdot (1 + \omega_2^2 \cdot T^2)^{-n/2} \quad (6)$$

skąd:

$$\frac{\ln(Y_1)}{\ln(Y_2)} \cdot \ln[X_m \cdot (1 + \omega_2^2 \cdot T^2)] = \ln[X_m \cdot (1 + \omega_1^2 \cdot T^2)], \quad \omega_2 \cdot T = \sqrt{\left(\frac{X_m}{Y_{m2}}\right)^{2/n} - 1} \quad (7)$$

i można wyznaczyć parametry n oraz T . Dla wyznaczenia parametru k można wykorzystać charakterystykę skokową. Jak widać - ta metoda wymaga wykonania jeszcze jednego pomiaru i tym samym jest bardziej czasochłonna. Tu wprowadzicie dla dwóch różnych pulsacji ω_1 i ω_2 aproksymuje się dokładnie model obiektu modelem Strejca, ale obejmuje to tylko moduły transmitancji i trudno wnioskować, czy metoda taka będzie dokładniejsza od metody (a).



Rys. 1a. Elipsa jako wykres zależności $y(t)$ w funkcji $x(t) \cdot k$

Fig. 1a. The ellipse representing relation between $y(t)$ and $x(t) \cdot k$

Rys. 1b. Pomocnicza charakterystyka zależności Y_1/Y_m od n oraz stosunku X_m/Y_m dla wyznaczenia parametru n

Fig. 1b. The auxiliary characteristic Y_1/Y_m in relation to n and X_m/Y_m for determining parameter n

3. Pomiar drgań samowzbudnych

Jeżeli planuje się sterowanie badanym obiektem w pętli sprzężenia zwrotnego (w układzie regulacji automatycznej), to wykorzystując schemat układu n.p. z regulowanym wzmocnieniem w pętli (metoda „c”) można doprowadzić do stanu krytycznego (drżania nietłumione), wyznaczyć ich pulsację, oraz wartość jakiegoś parametru (wzmocnienie, czas całkowania), przy którym te drżania występują, a na tej podstawie wyznaczyć parametry modelu Strejca. Wadą takiej metody może być stosunkowo długotrwały proces „strojenia” układu i mała wrażliwość stanu drgań (tłumione, nietłumione, narastające) na zmiany strojonego parametru. Wydaje się, że korzystniej jest zastosować metodę Åstroma - Hägglanda [1] i doprowadzić układ do powstania drgań samowzbudnych.

Istnieją tu dwie możliwości: albo w pętlę ujemnego sprzężenia zwrotnego wprowadza się komparator wiążący sygnały e i e_1 na wejściu i wyjściu komparatora zależnością:

$$e_1(t) = B \cdot \operatorname{sgn} e(t) \quad (8)$$

albo też wprowadza się dodatkowo człon całkujący (metoda „d”) o transmitancji $K_d(s) = 1/s \cdot T_c$. Ponieważ funkcja opisująca komparatora jest funkcją amplitudy pierwszej harmonicznej sygnału wejściowego $e(t)$ zatem warunek powstania drgań nietłumionych w pierwszej wersji układu prowadzi do zależności:

$$(1 + \omega_{01}^2 \cdot T^2)^{n/2} = \frac{4B \cdot k}{\pi \cdot e_{01}} \quad (9)$$

pozwalających wyznaczyć parametry modelu n i T , przy zmierzonych wartościach pulsacji drgań nietłumionych ω_{01} i amplitudzie ich pierwszej harmonicznej e_{01} sygnału $e(t)$.

W drugiej wersji, z dodatkowym członem całkującym (metoda „d”) otrzymuje się warunki:

$$(1 + \omega_{02}^2 \cdot T^2)^{n/2} = \frac{4 \cdot B \cdot k}{\pi \cdot e_{02} \cdot \omega_{02} \cdot T_c}, \quad \arctg(\omega_{02} \cdot T) = \pi / 2 \cdot n \quad (10)$$

stwarzające te same możliwości, ale drżania nietłumione powstają tu już przy rzędzie dynamiki $n > 1$. W przypadku rzędu dynamiki obiektu większego od 2 można użyć obu metod i wtedy parametr T wyznaczać z równania:

$$\arctg(\omega_{01} \cdot T) = 2 \cdot \arctg(\omega_{02} \cdot T) \quad (11)$$

warto zauważyć, że eksperymentujący na wartości pulsacji ω_{01} i ω_{02} nie ma żadnego wpływu.

4. Wyznaczanie błędów modeli

Wykonując obliczenia parametrów modelu Strejca według którejkolwiek z omawianych metod otrzymuje się z reguły rząd dynamiki n będący ułamkiem. Stosowanie zaokrągleń do odpowiedniej, liczby całkowitej [5] wprowadza dodatkowe błędy niezależne już od metody identyfikacji, a przy zastosowaniach modelu można często posłużyć się właśnie rzędem ułamkowym. Jeśli tak - to błąd chwilowy modelu w warunkach charakterystyki skokowej można wyznaczyć wykorzystując zależność dla charakterystyki impulsowej:

$$k(t) = \frac{k}{T \cdot (n-1)!} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (12)$$

obowiązującą także dla ułamkowych wartości n . W przypadku braku tablic funkcji $n!$ dla dowolnych, n można - całkując wzór (12) przy założeniu, że $(n-1)! = 1$ i z użyciem programu komputerowego wyznaczyć odpowiedni współczynnik proporcjonalności z warunku

$$\frac{k}{T(n-1)!} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \cdot dt = k \quad (13)$$

i wyznaczyć chwilowy błąd $h(t) - h_m(t) = d(t)$, przy tym wygodnie jest posłużyć się wykresem zależności $d(t) = f[h(t)]$ pozwala on bowiem określić w którym punkcie charakterystyki skokowej ten błąd przyjmuje wartości ekstremalne a stosunek $d(t) / h(t)$ czyli tangens kąta φ na wykresie w odpowiedniej skali) określa błąd względny. Współczynnik wzmocnienia statycznego obiektu należy oczywiście wyznaczyć w znany sposób.

5. Dobór optymalnej wartości pulsacji sygnału $x(t)$

W tych metodach, w których wyznacza się parametry modelu z równania $K(j\omega) = K_m(j\omega)$ istotny jest wybór właściwej wartości pulsacji w sygnale $x(t)$, lub sygnale generowanego w układzie w warunkach drgań samowzbudnych. Można w tym celu rozważyć wrażliwość błędów modelu na zmiany jego parametrów i dobrać pulsację tak, by przy jej wartości wrażliwość ta była maksymalna. Taką metodę zaprezentowano w pracy [4, 5], a odpowiednia funkcja wrażliwości posiada postać:

$$|W(j\omega)|^2 = \left| \frac{M_m(j\omega) - L_m(j\omega)}{M_m^2(j\omega)} \right|^2 \quad (14)$$

jeśli

$$K_m(j\omega) = \frac{L_m(j\omega)}{M_m(j\omega)}$$

Pulsację ω dobiera się tak, by wrażliwość osiągała maksymalną wartość. Przed przystąpieniem do eksperymentów postać $K_m(j\omega)$ i jej parametry nie są jeszcze znane, należy więc w pierwszym kroku przyjąć pulsację w sposób arbitralny, wyznaczyć dla niej model, ewentualnie nawet zaokręglić rząd dynamiki do najbliższej liczby całkowitej z zachowaniem warunku $n \cdot T = n_{zaok} \cdot T_{zaok}$, i dla tego modelu wyznaczyć potrzebną pulsację ω wykorzystując wzór (14). Prowadzi to do pewnej niedokładności wyniku, ale jest ona już zwykle mało istotna.

6. Wyniki symulacji eksperymentów

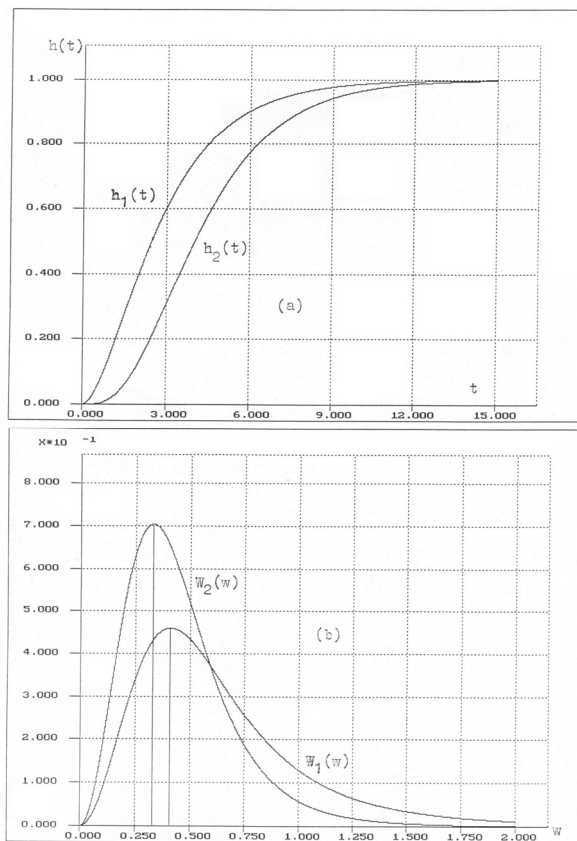
Rozpatrzono transmitancje dwóch obiektów:

$$K_1(s) = \frac{1}{(1+s) \cdot (1+2 \cdot s)} \quad (15)$$

$$K_2(s) = \frac{1}{(1+0.5s) \cdot (1+s) \cdot (1+2 \cdot s)}$$

różniące się od modelu Strejca. Ich charakterystyki skokowe $h_1(t)$, $h_2(t)$ oraz wykresy wrażliwości $W_1(\omega)$ i $W_2(\omega)$ pokazano na rys. 2, otrzymując jako optymalną dla modelu pierwszego pulsację $\omega = 0.41s^{-1}$, a dla drugiego pulsację $\omega = 0.3s^{-1}$.

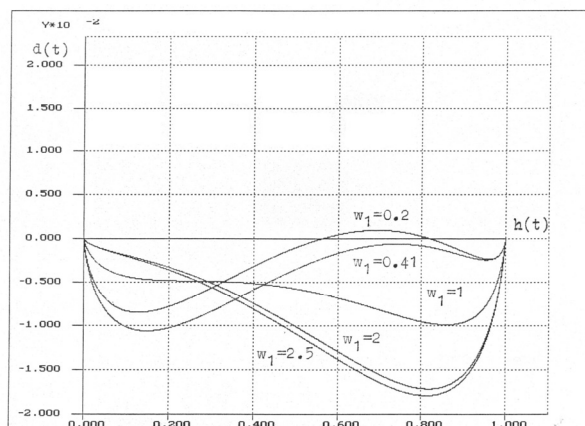
Wyniki symulowanych eksperymentów identyfikacyjnych zestawiono w tabeli 1, przy tym dla uproszczenia przyjęto, że współczynnik wzmocnienia modeli $k = 1$ jest znany.



Rys. 2. Charakterystyki skokowe $h_1(t)$ i $h_2(t)$ (a), oraz wykresy wrażliwości $W_1(\omega)$ i $W_2(\omega)$ badanych obiektów

Fig. 2. The step responses $h_1(t)$ and $h_2(t)$ of the systems under consideration (a) and respective sensitivities $W_1(\omega)$ and $W_2(\omega)$ (b)

Wykresy zależności $d(t) = f[h(t)]$ dla obiektu pierwszego używane dla kilku wartości pulsacji ω_1 odpowiadające pozycjom w tabeli 1 pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Wykresy zależności $d(t) = f[h(t)]$ uzyskane dla modelu pierwszego, przy kilku wartościach pulsacji ω_1

Fig. 3. The representation of relation $d(t) = f[h(t)]$ obtained for the first model and several values of ω_1

Najkorzystniejszy wynik uzyskano dla pulsacji sygnału pobudzającego $x(t)$ równej $0.2s^{-1}$, a więc przy wartości zbliżonej do optymalnej z punktu widzenia metody największej wrażliwości ($\omega_1 = 0.41s^{-1}$). Wykresy uzyskane dla pulsacji niskich dają błędy modelu małe w stanie bliskim ustalonego i odwrotnie, co jest

zgodne z ogólnie znaną zasadą. Dla obiektu drugiego w metodzie „d” uzyskano pulsację drgań samowzbudnych blisko wartości optymalnej z punktu widzenia metody największej wrażliwości i w efekcie stosunkowo małe błędy uzyskanego modelu.

Tab. 1. Wyniki symulowanych eksperymentów
Tab. 1. The results of simulated experiments

Metoda	ω_1 ω_2^1	ω_{01} ω_2^1	e_{01} e_{02}	B T_c	n	τ	$n \cdot \tau$	$ d_{\max} $	Uwagi
a	0.20				1.82	1.63	2.97	0.008	Obiekt 1.
	0.41				1.81	1.64	2.97	0.01	
	1.00				1.90	1.54	2.93	0.01	
	2.00				1.96	1.47	2.86	0.017	
	2.50				1.96	1.47		0.017	
b	1.00				1.88	1.52	2.86	0.019	Obiekt 1.
	2.00								
d		0.69	0.439	0.5 1.0	1.90	1.57	2.98	0.0045	
a	1.00				3.18	1.32	4.20	0.036	Obiekt 2.
b	0.50				2.90	1.43	4.15	0.067	
	1.00								
c		0.989	0.109	0.5	3.34	1.39	4.64	0.030	
d		0.375	1.182	0.5 1.0	3.52	1.28	4.51	0.011	
c+d		0.989 0.375	0.109 1.182	0.5 1.0	3.57	1.31	4.68	0.042	

7. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że najprawdopodobniej najkorzystniejszą jest metoda „a” przy odpowiednim doborze pulsacji ω_1 , choć problem optymalnego doboru warunków eksperymentu dla innych metod pozostaje otwarty i wydaje się trudny do rozwiązania. Warto też podkreślić że jest to metoda stosunkowo mało czasochłonna.

Celem niniejszej pracy nie było prezentowanie wszystkich znanych metod wyznaczania parametrów zastępczego modelu Strejca, ani porównanie ich skuteczności. W tym celu należałoby określić najpierw jaka jest wymagana dokładność wyznaczanego modelu, a to zależy od jego przyszłych zastosowań.

8. Literatura

- [1] Åström K.J., Hagglund T.: Automatic Tuning of Simple regulators with specification of pulse and amplitude margins. *Automatica* Vol. 20 no. 5/1983.
- [2] Skoczowski S.: Technika regulacji temperatury. Wyd. PAK, listopad 2000 r.
- [3] Żuchowski A.: O pewnej metodzie, wyznaczania parametrów modelu Strejca. PAK. 10/1 993.
- [4] Żuchowski A.: Modele dynamiki i identyfikacja. Skrypt. Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Seria Tempus, Szczecin 2003.
- [5] Żuchowski A.: O pewnej metodzie wyznaczania uproszczonych, liniowych modeli dynamiki obiektów. PAK 5/1998.

otrzymano / received: 24.10.2012

przyjęto do druku / accepted: 03.12.2012

artykuł recenzowany / revised paper

INFORMACJE

Szanowni Autorzy artykułów publikowanych w PAK

W trosce o jak najwyższy poziom punktacji miesięcznika PAK zwracam się z prośbą o cytowanie artykułów opublikowanych w PAK w innych artykułach, zwłaszcza tych publikowanych w czasopiśmie z listy filadelfijskiej. Ma to bezpośredni wpływ na współczynnik IF (Impact Factor) miesięcznika PAK.

W algorytmach oceny czasopism współczynnik IF ma największą wagę. Na zwiększenie wartości współczynnika IF redakcja czasopiisma nie ma żadnego wpływu, ale wszystko zależy od Autorów cytujących. W przypadku miesięcznika PAK aktualnie każde cytowanie zwiększa IF o około 0,002. Oczywiście cytowanie artykułu tylko wtedy jest uzasadnione, jeżeli jest on tematycznie związany z artykułem cytującym, a autor korzystał z niego przy przygotowaniu pracy.

Aby ułatwić Autorom korzystanie z artykułów opublikowanych w PAK (a także możliwość cytowania) została opracowana przez redakcję PAK „Wyszukiwarka”, umożliwiająca wyszukiwanie artykułów według nazwiska autora, słowa tytułu artykułu, albo frazy kluczowej.

Aby skorzystać z „Wyszukiwarki” należy:

- wejść na stronę: www.pak.info.pl
- w menu „Wyszukiwarka” (po lewej stronie ekranu) wybrać „Artykuły”.

Strona zawiera również szereg innych łatwo dostępnych funkcjonalności, m.in. wykazy artykułów opublikowanych w PAK, a cytowanych w artykułach opublikowanych w czasopiśmie z listy filadelfijskiej.

Zdaję sobie sprawę, że redakcje niektórych czasopism usuwają cytowania artykułów publikowanych w czasopiśmie spoza listy filadelfijskiej, np. argumentując, że są one mało dostępne. Taka argumentacja będzie mniej uzasadniona, jeżeli tytuł naszego miesięcznika oraz tytuły artykułów będą podane w cytowaniach w języku angielskim. Proszę zauważyć, że oficjalny tytuł anglojęzyczny miesięcznika PAK (występujący na okładce) ma formę: Measurement, Automation and Monitoring (MA&M), a wszystkie artykuły naukowe publikowane w PAK są napisane albo w języku angielskim, albo mają rozszerzone abstrakty w tym języku.