Stanisław Bocian

# Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego „G" i $A^G$ automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami $DFASC_2$

**JEL: L62 DOI: 10.24136/atest.2018.406**
**Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018**

*W artykule W artykule przedstawiono, że półgrupa charakterystyczna sumy prostej i iloczynu prostego automatów "$G$" i „$A^{G}$" asynchronicznych silnie spójnych i ustalone analogi ich rozszerzeń są izomorficzne. Wziąwszy pod uwagę iż półgrupa charakterystyczna określa zdolność do przetwarzania informacji, to sumę prosta iloczyn prosty można uważać za realizację – odpowiednio sekwencyjnych i równoległych obliczeń. Uzyskane rezultaty oznaczają iż owa zdolność nie zależy od realizacji sekwencyjnej lub równoległej (taka sama liczba klas abstrakcji odpowiednich półgrup charakterystycznych).*

**Słowa kluczowe** automat, półgrupa charakterystyczna, izomorfizm

## Wstęp

Rozwój teorii automatów był stymulowany przez dwie uzupełniające się tendencje:

a) konstruowanie modeli bliżej związanych ze współczesnym sprzętem i oprogramowaniem,
b) znajdowanie poprawnych narzędzi matematycznych (języka matematycznego), w którym można wyrazić procesy obliczeniowe o dużej różnorodności.

Od wielu lat jesteśmy świadkami intensywnego rozwoju teorii automatów, szczególnie algebraicznej teorii automatów rozwijanej na gruncie teorii półgrup. Definicja relacji równoważności Myhilla na zbiorze stanów automatu oraz półgrup charakterystycznych automatu pozwoliły wydobyć zeń możliwości obliczeniowe.

W ogólnym przypadku półgrupa charakterystyczna posiada $n^n$ elementów dlatego interesujące jest pokazanie klasy automatów, które posiadają wielomianową zależność liczby elementów półgrupy charakterystycznej od liczby stanów *[1,2 ]*.

W pracy będą rozważane automat asynchroniczne deterministyczne skończone silnie spójne $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly conected) oraz ich poszerzenia związane z izomorfizmami $EXT\ DFSC_2$

## 1.Rozważania wprowadzające

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki, że $a\ R\ b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja $f\ \ jest\ \ 1 \div 1$ (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkcja jest „na ", gdy $Y = \{\ b : b = f(a),\ \ a \in X\ \}$.

Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną $(S,\circ)$ gdzie: $S$ – niepusty zbiór, $(\circ)$ – operacja binarna na zbiorze stanów $S$. Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $(S \times S)$ w zbiór $S$. Binarną operację $(\circ)$ na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli $a \circ (b \circ c) = (a \circ b \circ c)$ dla wszystkich $a,b,c \in S$.

Półgrupą, nazywamy taki grupoid $(S,\circ)$, w którym operacja $(\circ)$ jest asocjatywna. Niech $\Sigma$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór $\Sigma$ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem $x$ w alfabecie $\Sigma$ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu napisanych obok siebie, a długością słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter $\sigma$.

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywamy uporządkowaną trójkę $(S,\Sigma,M)$, gdzie:

$S$ – skończony, niepusty zbiór stanów
$\Sigma$ – skończony, niepusty zbiór wejść
$M : S \times \Sigma \rightarrow S$ : jest funkcją przejść.

Symbolem $\Sigma^*$ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru $\Sigma$. Zbiór $\Sigma^*$ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegającą na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbolem $\Sigma^*$ oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \lambda$ gdzie $\lambda$, jest ciągiem pustym.

Funkcję $M$ rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \Sigma^+$ w podany poniżej sposób. niech: $M(s,x)$ będzie zdefiniowane, wtedy: $M(s,x\sigma) = M(M(s,x,),\sigma)$ dla każdego $s \in S$, $x \in \Sigma^+$, $\sigma \in \Sigma$ Na zbiorze $\Sigma^*$ zdefiniujemy relację:

$xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{s \in S} M(s,x) = M(s,y)$.

$R$ jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \Sigma^*$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$ gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$, tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupą charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu $A$ oznaczać będziemy $I(A)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A=(S,\Sigma,M)$ nazywamy automat $A_x=(S,\{x\},M_x)$ gdzie $x\in\Sigma^*$ i $M_x$ jest ograniczeniem $M$ .do $S\times\{x\}$.

Dla każdego $x\in\Sigma^*$ definiujemy przekształcenie $f_x$ zbioru $S$ w siebie, gdzie : $f_x(s)=M(s,x)$, dla każdego $s\in S$. Przekształcenie $f_x$ jest implikowane przez $x$. Zbiór przekształceń zbioru $S$ w siebie mplikowanych przez wszystkie elementy z $\Sigma$, będziemy oznaczać symbolem $J$. $J$ ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy $F$.
Półgrupa $F$ jest antyizomorficzna z $\bar{I}$ ponieważ:
$\varphi:\bar{I}\to F,\quad \varphi(\bar{x})=f_x$, gdzie $x\in I$, $\bar{x}=\bar{I}$ przy czym:

$$(i)\quad \varphi(\bar{x}\circ\bar{y})=\varphi(\overline{xy})=f_{xy}=f_y(f_x)=\varphi(\bar{y})\ \varphi(\bar{x})$$

(brak zachowania operacji)

$$(ii)\quad \varphi(\bar{x})=\varphi(\bar{y})\Rightarrow f_x=f_y\Rightarrow\forall_{s\in S}M(s,x)=M(s,y)$$

$$\Rightarrow xRy\Rightarrow\bar{x}=\bar{y}$$

a zatem $\varphi$ jest 1 ÷ 1

$$(iii)\quad \varphi(\bar{x})=f_x\Rightarrow\varphi^{-1}\varphi(\bar{x})=\varphi^{-1}(f_x)\Rightarrow\bar{x}=\varphi^{-1}f_x$$

a zatem $\varphi$ jest na

Automat $A=(S,\Sigma,M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary $(s_1,s_2)$ stanów automatu $A$ istnieje element $x$ z półgrupy wejściowej taki, że: $M(s_1,x)=s_2$.

Automat $A=(S,\Sigma,M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego $s\in S$ i $\sigma\in\Sigma$ zachodzi $M(s,\sigma)=M(s,\sigma\sigma)$.

Automat $A=(S,\Sigma,M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A=(S,\Sigma,M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Automat $A^G$ będziemy nazywać zbiór dowolnej liczby automatów $A^G=\{A_1,A_2,\dots,A_g\}$

Niech $A_1=({}^{A_1}S,\Sigma,{}^{A_1}M),A_2=({}^{A_2}S,\Sigma,{}^{A_2}M)$, będą automatami deterministycznymi. Funkcja $f:A_1\to A_2$ jest rozumiana jako funkcja przekształcająca ${}^{A_1}S$ w ${}^{A_2}S$. Funkcję $f:A_1\to A_2$ nazywamy homomorfizmem (zachowuje operacje), jeżeli: $f({}^{A_1}M(s,\sigma))={}^{A_2}M(f(s),\sigma)$.dla każdego $s\in S$ i $\sigma\in\Sigma$.

Jeżeli $f:A_1\to A_2$ jest 1 ÷ 1 i „na” oraz zachowuje operacje, to $f$ nazywamy izomorfizmem.

Niech $q\geq 2$ i $A^0=(S^0,\Sigma,M^0)$ będzie automatem oraz niech, $A^1=(S^1,\Sigma,M^1)$ ,..., $A^{q-1}=(S^{q-1},\Sigma,M^{q-1})$ będą obrazami izomorficznymi związanymi z izomorfizmami stanowymi $g^1\in Iz(A^0\to A^1),\dots,\ g^{q-1}\in Iz(A^{q-2}\to A^{q-1})$.

Rozszerzeniem $q$ automatu $A^0$ związanym z izomorfizmami stanowymi $g^0,g^1,\dots,g^{q-1}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $ext_q(A)=({}^{ext_q(A)}S,\ \Sigma,\ {}^{ext_q(A)}M)$ gdzie:

$${}^{ext_q(A)}S=(S^0,S^1,\dots,S^{q-1})\ ;$$

$${}^{ext_q(A)}M^q=(M^{q,0},M^{q,1},\dots,M^{q,q-1})$$

$$g^i:S\to S^i\ ;\quad i=0,1,\dots,q-1,$$

$S=\{s_0,s_1,\dots,s_{n-1}\};\ S^i=\{s_0^i,s_1^i,\dots,s_{n-1}^i\}$ natomiast $s_j^i=g^i(s_j)$; j =0,1,...,,

Ustalonym analogiem rozszerzeń $ext_qA=(S,\Sigma,M)$ automatu $A=(S,\Sigma,M)$ związanego z izomorfizmami $g^0,g^1,\dots,g^{q-1}$ jest trójka uporządkowana $(ext_q(A))^*=({}^{ext_q(A)}S^*,\Sigma,\ {}^{ext_q(A)}M^*)$ gdzie:

$${}^{ext_q(A)}S^*=\bigcup_{i=0}^{q-1}S^i;\ a\quad {}^{ext_q(A)}M^*:\ {}^{ext_q}S^*\times\Sigma\to{}^{ext_q(A)}S^*$$

jest funkcją przejść zdefiniowaną dla dowolnych $s\in S^i$, jak następuje ${}^{ext_q(A)}M^*(s,\sigma)=M^{q,i}(s,\sigma)$.

Suma prosta automatów
$A_1=({}^{A_1}S,\Sigma,{}^{A_1}M),\ A_2=({}^{A_2}S,\Sigma,{}^{A_2}M),\dots,$
$A_g=({}^{A_g}S,\Sigma,{}^{A_g}M)$ jest trójka uporządkowaną:

$$A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g=({}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}S,\Sigma,{}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}M)$$

gdzie ${}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}S={}^{A_1}S\cup{}^{A_2}S\cup,\dots,{}^{A_g}S$

i dla każdego ${}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}S$ i $\sigma\in\Sigma$ zachodzi

$${}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}M:{}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}S\times\Sigma\to{}^{A_1\cup A_2\cup,\dots,\cup A_g}S$$

Iloczyn prosty automatów
$A_1=({}^{A_1}S,\Sigma,{}^{A_1}M),\ A_2=({}^{A_2}S,\Sigma,{}^{A_{21}}M),\dots,A_g=({}^{A_g}S,\Sigma,{}^{A_g}M)$
jest trójką uporządkowaną:

$$A_1\times A_2\times,\dots,\times A_g=({}^{A_1\times A_2\times,\dots\times A_g}S,\Sigma,{}^{A_1\times A_2\times,\dots\times A_g}M)$$

gdzie : ${}^{A\times A_2\times,\dots,\times A_g}S={}^{A_1}S\times{}^{A_2}S\times,\dots,{}^{A_g}S$ i

$${}^{A_1\times A_2\times,\dots,A_g}M:\ {}^{A_1\times A_2\times,\dots,\times A_g}S\times\Sigma\to{}^{A_1\times A_2\times,\dots,\times A_g}S,$$

a funkcja przejść jest zdefiniowana jak następuje

$${}^{A_1\times A_2\times,\dots,A_g}M\left(({}^{A_1}s_1,{}^{A_2}s_2,\dots,{}^{A_g}s),(\sigma)\right)=$$

$$\left({}^{A_1}M({}^{A_1}s,\sigma),{}^{A_2}M({}^{A_2}s,\sigma),\dots,{}^{A_g}M({}^{A_g}s,\sigma)\right)$$

Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\Sigma=\{\sigma_0,\sigma_1\}$, wprowadzamy $x_0=\sigma_0\sigma_1$ i $x_1=\sigma_1\sigma_0$, **dla których**

$f_{x_0} = f_{\sigma_1}(f_{\sigma_0})$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}(f_{\sigma_1})$. Dla dowolnego $x \in \Sigma^*$ definiujemy przekształcenie $f_x : S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje: $\forall_{s\in S} f_x(s) = M(s,x)$, gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy $\forall_{s\in S} f_x(s) = f_{x'\sigma}(s) = f_\sigma(f_{x'}(s,\sigma))$.

## 2. Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego "G" i "A^G" automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami DFASC2.

Twierdzenie 1

Niech $A_1 = ({}^{A_1}S, \Sigma, {}^{A_1}M)$, $A_2 = ({}^{A_2}S, \Sigma, {}^{A_{21}}M)$,..., $A_g = ({}^{A_g}S, \Sigma, {}^{A_g}M)$ będą „$G$" automatami z klasy $DASC_2$ takimi, że $card({}^{A_1}S) > 2$, $card({}^{A_2}S)$,..., $card({}^{A_g}S) > 2$ oraz $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I = (A_1 \cup A_2, ..., \cup A_g)}$ sumy prostej automatów $A_1, A_2, ..., A_g$ jest izomorficzna z półgrupą charakterystyczną $\overline{I(A_1 \times A_2 \times A_g)}$ iloczynu prostego automatów $A_1, A_2, ..., A_g$ gdzie: $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$

Dowód.1

Wiadomo z [1,2] jak również z rozważań wprowadzających niniejszej pracy że na zbiorze $\sum^*$ zdefiniujemy relację:

$xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{s\in S} M(s,x) = M(s,y)$

Relacja $R$ jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \Sigma^*$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupa charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu $A$ oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

W pracy $[5\ ,6]$ wykazano równoliczność rozważanych półgrup charakterystycznych(taka dla sumy prostej i iloczynu prostego automatów)

Teraz dowodzimy własność izomorfizmów

Niech::

$$\varphi : \overline{I(A_1 \cup A_2 \cup, ..., \cup A_g)} \longrightarrow \overline{I(A_1 \times A_2 \times, ..., \times A_g)}$$

niech $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ $\qquad def.1$

Z rozważań wprowadzających i pracy $[1]$ wynika, że

$\varphi(\overline{x}) = f_x$ $\qquad def.2$

$\forall_{s\in S} f_x = M(s,x)$, gdzie $x$ jest dowolnym reprezentantem klasy $\overline{x}$ $\qquad def.3$

Aby wykazać że $\varphi$ jest izomorfizmem półgrupy charakterystycznej, należy:

$$(i)\quad \varphi(\overline{x_1} \circ \overline{x_2}) = \varphi(\overline{x_1 x_2}) = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \circ \overline{x_2} = \varphi(\overline{x_1}) \circ \varphi(\overline{x_2})\ \ zachowana\ operacja$$

$$(ii)\quad \varphi(\overline{x}_1) = \varphi(\overline{x}_2) \Rightarrow z\ def.2\ {}^{(A\times A_2\times,...,\times A_g)}f_{x_1} = {}^{(A_1\times A_2\times,...,\times A_g)}f_{x_2} \Leftrightarrow {}^{(A_1\cup A_2\cup,...,\cup A_g)}f_{x_1} = {}^{(A\cup A_2\cup,...,\times\cup A_g)}f_{x_2} \Rightarrow$$

$$z\ def.3\ \forall_{s\in {}^{A_1\cup A_2,...,\cup A_g}S} M(s,x_1) = {}_{s\in {}^{A_1\cup A_2,...,A_g}S} M(s,x_2),$$

$$\Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \Rightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2$$

a zatem $\varphi$ jest „$1 \div 1$"

$(iii)\quad \varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ jest oczywiście „na".

W pracach $[5,6]$ wykazano równoliczność (taki sam zbiór przekształceń) odpowiednich półgrup charakterystycznych dla sumy prostej i iloczynu prostego $G$ iautomatów $DFASC_2$

Twierdzenie 2.

Niech

$$ext_q(A_1 \times A_2 \times, ..., \times A_g) = \left({}^{A_1\times A_2\times,...,A_g}S, \Sigma, {}^{A_1\times A\times,...,A_{g1}}M\right)$$

będą rozszerzeniami związanymi z izomorfizmami $g^0, g^1, ..., g^{q-1}$ $A^G$ sumy prostej $A_1 \cup A_2, ..., A_g = \left({}^{(A_1\cup A_2\cup,...,\cup A_g)}S, \Sigma, {}^{(A_1\cup A_2\cup,...,\cup A_g)}M\right)$ i iloczynu prostego $A \times A_2 \times, ..., A_g = \left({}^{(A_1\times A_2\times,...,\times A_g)}S, \Sigma, {}^{(A_1\times A_2\times,...,\times A_g)}M\right)$ automatów $A_1 = ({}^{A_1}S, \Sigma, {}^{A_1}M)$, $A_2 = ({}^{A_2}S, \Sigma, {}^{A_2}M)$,..., $A_g = ({}^{A_g}S, \Sigma, {}^{A_g}M)$ z klasy DFSC2 takimi, że $card({}^{A_1}S) > 2$ $card({}^{A_2}S) > 2$ ,..., $card({}^{A_g}S) > 2$ oraz $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I((ext_q(A_1 \cup A_2 \cup, ..., \cup A_g))^*)}$ ustalonego analogu rozszerzenia sumy prostej automatów $A_1, A_2, ..., A_g$ jest izomorficzna z półgrupą charakterystyczną ustalonego analogu rozszerzenia iloczynu prostego automatów $\overline{I((ext_q(A_1 \times A_2 \times, ..., A_g))^*)}$ automatów $A_1, A_2, ..., A_g$

Dowód. 2

W pracach $[7,8]$ i wykazano równoliczność odpowiednich półgrup charakterystycznych ustalonych analogów rozszerzenia dla sumy prostej i iloczynu prostego $A^G$ automatów asynchronicznych silnie spójnych $EXT\ DFASC_2$. Niech

$$\varphi : \overline{I\left(ext_q\left(A_1 \cup A_2, \cup, \ldots, A_g\right)\right)^*}$$

$$\rightarrow \overline{I\left(ext_q\left(A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_G\right)\right)^*}$$

Niech $\varphi\left(\overline{x}\right) = \overline{x}$ $\qquad def.1$

Z rozważań wprowadzających [1] wynika że

$$\varphi\left(\overline{x}\right) = {}^{ext_q(A)}f_x \qquad def.2$$

$$\forall_{s \in S^*} {}^{\left(ext_q(A)\right)^*} f_x^* = M^*(s, x) \quad (def.3)$$

gdzie $x$ jest dowolnym reprezentantem z klasy $\overline{x}$, a ${}^{\left(ext_q(A)\right)^*} f_x^{\ *}$ przekształceniem ustalonego analogu rozszerzenia stanowego automatu A związanego z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, \ldots, g^{q-1}$.

Aby wykazać że $\varphi$ jest izomorfizmem półgrup charakterystycznych, należy udowodnić że:

$(i)$ $\varphi\left(\overline{x_1} \circ \overline{x_2}\right) = \varphi\left(\overline{x_1 x_2}\right) = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \circ \overline{x_2} = \varphi\left(\overline{x_1}\right) \circ \varphi\left(\overline{x_2}\right)$

(zachowana operacja)

$(ii)$ $\varphi\left(\overline{x_1}\right) = \varphi\left(\overline{x_2}\right) \Rightarrow z$

$$def.2 \ {}^{ext_q\left(A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_g\right)} f_{x_1} = {}^{ext_q\left(A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_g\right)} f_{x_2}$$

$$\Leftrightarrow {}^{ext_q\left(A_{11} \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_g\right)} f_{x_1} = {}^{ext_q\left(A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, A_f\right)} f_{x_2} \Rightarrow$$

$$z \ def.3 {}^{\left(ext_q\left(A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_g\right)\right)^*} f_{x_1}^{\ *} = {}^{\left(ext_q\left(A \cup A_2 \cup, \ldots, A_g\right)\right)^*} f_{x_2}^{\ *} \Rightarrow$$

$$\forall_{s \in {}^{ext_q\left(A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_g\right)} S^*} M^*(s, x_1)$$

$$=_{ext_q\left(A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_g\right) S^*} M^*(s, x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \Rightarrow \overline{x_1} = \overline{x_2}$$

a zatem $\varphi$ jest „$1 \div 1$"

$(iii)$ $\varphi\left(\overline{x}\right) = \overline{x}$ jest oczywiście „na".

W pracach $[7,8]$ wykazano równoliczność (taki sam zbiór przekształceń) odpowiednich półgrup charakterystycznych dla sumy prostej i iloczynu prostego automatów z klasy. $EXT\ DFASC_2$

## Podsumowanie

Z chwilą gdy nastąpił zdecydowany rozwój struktur mikrosystemów cyfrowych (2001r.), które wciąż ulegają modyfikacją, następuje proces eliminacji w niektórych zastosowaniach technicznych tradycyjnych sterowników PLC. Struktury mikrosystemów cyfrowych są wielokrotnie tańsze, mniejsze gabarytowo, zużywają mniej energii, zwiększają wydajność pracy poprzez zintegrowanie składowych systemu. Wykorzystują narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować złożoności programów i czasu wizualizacji stanów automatów.

## Bibliografia:


1. Bocian S., Badania nad złożonością obliczeniową półgrupy charakterystycznej automatów ( praca doktorska Politechnika Poznańska 1986 r.).
2. Bocian S. Inteligentne podsystemy mechatroniczne w badaniach i sterowaniu pojazdów szynowych, Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR" w Poznaniu,. 2012 r. (Monografia).
3. Bocian S. : A new method of calculating the smallest common multiple, (CONGRESO) w Computational Topology and Geometry and Computation in Teaching Mathematics, pod red. Eladio Dominquez Murillo, Antonio Quintero Toscano, Jose Luis Vincente Cordoba, Universidad de Sevilla 1987 s. 25 – 40.
4. Bocian S. : Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego SCIENCES, automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń Transcomp – XIV International Conference „ Computer Systems Aided Industry and Transport " (Logistyka 6/2010), Zakopane 2010
5. Bocian S,: Złożoność półgrup charakterystycznych.„G" automatów asynchronicznych silnie spójnych. Transcomp – XX Międzynarodowa Konferencja Naukowa„ Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysu i Transportu" (Technika Transportu Szynowego 12/2016 ), Zakopane 2016 r.
6. Bocian S.; Złożoność półgrup charakterystycznych iloczynów prostych .„G" automatów asynchronicznych silnie spójnych. Logitrans – XIV Konferencja Naukowo – Techniczna „Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo W Transporcie" (Autobusy 6/2017), Szczyrk 2017 r.
7. Bocian S. Złożoność półgrup charakterystycznych sum prostych „G" automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami. Transcomp 2017 – XXI Międzynarodowa Konferencja Naukowa „ Komputerowe Systemy Wspomagania Nauki, Przemysłu i Transportu" (Autobusy 12/2017), Zakopane 2017 r
8. Bocian S,: Złożoność półgrup charakterystycznych iloczynów prostych .„G" automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami . Logitrans – XV Konferencja Naukowo – Techniczna „Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo w Transporcie" (Autobusy 6/2018), Szczyrk 2018 r.


## Isomorphism of the characteristic semi- group of the direct sum and direct product of the asynchronous automatons of the strongly connected and determined analogs of their extensions


In this article it is presented that the characteristic semi – group of the direct sum and direct product $''G''$and $''A^{G''}$ of the asynchronous automatons of the strongly connected and determined analogs of their extensions are isomorphism. Taking into account that the characteristic semi – group determines the ability to process the information then the direct sum and direct product can be consider as realization – the sequence and parallel calculation accordingly. The obtained results mean that this ability doesn't depend on the sequence and parallel realization (the same number of abstract class of the suitable characteristic semi- groups)



**Keywords:** automaton, semi-group, isomorphism



Autorzy:

dr inż. Stanisław Bocian – emerytowany adiunkt w Instytucie Pojazdów Szynowych „TABOR" W Poznaniu