

## ZASTOSOWANIE RADIALNYCH FUNKCJI BAZOWYCH DO ANALIZY DRGAŃ WŁASNYCH PŁYTY Z OTWORAMI

### Streszczenie

*W pracy przedstawiono bezsiatkową metodę kolokacyjną Kansy i jej zastosowanie do analizy drgań własnych płyty z otworami. W analizie wykorzystano funkcje Wendlanda, zaś uzyskane wyniki porównano z wynikami symulacji Metodą Elementów Skończonych.*

### WSTĘP

Tekst Obecnie projektowanym elementom na bazie których budowane są złożone układy mechaniczne stawia się szereg do spełnienia warunków, w tym również warunek niskiej aktywności wibroakustycznej podzespołów. W szeregu przypadków zdarza się, że dochodzi do sytuacji, w której konieczne jest przeprowadzenie oceny czy częstości drgań własnych elementu są odstrojone od częstości drgań wymuszonych, co nie bez znaczenia przekłada się również na wytrzymałość zmęczeniową konstrukcji.

W powszechnej praktyce inżynierskiej do analizy zagadnienia własnego najczęściej wykorzystywana jest Metoda Elementów Skończonych (MES). Metoda ta ze względu na powszechnie akceptowaną dokładność obliczeń i łatwą dostępność (implementacje znaleźć można w wielu pakietach inżynierskich oraz dostępnych darmowych programach komputerowych). Do zalet należy również brak konieczności przeprowadzenia jakichkolwiek obliczeń wstępnych. Problemem z wykorzystaniem MES do analizy zagadnienia własnego jest konieczność podziału na elementy całej analizowanej przestrzeni. Ze względu na to, że obliczenia dynamiczne z wykorzystaniem MES są obliczeniami przybliżonymi niezbędny jest bardzo gęsty podział na elementy [8]. Tak gęsty podział prowadzi do znacznego zwiększenia rzędu macierzy głównej analizowanego problemu i co za tym idzie do wydłużenia czasu i kosztów obliczeń. Znacznie mniej popularną od dotychczas wymienionych metod obliczeniowych jest Metoda Elementów Brzegowych (MEB), w której równania różniczkowe zastępuje się odpowiednio skonstruowanymi równaniami całkowymi. Idea MEB jest w zasadzie taka sama jak MES, z tą różnicą, że w MEB podziałowi na elementy podlega jedynie brzeg rozpatrywanego obszaru. Prowadzi to w sposób naturalny do obniżenia wymiaru przestrzeni o jeden, tzn. brzeg obszaru trójwymiarowego jest obszarem dwuwymiarowym, a tylko on podlega podziałowi na elementy skończone. Obniżenie wymiaru skutkuje zmniejszeniem wymiaru macierzy głównej problemu, a więc czasu obliczeń. Do wad metody zaliczyć można wymagany duży nakład pracy poświęcony na obliczenia wstępne, niezbędne w tej metodzie. Obliczenia te związane są z wyznaczeniem (obliczeniem) odpowiednich całek z funkcji z osobliwością (funkcja zmierzająca do nieskończoności dla jednej zmiennej niezależnej). Kłopotliwe przy obliczeniach numerycznych jest również to, że macierze główne analizowanego problemu są pełne w odróżnieniu od pasmowych macierzy w analizie MES.

Stosunkowo mało znaną, ale również możliwą do zastosowania jest Metoda Rozwiązań Fundamentalnych, która nie wymaga podziału na elementy całego analizowanego obszaru [1,2]. Co więcej zbędna jest również dyskretyzacja brzegu obszaru [11]. Niezbędny jest jedynie wybór odpowiedniej liczby punktów na brzegu (tzw.

punktów kolokacyjnych) i taka sama lub większa ilość punktów źródłowych poza (na zewnątrz) analizowanego obszaru. Macierz główna analizowanego problemu ma wymiar: ilość punktów kolokacyjnych  $\times$  ilość punktów źródłowych. Do rozwiązania takiego problemu wykorzystuje się metodę minimalizacji sumy kwadratu błędu lub rozkład według wartości osobliwych – rozkład SVD. Jedyną wielkością konieczną przy analizie MRF jest znajomość rozwiązania fundamentalnego [3,8], czyli funkcji Greena równania różniczkowego opisującego rozwiązywany problem. Do wad tej metody zaliczyć należy możliwość analizy jedynie prostych geometrii (konieczność znajomości funkcji Greena analizowanego problemu), nierozwiązanym dotąd problemem jest optymalna (ze względu na błąd metody) liczba i położenie zarówno punktów kolokacyjnych, jak i punktów źródłowych, im dalej od brzegu obszaru umieszczone są punkty źródłowe tym większa dokładność obliczeń, ale jednocześnie macierze główne stają się źle uwarunkowane, w takich przypadkach do rozwiązania stosuje się ciągłą lub dyskretną regularyzację.

Innym podejściem poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu własnego jest zastosowanie metody Kansy [6] bazującej na Radialnych Funkcjach Bazowych. Metoda ta nie wymaga stosowania jakichkolwiek siatek elementów. Znalazła ona szereg zastosowań do rozwiązania wielu różnych problemów mechaniki m.in. analiza problemów wymiany ciepła [14], analizy równań Naviera–Stokesa [4], analiza pola elektromagnetycznego [10] i wielu innych. Metody numeryczne wykorzystujące Radialne Funkcje Bazowe charakteryzuje podstawowa własność polegająca na transformacji problemów wielowymiarowych do problemów jednowymiarowych. W pracy zastosowano kolokacyjną metodę Kansy wraz z radialną funkcją bazową zaproponowaną przez Wendlanda [13] do analizy problemu własnego płyty z otworami.

### 1. FUNKCJE RADIALNE

Funkcja radialna to każda funkcja jednej zmiennej, postaci:

$$\varphi_j(r) = \varphi(\|x - x_j\|) \quad (1)$$

gdzie:  $\|x - x_j\|$  jest Euklidesową odległością pomiędzy punktami  $x$  i  $x_j$ . Punkt  $x_j$  jest nazwany centrum funkcji radialnej (1). Zmieniając położenie centrów otrzymuje się rodzinę funkcji, która tworzy bazę wykorzystywaną do interpolacji lub aproksymacji dowolnej funkcji. Każdą z funkcji bazowych (1) zaliczyć można do jednej z kategorii: funkcje o zwartym nośniku, tj. funkcje które są różne od zera jedynie w sferze o promieniu  $r$  (najczęściej  $r = 1$ ) lub funkcje o nośniku nieograniczonym ( $r \rightarrow \infty$ ). Najczęściej wykorzystywanymi funkcjami z pierwszej kategorii są zamieszczone w tabeli 1 funkcje Wenlan-

da [11]. W tabeli 2 pokazano przykłady funkcji o nośniku nieograniczonym.

Tab.1. Bazowe funkcje radialne o zwartym nośniku [11]

Wymiar przestrzeni	Definicja funkcji
d = 1	$\varphi(r) = (1-r)_+$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$
d = 2, 3	$\varphi(r) = (1-r)_+^2$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$

gdzie:

$$\varphi(r) = (1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n, & \text{dla } r \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

Tab.2. Bazowe funkcje radialne o nośniku nieograniczonym [6]

Nazwa funkcji	Definicja funkcji
liniowa	$\varphi(r) = r$
sześcienne	$\varphi(r) = r^3$
wielokwadratowa	$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
cienkiej płyty	$\varphi(r) = r^2 \ln(r)$
wielokwadratowa odwrotna	$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$
Gausa	$\varphi(r) = e^{-cr^2}$

W pracy wykorzystano funkcję Wendlanda dla zagadnień dwuwymiarowych, która przyjmuje postać:

$$\varphi(r) = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3) \quad (2)$$

W odróżnieniu od funkcji radialnych wielokwadratowych (funkcje o nośniku nieograniczonym) nie wymaga ona stosowania procedury wyznaczania parametru kształtu  $c$ .

## 2. METODA KANSY

Analizowane zagadnienie początkowo brzegowe opisane jest

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

równaniem postaci:

$$Bu = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci: gdzie:  $L$  jest liniowym operatorem różniczkowym,  $B$  jest operatorem opisującym warunki brzegowe,  $\Omega$  to analizowany obszar,  $\Gamma$  to brzeg tego obszaru.

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(r) \quad (5)$$

Idea metody Kansy polega na aproksymacji rozwiązania problemu początkowo brzegowego (3), (4) za pomocą sumy szeregu rodziny funkcji radialnych, tj.:

Współczynniki  $\alpha_j$  wyznaczane są w procedurze kolokacji. W tym

$$L\hat{u} = f(x_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_j L\varphi_j(r_i) = f(x_i) \quad (6)$$

celu należy wybrać zbiór  $N_0$  punktów  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}\}$  należących do obszaru  $\Omega$ , w których żąda się by przybliżone rozwiązanie (5) spełniało równanie (3):

Podobnie należy wybrać zbiór  $N_b$  punktów  $\{x_{N_0+1}, x_{N_0+2}, \dots, x_{N_0+N_b}\}$  na brzegu  $\Gamma$  analizowanego obszaru. W tych punktach muszą zostać spełnione równania warunków brzegowych (4):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B\varphi_j(r_i) = g(x_i) \quad (7)$$

$$A\alpha = f \quad (8)$$

Równania (6) i (7) stanowią liniowy układ równań, który zapisać można w postaci macierzowej:

Z układu równań (8) można wyznaczyć poszukiwane współczynniki  $\alpha_j$ . W przypadku gdy suma liczby wybranych punktów obszaru  $\Omega$  tj.  $N_0$  i liczby punktów brzegowych  $N_b$  jest równa liczbie punktów centralnych  $N$  ( $N_0+N_b=N$ ) układ (8) rozwiązać można stosując metodę eliminacji Gaussa, w przypadku gdy  $N_0+N_b > N$  układ (8) jest nadokreślonym i należy poszukiwać rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów np. stosując rozkład SVD.

## 3. ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH PŁYTY

Wyznaczenie częstości drgań własnych płyty prostokątnej o grubości  $h$  oparto na modelu Kirchoffa [5,9], który w tym przypadku przyjmuje postać równania:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - k^4 W = 0 \quad (9)$$

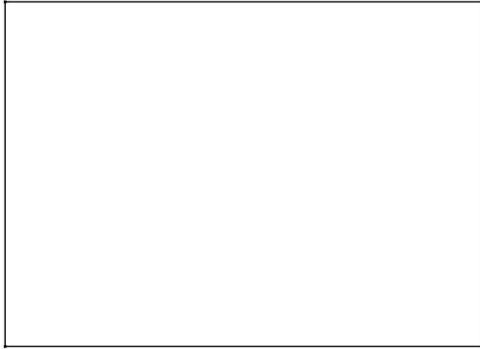
gdzie:  $k^4 = \frac{\mu\omega^2}{D}$ , przy czym  $\omega$  jest częstością drgań płyty,

$\mu = \rho h$  jest gęstością płyty przypadająca na jednostkę powierzchni,

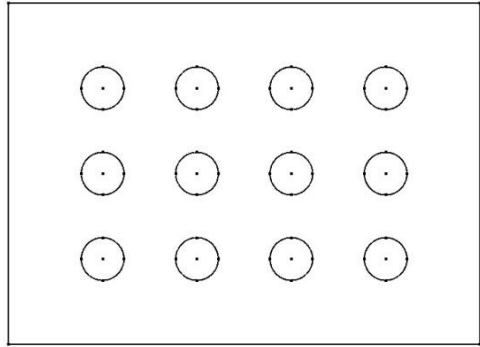
zaś  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  jest walcową sztywnością płyty na zginanie.

Funkcja  $W$  z równania (9) musi dodatkowo spełniać warunki brzegowe. W pracy analizowano przypadki z typowymi warunkami brzegowymi płyty tj. swobodnym podparciem ( $W=0$  i  $W''=0$ ) oraz utwierdzeniem ( $W=0$  i  $W'=0$ ) płyt przedstawionych na rysunku 1.

a) bez otworów:



b) z otworami:



Rys. 1. Analizowane rodzaje płyty

Wykorzystanie kolokacyjnej metody Kansy prowadzi do układu równań postaci:

$$A \cdot \alpha = 0 \quad (10)$$

gdzie elementy macierzy **A** zależą również od warunków brzegowych płyty. Częstości drgań własnych płyty tj. nietrywialne rozwiązanie układu równań (10) otrzymuje się ze spełnienia warunku  $\det A = 0$ .

Dla oceny wyników z przeprowadzonej aproksymacji częstości drgań własnych uzyskanych z analizy przybliżonej opartej na funkcjach radialnych (RBF) z wynikami z Metody Elementów Skończonych (MES) przyjęto miarę błędu względnego określony zależnością:

$$\delta = \frac{\omega_i^{RBF} - \omega_i^{MES}}{\omega_i^{MES}} \cdot 100\% \quad (11)$$

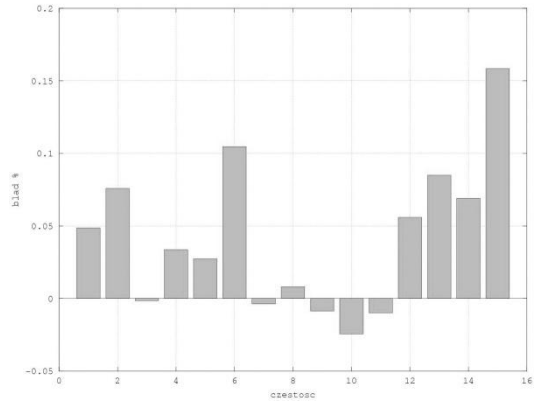
Wartości błędów wyznaczonych dla 15 pierwszych częstości własnych płyt swobodnie podpartych oraz utwierdzonych pokazano na rysunku 2.

Uzyskane wyniki wskazują na dużą dokładność analizy problemu własnego z wykorzystaniem metody bezsiatkowej opartej na metodzie kolokacyjnej Kansy i funkcjach Wendlanda.

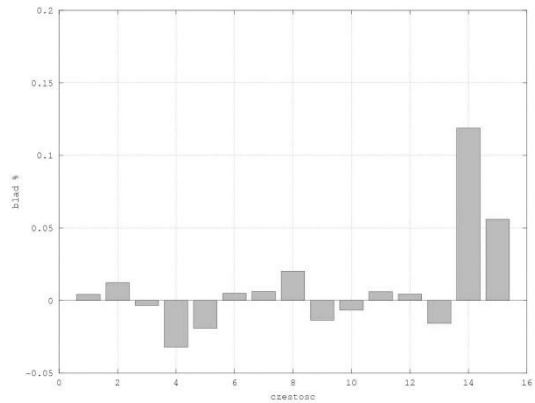
## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metodę kolokacyjną Kansy, którą wraz z funkcjami radialnymi opartymi na zależnościach podanych przez Wendlanda [13] zastosowano do analizy problemu własnego płyty z otworami. Funkcje Wendlanda są funkcjami o tzw. zwartym nośniku, których działanie ograniczone jest do obszarów lokalnych. Dla oceny dokładności metody analizy, porównano wyznaczone często-

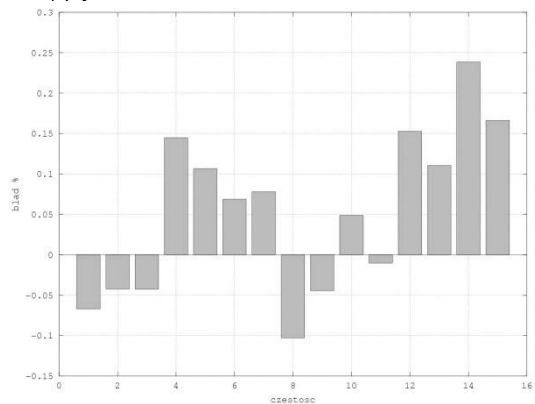
a) płyta swobodnie podparta bez otworów:



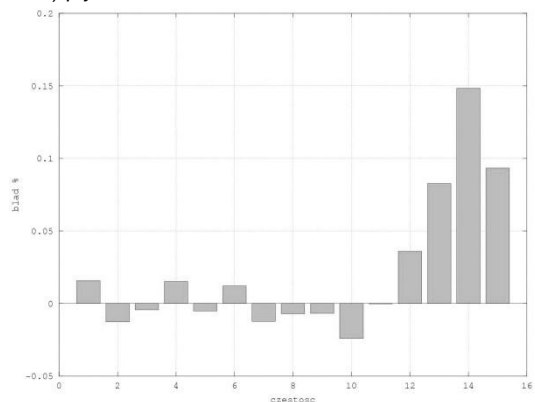
b) płyta swobodnie podparta z otworami:



c) płyta utwierdzona bez otworów:



d) płyta utwierdzona z otworami:



Rys. 2. Wartości błędów przy wyznaczaniu wartości własnych płyt

ści drgań własnych płyt bez otworów i z otworami z wartościami uzyskanymi z obliczeń Metodą Elementów Skończonych. Wyniki wskazują na dużą dokładność analizy problemu własnego z wykorzystaniem metody bezsiatkowej opartej na metodzie kolokacyjnej Kansa i funkcjach Wendlanda.

## BIBLIOGRAFIA

1. Alves C.J.S., Antunes P.R.S., The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigenfrequencies and eigenmodes of 2D simply connected shapes. *Computers, Materials & Continua* 2005, nr 2.
2. Alves C.J.S., Chen C.S., A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics* 2005, nr 23.
3. Alves C.J.S., Valtchev S.S., Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2005, nr 53.
4. Chinchapatnam P.P., Djidjeli K., Nair P.B., Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier-Stokes equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84, 2007, pp.1509-1526.
5. Kaliski S., *Drgania i fale*. PWN, Warszawa 1986.
6. Kansa E.J., Multiquadratic a scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics. *Computers & Mathematics with Applications* 19, 1990, pp. 147-165.
7. Kang S.W., Lee M.J. Kang Y.J., Vibration analysis of arbitrary shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function. *Journal of Sound and Vibration* 1999, nr 221
8. Karageorghis A., The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation. *Applied Mathematics Letters* 2001, nr 69.
9. Osiński Z., *Teoria drgań*. PWN, Warszawa 1980.
10. Vu P., Fasshauer G.E., Application of two radial basis function-pseudospectral meshfree methods to three-dimensional electromagnetic problems. *IET Science, Measurements & Technology*, 5, 2011 pp. 206-210.
11. Reutskiy S.Y., The method of external sources for eigenvalue problems with Helmholtz equation. *Computer Modeling in Engineering & Science* 2006, nr 12.
12. Wawrzynek A., Detka M., Cichoń Cz., Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczania współczynnika przejmwania ciepła. *Modelowanie Inżynierskie* 43, Gliwice 2012, s.255-263.
13. Wendland H., Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics* 4, 1995, pp.389-396.
14. Zerroukat M., Power H., Chen C.S., A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 1998, pp. 1263-1278.

*analysis. All results were compared to Finite Element Method result..*

Autorzy:

dr hab. inż. **Leszek Majkut** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza, e-mail: [majkut@agh.edu.pl](mailto:majkut@agh.edu.pl)

dr inż. **Ryszard Olszewski** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza, e-mail: [olszewsk@agh.edu.pl](mailto:olszewsk@agh.edu.pl)

**Wydane w ramach działalności statutowej nr 11.11.130.955**

## APPLICATION OF RADIAL BASIS FUNCTIONS TO DYNAMIC ANALYSIS OF A PLATE WITH HOLES

### *Abstract*

*This paper describes a meshless Kansa collocation method and its application to dynamic analysis of a plate with holes. Wendland functions were used in*