

Tomasz Janusz TELESZEWSKI

Politechnika Białostocka, WBiIS, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl

Algorytm MEB konwekcji wymuszonej w przepływie przez przewody prostoosiowe

1 Wstęp

W wielu urządzeniach i systemach przepływowo-ciepłnych ma miejsce wymiana ciepła w przepływach wielofazowych lepkich płynów newtonowskich i nienewtonowskich. Do opisu złożonych zjawisk przepływowych i ciepłych formułuje się złożone opisy matematyczne, częstokroć z udziałem formuł empirycznych ograniczających praktyczną stosowalność tych teorii [1,2]. W nowoczesnych rozwiązaniach technicznych przepływy tego typu występują w mikro- i minikanalach w formie przepływów dwufazowych ciecz-gaz (rys.1), ciecz-ciecz, ciekłych metali oraz w materiałach porowatych [3,4]. Laminarne przepływy dwufazowe o specyficznym charakterze rozdziału faz są określane mianem przepływów korkowych lub tłokowych [5,6,7].



Rys. 1. Laminarny przepływ korkowy glikol etylenowy-powietrze

Fig. 1. Laminar slug flow segmented ethylene glycol-air

Przedmiotem opracowania jest analiza charakterystyk przepływowych i ciepłych, tj. wyznaczenia pól prędkości i temperatury oraz liczb kryterialnych (liczba Nusselta) fazy ciekłej w laminarnym przepływie wielofazowym ciecz-gaz przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. W jednokierunkowym ustalonym przepływie przez przewód prostoosiowy składowa prędkość wzdłuż osi przewodu u_z jest stała w całym przekroju przewodu, natomiast składowe u_x i u_y są równe zero. Zakładając stałą wzdłuż osi przewodu gęstość strumienia ciepła $q_z = -\lambda \partial T / \partial z = -\lambda \Delta T_z = const$, równanie energii można przedstawić w postaci [8]:

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T_z u_z, \quad (1)$$

gdzie: ρ jest gęstością cieczy, c_p ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, natomiast λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.

Wyznaczenie pola temperatury i pola prędkości umożliwia wyznaczenie podstawowej charakterystyki cieplnej w przepływach z przejmowaniem ciepła, liczby kryterialnej Nusselta, będącej stosunkiem konwekcyjnego transportu ciepła do konduktywnego transportu ciepła w przepływie:

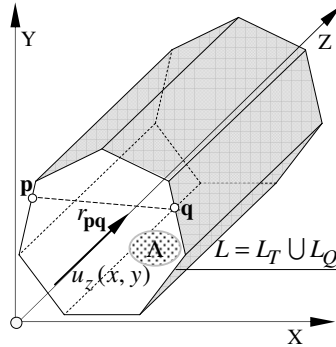
$$\text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{q_s D_h}{\lambda(T_s - T_m)}, \quad (2)$$

gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła, λ współczynnikiem przewodzenia ciepła płynu, L wymiarem charakterystycznym w przepływie, natomiast D_h oznacza charakterystyczny wymiar geometryczny przepływu (definiowany jako iloraz pola przepływu i długości obwodu styku cieczy ze ścianką przewodu), $D_h = 4A/L$, q_s jest średnią wartością strumienia ciepła na ściance przewodu:

$$q_s = \frac{1}{L} \int_L q(\mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \rho c_p \Delta T_z u_z; \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(x, y) \in L, \quad (2a)$$

bowiem w rozważanym przypadku przepływu korkowego $u_z \equiv u_z(x, y) = \text{const}$, natomiast T_s i T_m oznaczają odpowiednio temperaturę ścianki przewodu i średnią masową temperaturę płynu:

$$T_m = \frac{1}{A} \iint_A T(\mathbf{w}) dA_{\mathbf{w}}; \quad \mathbf{w} \equiv \mathbf{w}(x, y) \in A \quad (2b)$$



Rys. 2. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego przepływu przez przewód prostoosiowy

Fig. 2. Sketch analysis of boundary conditions for duct flow

Podstawowymi warunkami brzegowymi dla różniczkowego równania (1) opisującego rozkład temperatury w polu przepływu, stawianymi na ściankach, są temperatura i strumień ciepła. W przypadku zadanej temperatury na brzegu L wyznaczana liczba Nusselta określana jest w ramach definiowanego w literaturze problemu [9] zagadnienia H1 (warunek brzegowy Dirichleta), natomiast w przypadku strumienia ciepła na brzegu L - zagadnienia H2 (warunek brzegowy Neumanna). Prezentowany w opracowaniu algorytm jest funkcjonalny zarówno dla zagadnień H1 i H2, jak i dla warunku mieszanego H3 (warunek brzegowy Robin).

2 Brzegowe równania całkowe konwekcji wymuszonej w laminarnym przepływie przez przewody prostoosiowe

Całkowe sformułowanie zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym (1) w polu (A), ograniczonym ciągłym brzegiem ($L = L_T \cup L_Q$) z fizycznymi warunkami brzegowymi opisującymi na części brzegu L_T , jest zadaną temperaturą $T(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_T} = T_s(\mathbf{p})$, a na części brzegu L_Q zadany strumień ciepła $q(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_Q} = q_s(\mathbf{p})$ prowadzi do równania całkowego:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{L_Q} T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_{L_T} T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \\ \frac{1}{\lambda} \int_{L_T} q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_Q} q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T_z u_z \bar{G}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L; \mathbf{w} \in A$$

gdzie $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ i $\mathbf{q}(x_q, y_q)$ są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania, a funkcje $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są rozwiązaniami podstawowymi:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right), \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2}, \quad (3^1)$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}, \quad (3^2)$$

przy czym: $\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (x_p - x_q)$; $\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (y_p - y_q)$, $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[\frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$, jest

wektorem normalnym do granicy (L) w punkcie $\mathbf{q}(x_q, y_q)$, natomiast współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ przy wydzielonej wartości $T(\mathbf{p})$ w punkcie osobliwym na gładkiej części brzegu (L) jest równy $1/2$, zaś $\bar{G}(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ jest całką powierzchniową po obszarze A ograniczonym brzegiem L :

$$\bar{G}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \iint_A G(\mathbf{p}, \mathbf{w}) dA_{\mathbf{w}} . \quad (3^3)$$

Stosując warunek brzegowy zakładający zadaną wartość temperatury na ścianie przewodu $T(\mathbf{q}) = T_s(\mathbf{q})$; $\mathbf{q} \in L$, otrzymuje się równanie całkowe gęstości strumienia ciepła na brzegu obszaru:

$$\int_L q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \lambda T_s(\mathbf{p}) + \lambda \int_L T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \rho c p \Delta T_z u_z \bar{G}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) . \quad (4a)$$

Stosując warunek brzegowy zakładający zadaną gęstość strumienia ciepła na ścianie przewodu $q(\mathbf{q}) = q_s(\mathbf{q})$; $\mathbf{q} \in L$, otrzymuje się równanie całkowe rozkładu temperatury na brzegu obszaru:

$$\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_L T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\lambda} \int_L q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T_z u_z \bar{G}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) . \quad (4b)$$

Po wyznaczeniu wartości brzegowych: temperatury $T(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ temperaturę w wewnętrznych punktach $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \in A$ w obszarze A wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{v}) = \int_L T(\mathbf{q})H(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\lambda} \int_L q(\mathbf{q})G(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T_z u_z \bar{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) ; \quad (5)$$

$\mathbf{q} \in L$; $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in A$.

Gęstość strumienia ciepła wewnątrz przewodu można wyznaczyć przez zróżniczkowanie funkcji podcałkowych w związku całkowym (5):

$$q_x(\mathbf{v}) = -\lambda \left. \frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial x} \right|_{\mathbf{v}} = -\lambda \int_L T(\mathbf{q})H_x(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_L q(\mathbf{q})G_x(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \rho c p \Delta T_z u_z \bar{G}_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (6a)$$

$$q_y(\mathbf{v}) = -\lambda \left. \frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial y} \right|_{\mathbf{v}} = -\lambda \int_L T(\mathbf{q})H_y(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_L q(\mathbf{q})G_y(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \rho c p \Delta T_z u_z \bar{G}_y(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (6b)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial}{\partial x} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}} & ; & \quad H_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial y} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}} \\ G_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial}{\partial x} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}} & ; & \quad G_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial y} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (6^*)$$

$$\text{Ostatecznie} \quad q(\mathbf{v}) = \sqrt{(q_x(\mathbf{v}))^2 + (q_y(\mathbf{v}))^2} . \quad (7)$$

3 Weryfikacja numerycznego modelu MEB

W celu weryfikacji prezentowanego algorytmu wyznaczono kryterialne liczby Nusselta dla zagadnienia H1 przepływu jednorodnego w przewodach o przekroju poprzecznym wielokąta foremnego i porównano je z rezultatami otrzymanymi w pracy [10]. Obliczenia wykonano dla przekrojów: trójkątnego, kwadratowego, sześciokątnego, ośmiokątnego i okręgu.

Błąd MEB wyznaczono ze wzoru:

$$\delta Nu_{H1} = \left| \frac{Nu_{H1[10]} - Nu_{H1 \text{ MEB}}}{Nu_{H1[10]}} \right| * 100\% . \quad (8)$$

gdzie: $Nu_{H1 \text{ MEB}}$ jest wartością liczby Nusselta wyznaczoną metodą elementów brzegowych, natomiast $Nu_{H1[10]}$ jest wartością zaczerpniętą z pracy [10].

Błąd wartości liczby Nusselta wyznaczonej metodą elementów brzegowych dla wybranych wielokątów foremnych nie przekroczył 0.50%. W tabeli 1 przedstawiono porównanie rezultatów weryfikacji MEB dla trójkąta, kwadratu, sześciokąta, ośmiokąta i okręgu.

Tab. 1. Porównanie wyznaczonej liczby Nusselta Nu_{H1} metodą MEB z rozwiązaniem [10]

Tab. 1. Comparison Nusselt Nu_{H1} results using BEM with literature solution [10]

Liczba boków	Liczba Nusselta		Błąd względny
	$Nu_{H1 [10]}$	$Nu_{H1 \text{ MEB}}$	$\delta Nu_{H1 \text{ MEB}}$
3	6.67	6.667	0.045
4	7.08	7.114	-0.480
6	7.53	7.528	0.027
8	7.69	7.706	-0.208
okrąg 10 000	8	7.998	0.025

4 Przykład obliczeniowy

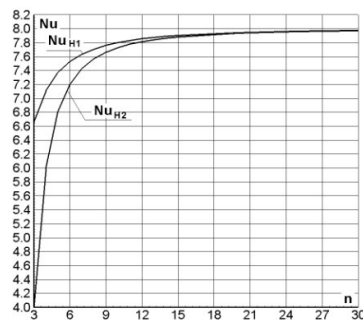
W ramach obliczeń liczby kryterialnej Nusselta przy użyciu przedstawionego wyżej algorytmu obliczeniowego metodą brzegowych równań całkowych wyznaczono liczbę Nusselta dla zagadnień H1 i H2 dla przewodów prostoosiowych o przekroju poprzecznym wielokąta foremnego dla liczby boków w zakresie od 3 do 30

oraz dla okręgu. W tabeli 3 przedstawiono przykładowe wartości NuH1 i NuH2 funkcji Nu=f(n). Na rysunku 3 wykreślono zależność liczby Nusselta od kształtu przekroju poprzecznego przewodu (liczby boków wielokąta) dla zagadnienia H1 i H2 przy jednakowych wartościach liczb Reynoldsa i Prandtla w jednokierunkowym przepływie laminarnym. W przypadku przepływu w przewodzie o kołowym kształcie przekroju poprzecznego liczby Nusselta NuH1 i NuH2 są sobie równe.

Tab. 2. Wartości liczb Nusselta Nu [H1] i Nu [H2] w funkcji liczby boków ścianek przewodu

Tab. 2. Nusselt number for [H1] and [H2] as the function of sides of regular polygons of the cross-section straight duct

Liczba Nusselta	Liczba ścianek n wielokąta foremnego					
	5	7	9	10	15	30
Nu[H1]	7.369	7.633	7.760	7.800	7.904	7.974
Nu[H2]	6.804	7.427	7.662	7.728	7.882	7.973



Rys. 3. Wartości liczb Nusselta NuH1 i NuH2 w funkcji liczby ścianek przewodu o przekroju wielokąta foremnego

Fig. 3. Nusselt number as the function of sides of regular polygons of the cross-section straight duct

Na podstawie obliczeń pól prędkości i temperatury oraz liczby kryterialnej Nusselta fazy ciekłej w laminarnym przepływie wielofazowym ciec-z-gaz przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego do zastosowań inżynierskich proponuje się zależność funkcyjną opisującą wartość liczby Nusselta w funkcji liczby boków wielokąta foremnego jako kształtu przekroju poprzecznego przewodu, przy równoważnych wartościach liczb kryterialnych Reynoldsa i Prandtla w postaci:

$$Nu_{H1,H2} = f(n) = \sum_{m=0}^5 \frac{a_m}{n^m}, \quad (9)$$

gdzie współczynniki a_m ($m = 1, \dots, 5$) dla wariantów [H1] i [H2] zestawiono w tabeli 3.

*Algorytm MEB konwekcji wymuszonej w przepływie
przez przewody prostoosiowe*

Tab. 3. Zestawienie współczynników funkcji $Nu=f(n)$

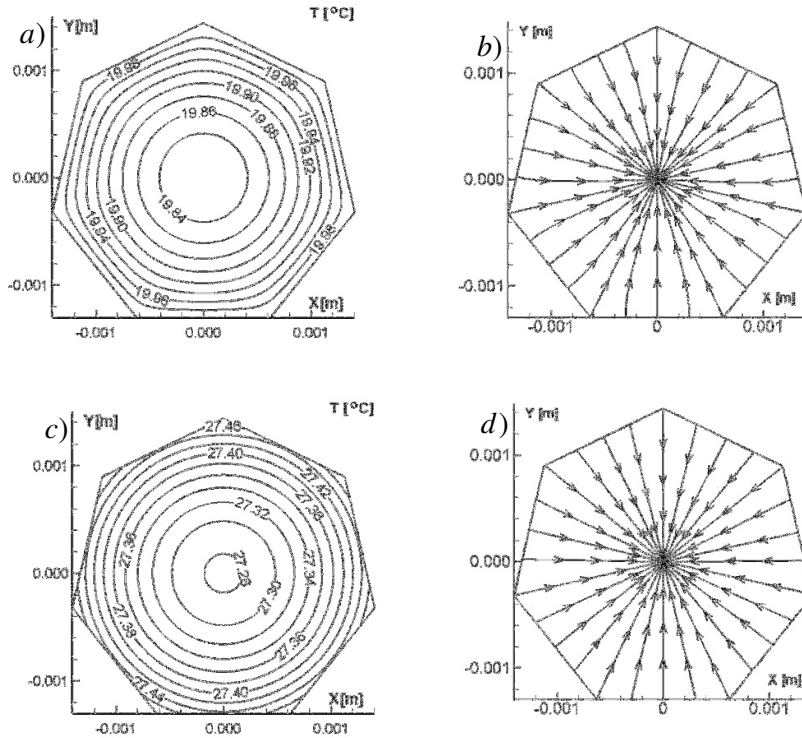
Tab. 3. Coefficients of the function $Nu=f(n)$

Liczba Nusselta	Współczynniki funkcji $Nu=f(n)$					
	a	b	c	d	e	f
Nu [H1]	8.0000	0.0565	-27.4868	84.4600	-167.6360	156.3900
Nu [H2]	8.0000	0.1696	-31.1154	48.9110	-295.7170	301.3300

Poniżej przedstawiono rezultaty obliczeń izoterm i linii przepływu ciepła dla przewodu prostoliniowego o przekroju siedmiokąta foremnego. Na rysunku 3a wykreślono izotachy dla przepływu glikolu etylenowego ($\mu=0.021329\text{Pa s}$, $\rho=1115.6[\text{kg/m}^3]$, $\lambda=0.2705\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $c_p=2403.0\text{J}/(\text{kg K})$, $u_z=0.04\text{m/s}$) przepływającego w układzie z powietrzem w przewodzie o przekroju siedmiokąta foremnego dla zagadnienia H1, natomiast na rysunku 3b wykreślono linie przepływu ciepła dla tego zagadnienia. Na brzegu przewodu założono stałą temperaturę $\tilde{T}(\mathbf{q})=T_s=20.0^\circ\text{C}$. Na rysunkach 4a-b został przedstawiony ten sam przepływ dla zagadnienia H2, w którym założono stałą gęstość strumienia ciepła $69.58\text{W}/\text{m}^2$.

5 Podsumowanie

Przedstawiony w pracy algorytm jest efektywnym narzędziem modelowania konwekcji wymuszonej w przepływach laminarnych zarówno jedno-, jak też dwufazowych. Należy tutaj zaznaczyć, że w przypadku modeli przepływów prętowego i korkowego matematyczny opis przepływu i wymiany ciepła jest znacznie uproszczony w stosunku do przypadku ustabilizowanego przepływu laminarnego i mogą być stosowane jedynie do zawężonych zagadnień, np.: jako przepływy w mikro- i minikanalach w układach dwufazowych ciecz-gaz, ciecz-ciecz, ciekłych metali oraz w materiałach porowatych. Główną zaletą MEB w prezentowanym zagadnieniu jest eliminacja pracochłonnych przestrzennych siatek wykorzystywanych w programach komercyjnych opartych na metodzie elementów skończonych i metodzie objętości skończonych. W pracy przedstawiono praktyczny przykład wykorzystania MEB do wyznaczenia zależności liczb Nusselta w jednorodnym przepływie korkowym przez przewody o regularnym kształcie przekroju poprzecznego.



Rys. 4. Laminarny przepływ korkowy płynu w układzie glikol-powietrze w przewodzie prostoosiowym o przekroju siedmiokąta foremnego wyznaczony metodą MEB, rozwiązanie dla glikolu etylenowego: a) pole temperatury (H1), b) linie przepływu ciepła(H1), c) pole temperatury (H2), d) linie przepływu ciepła(H2)
 Fig.4. Laminar slug flow segmented ethylene glycol-air in heptagonal duct, BEM solutions for ethylene glycol: a) temperature field (H1), b) heatline (H2), c) temperature field (H1), d) heatline (H2)

Literatura

1. Burmeister L. C.: *Convective Heat Transfer*, Wiley, New York 1993
2. Kays W. M., Crawford M. E.: *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York 1993
3. Bejan A., Nield D.: *Convection in Porous Media*, Springer-Verlag, New York 2001
4. Bejan A.: *Convection Heat Transfer*, Wiley, New York 2004
5. Spiga M., Morini G. L.: The Developing Nusselt Numbers for Slug Flow in Rectangular Ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 41, s. 2799–2807, 1998

6. Walsh E.J., Walsh P.A., Muzychka Y.S., Punch J., Egan V.: Pressure drop in two phase slug/bubble flows in mini scale capillaries, *International Journal of Multiphase Flow* vol. 35(10), s. 879–884, 2009
7. Walsh P., Walsh E. J., Muzychka Y. S.: Heat transfer model for gas–liquid slug flows under constant flux, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 53, s. 3193–3201, 2010
8. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
9. Shah R. K., London A. L.: *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic, New York 1978
10. Muzychka Y.S., Walsh E., Walsh P.: Simple Models for Laminar Thermally Developing Slug Flow in Noncircular Ducts and Channels, *Journal of Heat Transfer*, ASME, vol. 132, s. 879–884, 2010

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm MEB symulacji konwekcji wymuszonej przy przepływie korkowym przez prostoosiowe przewody o zróżnicowanym kształcie przekroju. Weryfikacja metody elementów brzegowych została wykonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB z rozwiązaniem analityczno-empirycznym. W pracy przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń symulacji konwekcji wymuszonej w przewodzie o przekroju siedmiokąta foremnego oraz wyznaczono funkcję liczby Nusselta w zależności od liczby ścianek tworzących przekrój przewodu prostoosiowego o kształcie wielokąta foremnego.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, konwekcja wymuszona, przepływ jednorodny, przewody prostoosiowe

Simulations of slug flow in forced convection a Boundary Element Method in a duct with arbitrary cross-section

Summary

The paper presents the numerical algorithm Boundary Element Method to simulation modelling of slug flow in forced convection through straight ducts of arbitrary cross section. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests in known solution. A numerical examples are presented fully developed forced convection through heptagon duct. In this study is proposed for determining the Nusselt number in regular polygonal channels of slug flow in forced convection.

Keywords: boundary element method, forced convection, slug flow, straight ducts

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014.

