

Zniekształcenia odwzorowawcze przy granicach stref odwzorowawczych w obowiązującym układzie geodezyjnym

mgr inż. Artur Januszewski – absolwent, dr Katarzyna Kraszewska, Katedra Geodezji, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji, Politechnika Koszalińska

1. Wprowadzenie

Jednym z głównych problemów geodezji i kartografii jest przeniesienie współrzędnych z terenu na mapę. Problem wynika z tego, iż powierzchnia Ziemi ze swojej natury jest zakrzywiona, natomiast mapa najczęściej przedstawia obraz na powierzchni płaskiej. Oznacza to, że odwzorowanie rzeczywistej powierzchni Ziemi na płaszczyźnie bez zniekształceń jest niemożliwe. Systemy odniesienia stosowane na potrzeby gospodarki narodowej powinny pozwalać na mapowanie dużych obszarów kraju w jednej strefie odwzorowawczej i jednocześnie zapewniać występowanie niedużych zniekształceń odwzorowawczych. Problem zniekształceń nasila się szczególnie w przypadku inwestycji, takich jak drogi o dużych długościach przebiegające wzdłuż równoleżników, jak choćby budowana trasa S-6 Szczecin – Gdańsk. Trasa ta przebiega przez kilka stref odwzorowawczych. Temat, który poruszony został w niniejszej pracy, to przenoszenie współrzędnych przy granicach tych stref.

2. Wybrane wydarzenia z historii kartografii oraz obowiązujące układy współrzędnych

Pierwsze mapy powstawały w czasach, kiedy ludzie wierzyli w płaskość Ziemi i wówczas domniemana płaszczyzna Ziemi była przenoszona wprost na płaszczyznę materiałów piśmienniczych. W epoce starożytnej pojawiły się pierwsze odwzorowania kartograficzne, w tym trzy odwzorowania Ptolemeusza. W średniowieczu, jeśli nie tworzone kopii map Ptolemeusza, często nie umieszczano na mapach siatek kartograficznych, ewentualnie oddawano je najczęściej jako siatkę kwadratów.

Przełomowym wydarzeniem było powstanie w XVI wieku wiernokątnego odwzorowania Merkatora. Mapy wykonane w odwzorowaniu Merkatora stanowiły duże ułatwienie w żegludze – zawierały informację o kierunku żeglugi. W odwzorowaniu Merkatora południki oraz równoleżniki odwzorowują się jako proste

równoległe. Charakterystyczną cechą odwzorowania Merkatora jest ciągle zwiększanie się skali odległości wzdłuż południków wraz z oddalaniem się od równika. Na mapach sporządzonych w tym odwzorowaniu powierzchnie krajów położonych na średnich długościach geograficznych są bardzo zwiększone względem skali na obrazie równoleżnika, dlatego na tych mapach Grenlandia zdaje się mieć powierzchnię podobną do Ameryki Południowej.

W XVII wieku niektórzy uczeni zauważyli, że Ziemia nie może być kulą, co zostało potwierdzone na podstawie pomiarów długości łuków południkowych w kolejnym stuleciu. Na podstawie pomiarów długości łuków południkowych wprowadzono w 1795 roku nową jednostkę miary – metr – definiowaną pierwotnie jako 10^{-7} długości łuku południka między równikiem a biegunem.

Obecnie w geodezji stosuje się najczęściej odwzorowanie Gaussa-Krügera, które powstało stopniowo jako modyfikacja odwzorowania Merkatora. Zostało opracowane przez dwóch niemieckich matematyków: pierwotnie zastosowane przez Carla Friedricha Gaussa (r. 1825), a następnie udoskonalone przez Johanna Heinricha Louisa Krügera (r. 1912). Odwzorowanie Gaussa-Krügera jest odwzorowaniem wiernokątnym, co oznacza, że wszystkie kąty na odwzorowaniu mają tę samą miarę, co kąty na powierzchni Ziemi. W rzeczywistości generuje drobne zniekształcenia kątów oraz wyraźne zniekształcenia zbieżności południków. Trzy spośród pięciu układów współrzędnych płaskich wymienionych w Rozporządzeniu Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych – PL-UTM, PL-1992 i PL-2000 – są oparte na odwzorowaniu Gaussa-Krügera. Wszystkie układy współrzędnych wymienione w tym rozporządzeniu dotyczą funkcjonowania państwa. Przykłady zastosowań układu PL-UTM to wydawanie map morskich oraz wojskowych. W układzie PL-1992 jest prowadzona baza danych obiektów topograficznych BDOT10k – baza danych, na podstawie której można

tworzyć opracowania kartograficzne w skalach od 1:10 000 do 1:100 000. Najczęściej na potrzeby gospodarki stosuje się układ PL-2000.

Układ PL-1992 jest oparty na jednej strefie odwzorowawczej, z kolei układ PL-2000 jest oparty na czterech trzystopniowych strefach południkowych. Południkami osiowymi, czyli tymi, względem których konstruuje się odwzorowanie, w układzie PL-2000 są południki 15°E, 18°E, 21°E i 24°E. Granice stref przebiegają wzdłuż granic powiatów. Przynależność powiatu do strefy odwzorowawczej zależy od tego, w której strefie znajduje się większość jego powierzchni.

Wszystkie równoleżniki oprócz równika odwzorowują się jako linie krzywe zwrócone wypukłością w stronę równika. Południk osiowy danej strefy odwzorowuje się jako linia prosta, pozostałe południki odwzorowują się krzywoliniowo. Wobec tego takie same odległości na powierzchni Ziemi w odwzorowaniu Gaussa-Krügera przyjmują różne wartości. Jeżeli skala długości południka osiowego na obrazie wynosi 1, to skala długości na pozostałych południkach są większe od 1. Sposobem na równoważenie tych zniekształceń jest zmniejszanie skali na południku osiowym. Słowo „obraz” w kontekście kartografii matematycznej oznacza rzut na pewną płaszczyznę powiązaną z Ziemią, np. na płaszczyznę styczną do równika elipsoidy odniesienia. Południki i równoleżniki na standardowych mapach są obrazami pomniejszonymi ze względu na skalę mapy. Zniekształcenia długości w układzie PL-2000 są największe na południkach osiowych i wynoszą – 7,7 cm/km.

3. Przeprowadzone pomiary eksperymentalne

Wysoka dokładność pomiarów geodezyjnych jest wymagana m.in. przy prowadzeniu obsługi wielu inwestycji budowlanych. Zniekształcenia kątowe rosną wraz z oddalaniem się od południka osiowego oraz wraz z oddalaniem się od równika. Można postawić pytanie, czy zniekształcenia odwzorowawcze przy granicach stref nie stanowią przeszkody w prowadzeniu geodezyjnej obsługi inwestycji. Postanowiono to sprawdzić w ramach pracy inżynierskiej (Odwzorowanie Gaussa-Krügera i jego zastosowanie w geodezji. Ocena dokładności wyznaczenia współrzędnych na granicy pasów



Rys. 1. Pomiar techniką satelitarną

południkowych). W tym celu w miejscowości położonej przy granicy stref odwzorowawczych wykonano pomiary tachimetrem oraz odbiornikiem satelitarnym (rys. 1). Wynikami pomiarów wykonywanych odbiornikami satelitarnymi są współrzędne wyrażone w wybranym układzie odniesienia, co pozwala uzyskać próbkę danych obarczonych zniekształceniami odwzorowawczymi. Z kolei pomiary wykonywane tachimetrami są bardzo dokładne oraz pozwalają uzyskiwać niemal takie same wyniki pomiarów kątów jak na powierzchni odniesienia.

Wybraną miejscowością był Siecimin, położony w powiecie koszański przy granicy z powiatem sławieńskim. Powiat koszański znajduje się w 5 strefie odwzorowawczej, powiat sławieński w 6 (numer

strefy otrzymuje się po podzieleniu wartości południka osiowego przez 3).

4. Post-processing obserwacji geodezyjnych

W czasie wykonywania pomiarów obowiązywało Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 9 listopada 2011 r. w sprawie standardów technicznych wykonywania geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych oraz opracowywania i przekazywania wyników tych pomiarów do państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego. To rozporządzenie zawierało szereg przepisów związanych z wyrównaniem danych obserwacyjnych, m.in. *Przy opracowywaniu wyników geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych: 1) wszelkie obliczenia geodezyjne wykonuje się zgodnie z zasadami teorii przenoszenia się średnich błędów i zasadami rachunku prawdopodobieństwa; 2) wyniki obliczeń zapisuje się z zachowaniem właściwej precyzji według reguł Bradis-Kryłowa; 3) wyniki pomiarów, przed ich przyjęciem do obliczeń, koryguje się: (...), b) wprowadzając poprawki ze względu na:*

– *systematyczne błędy pomiaru oraz narzędzi i instrumentów,*

– *przyjęty układ współrzędnych (§ 70).*

2) *wyniki pomiaru przed wyrównaniem podlegają redukcji ze względu na: a) stałe błędy instrumentalne, b) odchylenia stanu środowiska w trakcie pomiaru od warunków idealnych, normalnych lub założonych, c) pochylenie terenu,*

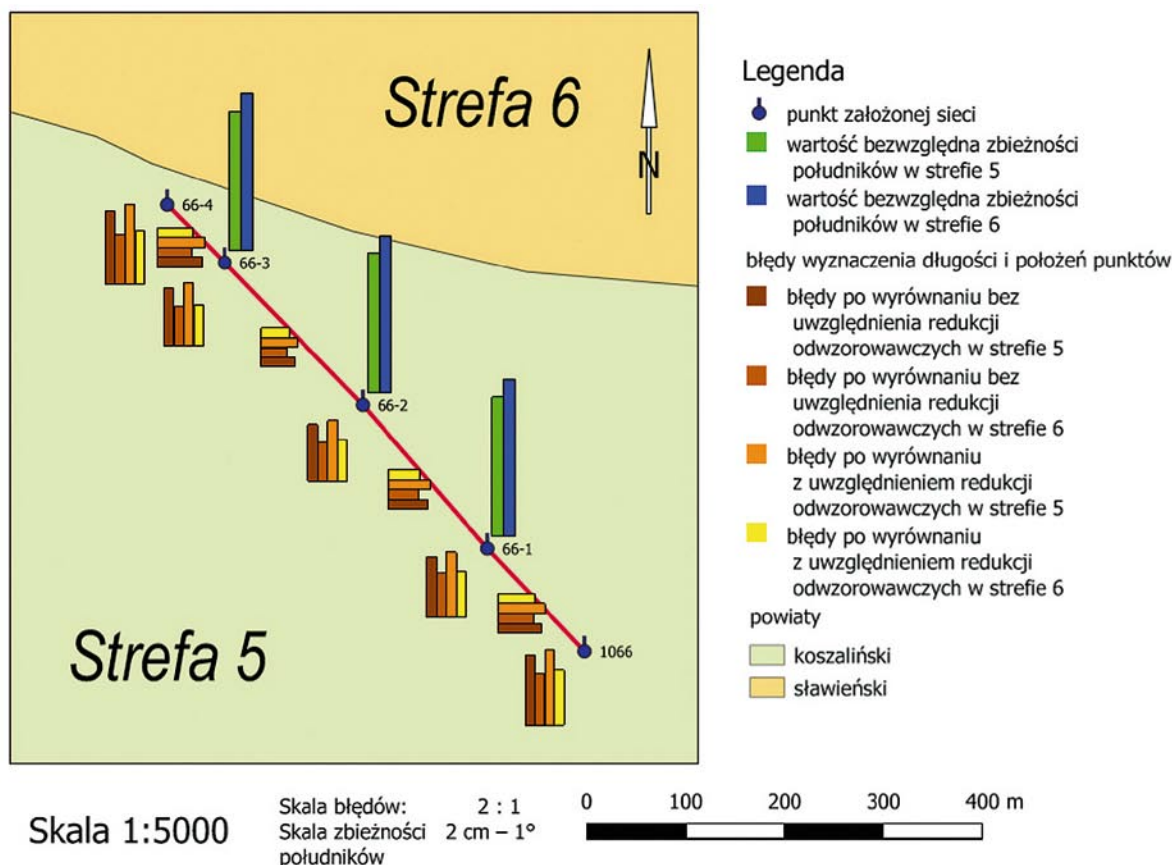
d) przyjęty system odniesień przestrzennych (np. redukcja na poziom elipsoidy, redukcja ze względu na odwzorowanie); (...) 4) w przypadku osnów pomiarowych, których dane obserwacyjne pozyskane zostały zarówno w drodze geodezyjnych pomiarów terenowych, jak i precyzyjnego pozycjonowania za pomocą GNSS, stosuje się metodę łącznego wyrównania tych danych obserwacyjnych (§ 74). Skrót GNSS oznacza Globalny System Nawigacji Satelitarnej (Global Navigation Satellite System), do którego należą systemy nawigacji satelitarnej pokrywające całą Ziemię: amerykański GPS, rosyjski GLONASS, osiągający operacyjność europejski GALILEO i inne.

Łączne wyrównanie danych obserwacyjnych z pomiarów satelitarnych oraz klasycznych pomiarów geodezyjnych to inaczej wyrównanie hybrydowe. Literatura związana z geodezyjnymi pomiarami szczegółowymi podaje wiele źródeł błędów przy pomiarach. Wpływ części tych błędów jest pomijalnie mały, np. wpływ błędu poziomowania tachimetru na pomiar kątów przy włączonym i sprawnym kompensatorze (błąd kompensacji). Wartość tego błędu jest dużo mniejsza niż błąd pomiaru kierunku. Można postawić pytanie, czy zdaniem autorów przepisów należy trzymać się litery prawa nawet w takich przypadkach.

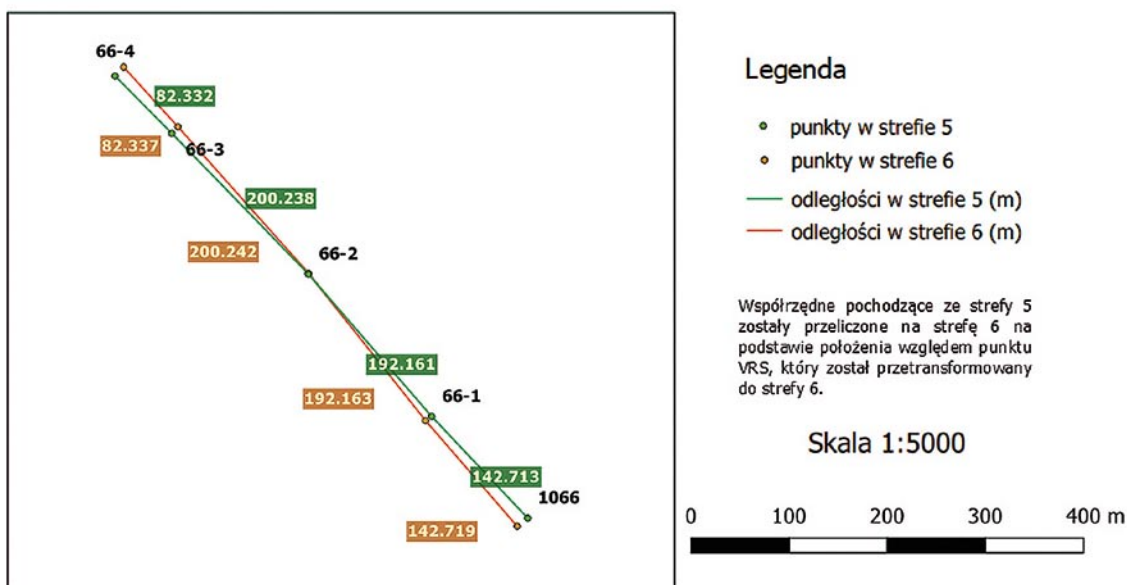
Jeśli obliczenie błędów średnich kątów przeprowadzimy zgodnie z regułami zaokrąglania Bradis-Kryłowa (przy obliczeniach pośrednich można zachować jeszcze wyższą precyzję), a błąd odczytu kierunku jest wyrażony w decymiligradach (może wynosić przykładowo 10^{cc}), to wpływ błędu kompensacji zostanie zapisany jako $0,0^{cc}$ (Jednostką pomiaru kąta w geodezji jest grad. Kąt prosty to 100 gradów. Najczęściej wartości kątów zapisuje się z precyzją do jednej dziesięciotysięcznej grada, czyli 1^{cc} .)

Obecnie obowiązuje rozporządzenie Ministra Rozwoju z dnia 18 sierpnia 2020 roku o tej samej nazwie. Treść obecnego rozporządzenia jest krótsza. Nie nałożono m.in. obowiązku wykonywania wyrównania hybrydowego.

W ramach zadania postawionego w pracy dyplomowej wykonano analizę dokładności oraz różne warianty wyrównania (rys. 2). Przygotowanie prawidłowych danych do wyrównania wymagało obliczenia redukcji odwzorowawczych. Dodatkowym etapem obliczeń było wyznaczenie azymutów geograficznych. Azymuty obliczone na podstawie współrzędnych punktów wyrażonych w pewnym odwzorowaniu są azymutami topograficznymi – azymut topograficzny to kąt zawarty



Rys. 2. Ilustracja obszaru pomiarów uwzględniająca błędy położenia punktów i długości boków oraz wartości bezwzględne zbieżności południków (opracowanie własne na podstawie wyników pomiarów, granice powiatów: www.koszalinski.e-mapa.net)



Rys. 3. Szkic zależności geometrii sieci od strefy odwzorowawczej (opracowanie własne na podstawie wyników pomiarów)

między kierunkiem osi pionowej układu współrzędnych a danym kierunkiem, wzrastający w prawo. Przy wyznaczaniu azymutów geograficznych uwzględniono zniekształcenia kierunków oraz zbieżność południków. Następnie wykonano rysunek, na którym powiązania geometryczne względem osi pionowej układu, jakie występują w strefie 5, są przeniesione do strefy 6 (rys. 3). Do transformacji posłużył punkt VRS, czyli wirtualna stacja referencyjna (*Virtual Reference Station*). Jest to pomierzony techniką satelitarną punkt, w którym znajduje się odbiornik w momencie połączenia z siecią. Wektory GNSS w technikach kinematycznych to interpolowane wielkości między wirtualną stacją referencyjną a chwilowym położeniem odbiornika.

W trakcie pomiarów na wyświetlaczu kontrolera są podane wielkości błędów pierwiastka średniokwadratowego. Należy mieć świadomość, że nie jest to prawdziwa wartość błędu pomiaru, tylko jego przybliżenie. W prawidłowej ocenie dokładności należałoby uwzględnić chociażby przesunięcie poziome wynikające z niepionowego ustawienia odbiornika. Po uwzględnieniu wszystkich błędów często otrzymuje się błąd pomiaru rzędu 3 cm.

5. Podsumowanie

Po wykonaniu obliczeń okazało się, że największemu zniekształceniu podlegała zbieżność południków – wynosi ok. $1,27^{\circ}$ w strefie 5 i – $1,43^{\circ}$ w strefie 6. Zniekształcenia kierunków są pomijalnie małe – są to wielkości rzędu $0,1^{\circ}$. Zniekształcenia długości wynoszą $5,4$ cm/km. Teoretyczna długość 50 m obliczona na podstawie współrzędnych w układzie PL-2000 wynosiłaby w rzeczywistości

50,0026 m. Okazało się również, że błąd pomiaru odbiornikiem satelitarnym w tym przypadku był większy niż błąd generowany przez odwzorowanie. Najskuteczniejszym sposobem na uwolnienie pomiarów od zniekształceń odwzorowawczych jest stosowanie układów lokalnych, co bardzo często ma miejsce przy tyczeniu budynków.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Gajderowicz I., *Odwzorowania kartograficzne. Podstawy*
- [2] Różycki J., *Kartografia matematyczna, wydanie II*
- [3] Jagielski A., *Geodezja I, wydanie II*
- [4] Jagielski A., *Geodezja II, wydanie II*
- [5] Snyder J. P., *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*
- [6] *Geodezja. Geodezyjna Osnowa Szczegółowa*, redakcja Lazzarinięgo T.
- [7] *Geodezja wyższa i astronomia geodezyjna. Zadania i przykłady*, redakcja Jachym L.
- [8] *The History of Cartography, Volume 1: Cartography in Prehistoric, Ancient, and Medieval Europe and the Mediterranean*, red. Harley J. B., Woodrard D.
- [9] Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych
- [10] Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 9 listopada 2011 r. w sprawie standardów technicznych wykonywania geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych oraz opracowywania i przekazywania wyników tych pomiarów do państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego
- [11] Rozporządzenie Ministra Rozwoju z dnia 18 sierpnia 2020 r. w sprawie standardów technicznych wykonywania geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych oraz opracowywania i przekazywania wyników tych pomiarów do państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego
- [12] <https://polskatimes.pl/jak-ludzie-odkrywali-swiat-i-zaczeli-tworzyc-mapy/ar/13555170>
- [13] <https://geoforum.pl/strona/46812,46823,46894/geodezja-historia-elipsoida-ziemski>
- [14] <https://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html>
- [15] https://pl.wikipedia.org/wiki/Azymut_geograficzny
- [16] <http://tools.aps.edu.pl/pliki/legia/06.pdf>