



## Analiza drgań własnych układu wyrzutnia rakiet – samochód z wykorzystaniem współrzędnych głównych

Zbigniew DZIOPA\*, Maciej NYCKOWSKI

*Politechnika Świętokrzyska, Al. 1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce*

*\*autor korespondencyjny, e-mail: [zdzioa@tu.kielce.pl](mailto:zdzioa@tu.kielce.pl)*

*Artykuł wpłynął do redakcji 21.11.2014. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 02.09.2015*

DOI 10.5604/20815891.1203117

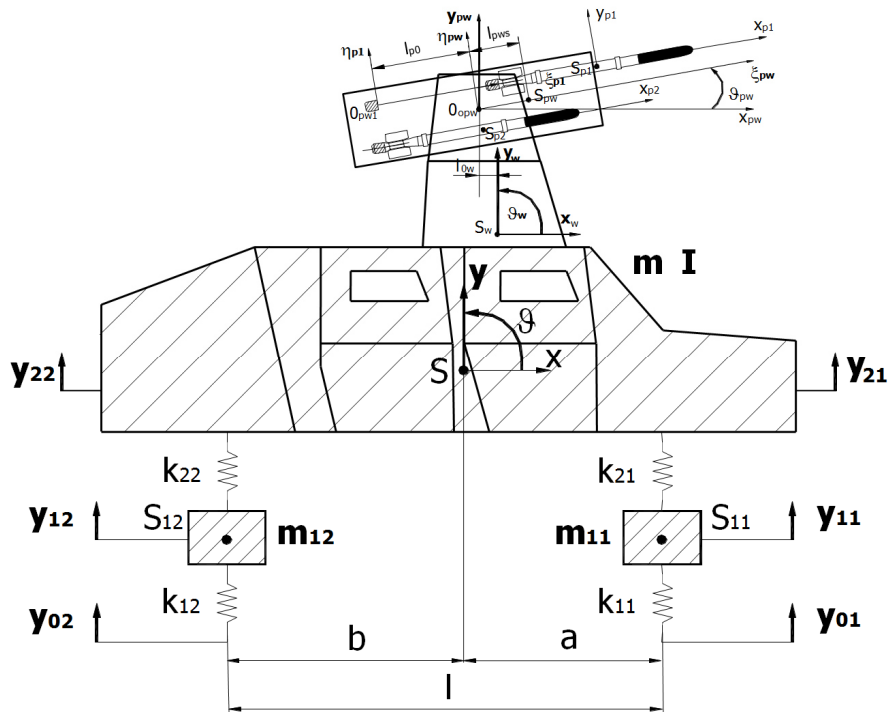
**Streszczenie.** W pracy rozpatrywany jest układ składający się z pojazdu samochodowego, na którym umieszczona jest wyrzutnia rakiet niesterowanych. Wykorzystano rzeczywisty samobieżny zestaw rakietowy do opracowania modelu fizycznego, a następnie zastosowano metodę równań Lagrange'a II rodzaju do wyprowadzenia modelu matematycznego. Na podstawie równań opisujących zachowawczy i autonomiczny ruch układu wyznaczono wartości i wektory własne. Dysponując wyznaczonymi charakterystykami dynamicznymi analizowanego układu, sprawdzono warunki ortogonalności postaci drgań własnych i wprowadzono współrzędne główne. Następnie wyznaczono niezależne równania drgań układu wyrzutnia rakiet – samochód z uwzględnieniem wartości i wektorów własnych. Na zakończenie rozważań przeprowadzono analizę drgań własnych rozpatrywanego układu.

**Słowa kluczowe:** mechanika, wyrzutnia rakiet, pojazd samochodowy, współrzędne główne

## 1. WSTĘP

Przeprowadzone w pracy rozważania dotyczą zdalnie sterowanego modułu uzbrojenia ZSMU-70. Niniejszy artykuł jest kontynuacją analizy modalnej układu dyskretnego składającego się z wyrzutni rakiet umieszczonej na pojeździe samochodowym [3, 4, 5, 12]. W artykule wykorzystane są wektory własne, na podstawie których otrzymano cztery postacie drgań własnych rozpatrywanego układu. Celem opracowania jest wykorzystanie wyznaczonych wartości i wektorów własnych do analizy drgań własnych rozważanego układu z uwzględnieniem współrzędnych głównych [11].

Sformułowany model fizyczny przedstawiony jest na rys. 1 [6, 9]. Model opracowano, przyjmując następujące założenia upraszczające: występuje symetria podłużna układu, mosty pojazdu wraz z kołami zredukowane są do mas skupionych, nadwozie pojazdu to ciało doskonale sztywne, wyrzutnia to ciało doskonale sztywne połączone na stałe z nadwoziem, układ prowadnic ma możliwość obrotu względem wieży – po obrocie prowadnice wraz z wieżą stanowią bryłę sztywną.



Rys. 1. Samobieżny zestaw raketowy

Fig. 1. Self-propelled missile assembly

Na podstawie przyjętego modelu fizycznego z wykorzystaniem metody wariacyjnej wyprowadzono model matematyczny. Zależności analityczne w postaci sprzężonych równań różniczkowych drugiego rzędu o pochodnych zwyczajnych opisują dynamikę rozpatrywanego układu. Model matematyczny samobieżnego zestawu raketowego jako układ zachowawczy i autonomiczny określony jest zależnością (1) [10, 11, 14].

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + k_{21}(y + a\vartheta - y_{11}) + k_{22}(y - b\vartheta - y_{12}) &= 0 \\ I\ddot{\vartheta} + k_{21}a(y + a\vartheta - y_{11}) - k_{22}b(y - b\vartheta - y_{12}) &= 0 \\ m_{11}\ddot{y}_{11} + k_{11}y_{11} - k_{21}(y + a\vartheta - y_{11}) &= k_{11}y_{01} \\ m_{12}\ddot{y}_{12} + k_{12}y_{12} - k_{22}(y - b\vartheta - y_{12}) &= k_{12}y_{02} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$y, \vartheta, y_{11}, y_{12}$  – współrzędne niezależne.

Do wyprowadzenia równań (1) wykorzystano następujące wzory na energię kinetyczną  $T$  i potencjalną  $U$  rozpatrywanego układu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m\dot{y}^2 + I\dot{\vartheta}^2 + m_{11}\dot{y}_{11}^2 + m_{12}\dot{y}_{12}^2) \\ U &= \frac{1}{2} [k_{11}(y_{11} - y_{01})^2 + k_{12}(y_{12} - y_{02})^2 + k_{21}(y + a\vartheta - y_{11})^2 + k_{22}(y - b\vartheta - y_{12})^2] \end{aligned}$$

Parametry modelu:

- masa i moment bezwładności nadwozia pojazdu wraz z wyrzutnią po ich agregacji

$$m = 1780 [kg] \quad I = 2620 [kgm^2]$$

- masy mostów pojazdu wraz z kołami po ich redukcji

$$m_{11} = 113 [kg] \quad m_{12} = 157 [kg]$$

- współczynniki sztywności ogumienia kół przednich i tylnych

$$k_{11} = 350000 \left[ \frac{N}{m} \right] \quad k_{12} = 400000 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

- współczynniki sztywności zawieszenia mostu przedniego i tylnego

$$k_{21} = 75000 \left[ \frac{N}{m} \right] \quad k_{22} = 65000 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

- rozstaw kół z uwzględnieniem środka masy nadwozia wraz z wyrzutnią

$$a = 1,14 [m] \quad b = 1,28 [m] \quad l = 2,42 [m]$$

## 2. ORTOGONALNOŚĆ POSTACI DRGAŃ WŁASNYCH

Kryterium zastosowania współrzędnych głównych do analizy ruchu układu jest uzależnione od spełnienia warunków ortogonalności postaci drgań własnych [1, 2, 7, 8, 11, 13].

Aby sprawdzić to kryterium, zostały wyprowadzone warunki ortogonalności. W tym celu wykorzystano cztery równania algebraiczne, które zostały wyprowadzone na podstawie równań ruchu układu (1) dla każdej z czterech częstotliwości.

Równania algebraiczne, na podstawie których wyprowadzamy warunki ortogonalności postaci drgań własnych (2).

$$\begin{aligned} (k_{21} + k_{22} - m\omega_{0i}^2)\mu_{1i} + (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{2i} - k_{21}\mu_{3i} - k_{22}\mu_{4i} &= 0 \\ (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{1i} + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2 - I\omega_{0i}^2)\mu_{2i} - k_{21}a\mu_{3i} + k_{22}b\mu_{4i} &= 0 \\ -k_{21}\mu_{1i} - k_{21}a\mu_{2i} + (k_{11} + k_{21} - m_{11}\omega_{0i}^2)\mu_{3i} &= 0 \\ -k_{22}\mu_{1i} + k_{22}b\mu_{2i} + (k_{12} + k_{22} - m_{12}\omega_{0i}^2)\mu_{4i} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$$i = 1, 2, 3, 4$$

dla pierwszej postaci drgań własnych:

$$\omega_{01} = 8,0633731 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\mu_{11} = 1 \quad \mu_{21} = 1,2988344 \quad \mu_{31} = 0,4454664 \quad \mu_{41} = -0,0946873$$

dla drugiej postaci drgań własnych:

$$\omega_{02} = 8,1365435 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\mu_{12} = 1 \quad \mu_{22} = -0,5231057 \quad \mu_{32} = 0,0725104 \quad \mu_{42} = 0,2387174$$

dla trzeciej postaci drgań własnych:

$$\omega_{03} = 54,523538 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\mu_{13} = 1 \quad \mu_{23} = -0,8695898 \quad \mu_{33} = 0,0072983 \quad \mu_{43} = -79,294773$$

dla czwartej postaci drgań własnych:

$$\omega_{04} = 61,443545 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\mu_{14} = 1 \quad \mu_{24} = 0,7742938 \quad \mu_{34} = -87,706333 \quad \mu_{44} = -0,0045313$$

Po wprowadzeniu zależności

$$\omega_{0v}, \mu_{1v}, \mu_{2v}, \mu_{3v}, \mu_{4v} \quad \text{gdzie: } v = 1, 2, 3, 4.$$

i przeprowadzeniu kilku przekształceń otrzymujemy warunki ortogonalności (3) w postaci:

$$\begin{aligned}
 m \mu_{1i}\mu_{1v} + I\mu_{2i}\mu_{2v} + m_{11}\mu_{3i}\mu_{3v} + m_{12}\mu_{4i}\mu_{4v} &= 0 \quad \text{dla } i \neq v \\
 m \mu_{1i}\mu_{1v} + I\mu_{2i}\mu_{2v} + m_{11}\mu_{3i}\mu_{3v} + m_{12}\mu_{4i}\mu_{4v} &\neq 0 \quad \text{dla } i = v \\
 (k_{21} + k_{22})\mu_{1i}\mu_{1v} + (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{2i}\mu_{1v} - k_{21}\mu_{3i}\mu_{1v} - k_{22}\mu_{4i}\mu_{1v} + \\
 + (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{1i}\mu_{2v} + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{2i}\mu_{2v} - k_{21}a\mu_{3i}\mu_{2v} + k_{22}b\mu_{4i}\mu_{2v} + \\
 - k_{21}\mu_{1i}\mu_{3v} - k_{21}a\mu_{2i}\mu_{3v} + (k_{11} + k_{21})\mu_{31}\mu_{3v} + \\
 - k_{22}\mu_{1i}\mu_{4v} + k_{22}b\mu_{2i}\mu_{4v} + (k_{12} + k_{22})\mu_{41}\mu_{4v} &= 0 \quad \text{dla } i \neq v \\
 (k_{21} + k_{22})\mu_{1i}\mu_{1v} + (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{2i}\mu_{1v} - k_{21}\mu_{3i}\mu_{1v} - k_{22}\mu_{4i}\mu_{1v} + \\
 + (k_{21}a - k_{22}b)\mu_{1i}\mu_{2v} + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{2i}\mu_{2v} - k_{21}a\mu_{3i}\mu_{2v} + k_{22}b\mu_{4i}\mu_{2v} + \\
 - k_{21}\mu_{1i}\mu_{3v} - k_{21}a\mu_{2i}\mu_{3v} + (k_{11} + k_{21})\mu_{31}\mu_{3v} + \\
 - k_{22}\mu_{1i}\mu_{4v} + k_{22}b\mu_{2i}\mu_{4v} + (k_{12} + k_{22})\mu_{41}\mu_{4v} &\neq 0 \quad \text{dla } i = v
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dla  $i \neq v$  otrzymujemy sześć wariantów:

$$\begin{array}{lll}
 i = 1, v = 2 & i = 1, v = 3 & i = 1, v = 3 \\
 i = 2, v = 3 & i = 2, v = 4 & i = 3, v = 4
 \end{array}$$

Dla  $i = v$  otrzymujemy cztery warianty:

$$\begin{array}{ll}
 i = 1, v = 1 & i = 2, v = 2 \\
 i = 3, v = 3 & i = 4, v = 4
 \end{array}$$

Po sprawdzeniu wszystkich wariantów otrzymano wniosek, że warunki ortogonalności postaci drgań własnych dla sformułowanego modelu zostały spełnione. Oznacza to możliwość zastosowania w rozważaniach współrzędnych głównych [1, 11].

### 3. WSPÓLRZĘDNE GŁÓWNE

Współrzędne główne przyjmujemy tak, aby spełniały równania (4).

$$\begin{aligned}
 y &= \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \mu_{13}x_3 + \mu_{14}x_4 \\
 \vartheta &= \mu_{21}x_1 + \mu_{22}x_2 + \mu_{23}x_3 + \mu_{24}x_4 \\
 y_{11} &= \mu_{31}x_1 + \mu_{32}x_2 + \mu_{33}x_3 + \mu_{34}x_4 \\
 y_{12} &= \mu_{41}x_1 + \mu_{42}x_2 + \mu_{43}x_3 + \mu_{44}x_4
 \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$x_1, x_2, x_3, x_4$  – współrzędne główne

Po wykorzystaniu zależności (1) i (4) oraz przeprowadzeniu kilku przekształceń otrzymujemy równania opisujące drgania własne układu we współrzędnych głównych (5).

$$\begin{aligned} & (m\mu_{11}^2 + I\mu_{21}^2 + m_{11}\mu_{31}^2 + m_{12}\mu_{41}^2)\ddot{x}_1 + [(k_{21} + k_{22})\mu_{11}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{21}^2 + \\ & + (k_{11} + k_{21})\mu_{31}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{41}^2 + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{11}\mu_{21} - 2k_{21}\mu_{11}\mu_{31} + \\ & - 2k_{22}\mu_{11}\mu_{41} - 2k_{21}a\mu_{21}\mu_{31} + 2k_{22}b\mu_{21}\mu_{41}]x_1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (m\mu_{12}^2 + I\mu_{22}^2 + m_{11}\mu_{32}^2 + m_{12}\mu_{42}^2)\ddot{x}_2 + [(k_{21} + k_{22})\mu_{12}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{22}^2 + \\ & + (k_{11} + k_{21})\mu_{32}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{42}^2 + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{12}\mu_{22} - 2k_{21}\mu_{12}\mu_{32} + \\ & - 2k_{22}\mu_{12}\mu_{42} - 2k_{21}a\mu_{22}\mu_{32} + 2k_{22}b\mu_{22}\mu_{42}]x_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m\mu_{13}^2 + I\mu_{23}^2 + m_{11}\mu_{33}^2 + m_{12}\mu_{43}^2)\ddot{x}_3 + [(k_{21} + k_{22})\mu_{13}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{23}^2 + \\ & + (k_{11} + k_{21})\mu_{33}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{43}^2 + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{13}\mu_{23} - 2k_{21}\mu_{13}\mu_{33} + \\ & - 2k_{22}\mu_{13}\mu_{43} - 2k_{21}a\mu_{23}\mu_{33} + 2k_{22}b\mu_{23}\mu_{43}]x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m\mu_{14}^2 + I\mu_{24}^2 + m_{11}\mu_{34}^2 + m_{12}\mu_{44}^2)\ddot{x}_4 + [(k_{21} + k_{22})\mu_{14}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{24}^2 + \\ & + (k_{11} + k_{21})\mu_{34}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{44}^2 + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{14}\mu_{24} - 2k_{21}\mu_{14}\mu_{34} + \\ & - 2k_{22}\mu_{14}\mu_{44} - 2k_{21}a\mu_{24}\mu_{34} + 2k_{22}b\mu_{24}\mu_{44}]x_4 = 0 \end{aligned}$$

Rozwiązujemy zagadnienie Cauchy'ego. Całki szczególne równań różniczkowych (5) mają postać (6):

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_{01}t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_{12} \sin(\omega_{02}t + \alpha_2) \\ x_3 &= A_{13} \sin(\omega_{03}t + \alpha_3) \\ x_4 &= A_{14} \sin(\omega_{04}t + \alpha_4) \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_{1*} &= (k_{21} + k_{22})\mu_{11}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{21}^2 + (k_{11} + k_{21})\mu_{31}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{41}^2 + \\ & + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{11}\mu_{21} - 2k_{21}\mu_{11}\mu_{31} - 2k_{22}\mu_{11}\mu_{41} - 2k_{21}a\mu_{21}\mu_{31} + \\ & + 2k_{22}b\mu_{21}\mu_{41} \end{aligned}$$

$$m_{1*} = m\mu_{11}^2 + I\mu_{21}^2 + m_{11}\mu_{31}^2 + m_{12}\mu_{41}^2$$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_{1*}}{m_{1*}}} \quad A_{11} = \sqrt{x_{10}^2 + \left(\frac{\dot{x}_{10}}{\omega_{01}}\right)^2} \quad \alpha_1 = \arctg\left(\frac{\omega_{01}x_{10}}{\dot{x}_{10}}\right)$$

$$\begin{aligned} k_{2*} &= (k_{21} + k_{22})\mu_{12}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{22}^2 + (k_{11} + k_{21})\mu_{32}^2 + \\ & + (k_{12} + k_{22})\mu_{42}^2 + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{12}\mu_{22} - 2k_{21}\mu_{12}\mu_{32} - 2k_{22}\mu_{12}\mu_{42} + \\ & - 2k_{21}a\mu_{22}\mu_{32} + 2k_{22}b\mu_{22}\mu_{42} \end{aligned}$$

$$m_{2*} = m\mu_{12}^2 + I\mu_{22}^2 + m_{11}\mu_{32}^2 + m_{12}\mu_{42}^2$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_{2*}}{m_{2*}}} \quad A_{12} = \sqrt{x_{20}^2 + \left(\frac{\dot{x}_{20}}{\omega_{02}}\right)^2} \quad \alpha_2 = \arctg\left(\frac{\omega_{02}x_{20}}{\dot{x}_{20}}\right)$$

$$k_{3*} = (k_{21} + k_{22})\mu_{13}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{23}^2 + (k_{11} + k_{21})\mu_{33}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{43}^2 + \\ + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{13}\mu_{23} - 2k_{21}\mu_{13}\mu_{33} - 2k_{22}\mu_{13}\mu_{43} - 2k_{21}a\mu_{23}\mu_{33} + \\ + 2k_{22}b\mu_{23}\mu_{43}$$

$$m_{3*} = m\mu_{13}^2 + I\mu_{23}^2 + m_{11}\mu_{33}^2 + m_{12}\mu_{43}^2$$

$$\omega_{03} = \sqrt{\frac{k_{3*}}{m_{3*}}} \quad A_{13} = \sqrt{x_{30}^2 + \left(\frac{\dot{x}_{30}}{\omega_{03}}\right)^2} \quad \alpha_3 = \arctg\left(\frac{\omega_{03}x_{30}}{\dot{x}_{30}}\right)$$

$$k_{4*} = (k_{21} + k_{22})\mu_{14}^2 + (k_{21}a^2 + k_{22}b^2)\mu_{24}^2 + (k_{11} + k_{21})\mu_{34}^2 + (k_{12} + k_{22})\mu_{44}^2 + \\ + 2(k_{21}a - k_{22}b)\mu_{14}\mu_{24} - 2k_{21}\mu_{14}\mu_{34} - 2k_{22}\mu_{14}\mu_{44} - 2k_{21}a\mu_{24}\mu_{34} + \\ + 2k_{22}b\mu_{24}\mu_{44}$$

$$m_{4*} = m\mu_{14}^2 + I\mu_{24}^2 + m_{11}\mu_{34}^2 + m_{12}\mu_{44}^2$$

$$\omega_{04} = \sqrt{\frac{k_{4*}}{m_{4*}}} \quad A_{14} = \sqrt{x_{40}^2 + \left(\frac{\dot{x}_{40}}{\omega_{04}}\right)^2} \quad \alpha_4 = \arctg\left(\frac{\omega_{04}x_{40}}{\dot{x}_{40}}\right)$$

Warunki początkowe dla współrzędnych głównych wyznaczamy z równań (7) i (8).

$$\begin{aligned} \mu_{11}x_{10} + \mu_{12}x_{20} + \mu_{13}x_{30} + \mu_{14}x_{40} &= y_0 \\ \mu_{21}x_{10} + \mu_{22}x_{20} + \mu_{23}x_{30} + \mu_{24}x_{40} &= \vartheta_0 \\ \mu_{31}x_{10} + \mu_{32}x_{20} + \mu_{33}x_{30} + \mu_{34}x_{40} &= y_{11}^0 \\ \mu_{41}x_{10} + \mu_{42}x_{20} + \mu_{43}x_{30} + \mu_{44}x_{40} &= y_{12}^0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu_{11}\dot{x}_{10} + \mu_{12}\dot{x}_{20} + \mu_{13}\dot{x}_{30} + \mu_{14}\dot{x}_{40} &= \dot{y}_0 \\ \mu_{21}\dot{x}_{10} + \mu_{22}\dot{x}_{20} + \mu_{23}\dot{x}_{30} + \mu_{24}\dot{x}_{40} &= \dot{\vartheta}_0 \\ \mu_{31}\dot{x}_{10} + \mu_{32}\dot{x}_{20} + \mu_{33}\dot{x}_{30} + \mu_{34}\dot{x}_{40} &= \dot{y}_{11}^0 \\ \mu_{41}\dot{x}_{10} + \mu_{42}\dot{x}_{20} + \mu_{43}\dot{x}_{30} + \mu_{44}\dot{x}_{40} &= \dot{y}_{12}^0 \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}, \dot{x}_{40}$  – warunki początkowe dla współrzędnych głównych,

$y_0, \vartheta_0, y_{11}^0, y_{12}^0, \dot{y}_0, \dot{\vartheta}_0, \dot{y}_{11}^0, \dot{y}_{12}^0$  – warunki początkowe dla współrzędnych niezależnych.

Po wykorzystaniu zależności (4), (6), (7) i (8) otrzymujemy równania opisujące drgania własne układu we współrzędnych niezależnych z uwzględnieniem wartości i wektorów własnych (9).

$$\begin{aligned}
 y &= \mu_{11}A_{11} \sin(\omega_{01}t + \alpha_1) + \mu_{12}A_{12} \sin(\omega_{02}t + \alpha_2) + \\
 &\quad + \mu_{13}A_{13} \sin(\omega_{03}t + \alpha_3) + \mu_{14}A_{14} \sin(\omega_{04}t + \alpha_4) \\
 \vartheta &= \mu_{21}A_{11} \sin(\omega_{01}t + \alpha_1) + \mu_{22}A_{12} \sin(\omega_{02}t + \alpha_2) + \\
 &\quad + \mu_{23}A_{13} \sin(\omega_{03}t + \alpha_3) + \mu_{24}A_{14} \sin(\omega_{04}t + \alpha_4) \\
 y_{11} &= \mu_{31}A_{11} \sin(\omega_{01}t + \alpha_1) + \mu_{32}A_{12} \sin(\omega_{02}t + \alpha_2) + \\
 &\quad + \mu_{33}A_{13} \sin(\omega_{03}t + \alpha_3) + \mu_{34}A_{14} \sin(\omega_{04}t + \alpha_4) \\
 y_{12} &= \mu_{41}A_{11} \sin(\omega_{01}t + \alpha_1) + \mu_{42}A_{12} \sin(\omega_{02}t + \alpha_2) + \\
 &\quad + \mu_{43}A_{13} \sin(\omega_{03}t + \alpha_3) + \mu_{44}A_{14} \sin(\omega_{04}t + \alpha_4)
 \end{aligned} \tag{9}$$

#### 4. WYBRANE WYNIKI PRZEPROWADZONYCH OBLICZEŃ

Obliczenia wykonujemy dla następujących warunków początkowych:

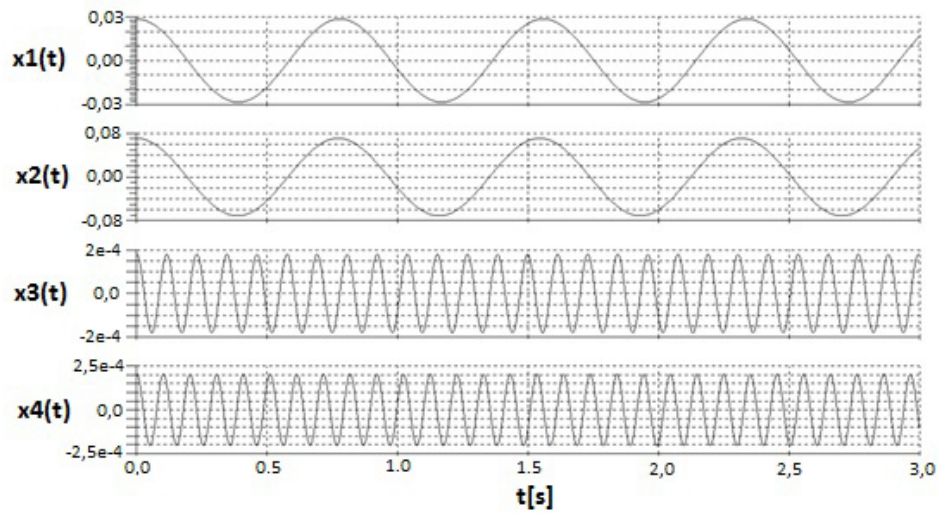
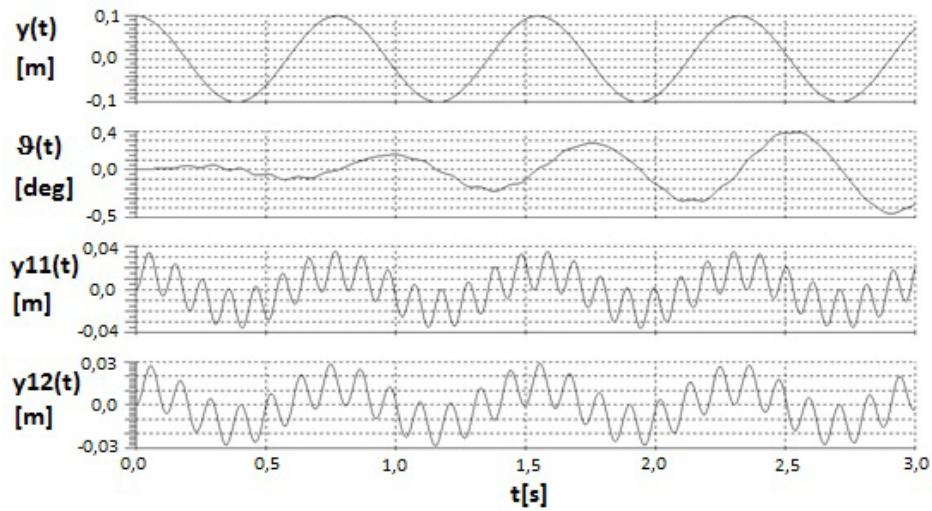
$$\begin{aligned}
 y_0 = 0.1 \quad \vartheta_0 = 0 \quad y_{11}^0 = 0 \quad y_{12}^0 = 0 \\
 \dot{y}_0 = 0 \quad \dot{\vartheta}_0 = 0 \quad \dot{y}_{11}^0 = 0 \quad \dot{y}_{12}^0 = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

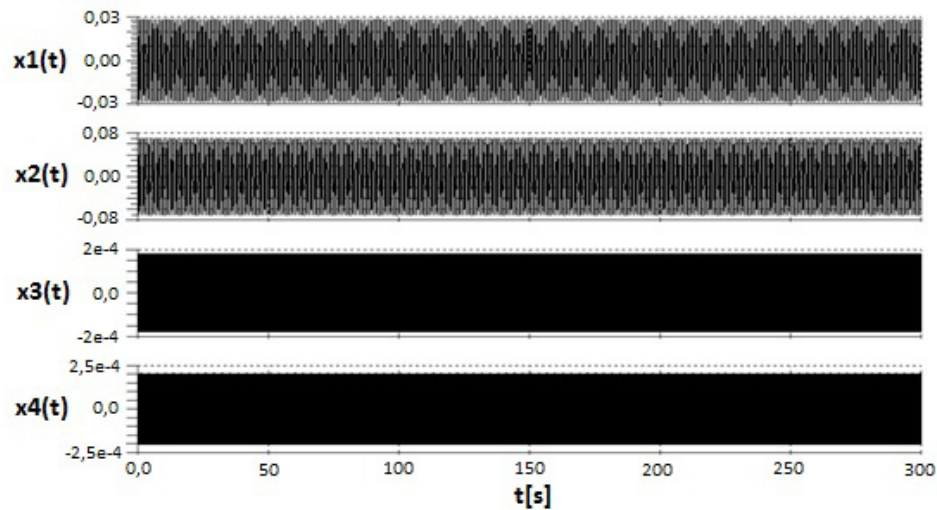
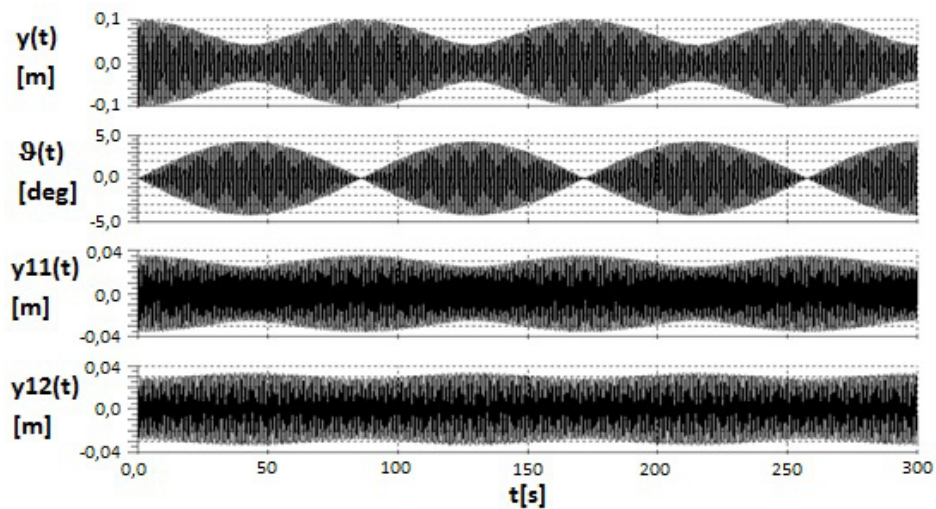
Warunki początkowe dla współrzędnych głównych wyznaczamy z równań (7), (8) oraz zależności (10). Otrzymujemy następujące wartości (11).

$$\begin{aligned}
 x_{10} = 0,0286004 \quad x_{20} = 0,0710160 \quad x_{30} = 0,0001796 \quad x_{40} = 0,0002040 \\
 \dot{x}_{10} = 0 \quad \dot{x}_{20} = 0 \quad \dot{x}_{30} = 0 \quad \dot{x}_{40} = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Na rysunkach 2 i 4 przedstawione są przebiegi zmienności współrzędnych głównych, a na rysunkach 3 i 5 przebiegi zmienności współrzędnych niezależnych dla drgań trwających odpowiednio  $t = 3[s]$  oraz  $t = 300[s]$ .



Rys. 2. Przebiegi zmienności współrzędnych głównych dla  $t = 3[s]$ Fig. 2. Variability courses of main coordinates for  $t = 3[s]$ Rys. 3. Przebiegi zmienności współrzędnych niezależnych dla  $t = 3[s]$ Fig. 3. Variability courses of independent coordinates for  $t = 3[s]$

Rys. 4. Przebiegi zmienności współrzędnych głównych dla  $t = 300[s]$ Fig. 4. Variability courses of main coordinates for  $t = 300[s]$ Rys. 5. Przebiegi zmienności współrzędnych niezależnych dla  $t = 300[s]$ Fig. 5. Variability courses of independent coordinates for  $t = 300[s]$ 

Z przebiegu zmienności przyjętych współrzędnych wynika, że w układzie generują się sygnały o zbliżonych częstotliwościach. Oznacza to występowanie zjawiska dudnienia. Częstotliwość zarejestrowanej obwiedni sygnałów wynosi:

$$\omega_{0d} = 0,0731704 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Występowanie tego zjawiska może negatywnie wpływać na warunki startu rakiet.

## 5. WNIOSKI

Wyznaczono przebiegi zmienności współrzędnych głównych i współrzędnych niezależnych charakteryzujących odpowiedź samobieżnego zestawu raketowego na możliwe zaburzenia. Stwierdzono możliwość wystąpienia w rozpatrywanym układzie zjawiska dudnienia. W celu korekty charakterystyki dynamicznej badanego układu należy zmienić rozkład i wartości parametrów samobieżnego zestawu raketowego.

W badaniach empirycznych rozpatrywanego układu, wykonanych przy użyciu szybkiej kamery cyfrowej, stwierdzono występowanie wyjątkowo dużych, niekorzystnych przemieszczeń. W związku z tym zainteresowano się wyznaczeniem podstawowych charakterystyk dynamicznych, które są najbardziej syntetycznymi wielkościami opisującymi układ drgający. Przebieg zjawisk drganiowych występujących przy różnych wymuszeniach w dużym stopniu zależy od tych charakterystyk. Znając je, można w sposób celowy zaprojektować badany układ.

## LITERATURA

- [1] Arczewski Krzysztof, Józef Pietrucha, Jan Tomasz Szuster. 2008. *Drgania układów fizycznych*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [2] De Silva Clarence W. 2007. *Vibration Fundamentals and Practice*. London – New York: Taylor & Francis Group.
- [3] Dziopa Zbigniew. 2004. „The dynamics of a rocket launcher placed on a self-propelled vehicle”. *Mechanical Engineering* 3 (81) : 23-30.
- [4] Dziopa Zbigniew, Zbigniew Koruba, Izabela Krzysztofik. 2010. „An analysis of the dynamics of a launcher – missile system on a moveable base”. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Technical Sciences*, 58 (4) : 645-650.
- [5] Dziopa Zbigniew, Zbigniew Koruba, Izabela Krzysztofik. 2010. „Dynamics of a Controlled Anti-Aircraft Missile Launcher Mounted on a Moveable Base”. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 48 (2) : 279-295.
- [6] Dziopa Zbigniew. 2011. Dynamic elements of a motor vehicle which is a carrier of the anti-aircraft missile launcher. In *Selected problems of modeling and control in mechanics*, 19-31. Kielce University of Technology.

- [7] Dziopa Zbigniew, Maciej Nyckowski. 2015. „Wpływ dyssypacji energii w układzie wyrzutnia-samochód na warunki startu rakiety niesterowanej”. *Problemy mechatroniki. Uzbrojenie, lotnictwo, inżynieria bezpieczeństwa* 6 (4) : 55-68.
- [8] Dźygadło Zbigniew, Sylwester Kaliski, Lech Solarz, Edward Włodarczyk. 1966. *Drgania i fale w ciałach stałych*. Warszawa: PWN.
- [9] Genta Giancarlo, 1997. *Motor Vehicle Dynamics, Modeling and Simulation*. Singapore: World Scientific Publishing.
- [10] Gantmacher Feliks Ruvimovich 1970. *Lectures in Analytical Mechanics*. (translated from the Russian) Moscow: Mir Publishers.
- [11] Osiecki Jan, Zbigniew Koruba. 2007. *Elementy mechaniki zaawansowanej*. Kielce: Politechnika Świętokrzyska.
- [12] Светлицкий Валерий Александрович 1963. *Динамика старта летательных аппаратов*. Москва: Наука.
- [13] Суслов Гавриил Константинович 1946. *Теоретическая механика*. Москва-Ленинград: Гостехиздат.
- [14] Ziemia Stefan. 1959. *Analiza drgań*, tom I i II. Warszawa: PWN.

## **An Analysis of Proper Vibrations of the Missile Launcher – Motor Vehicle Assembly Using the Main Coordinates**

Zbigniew DZIOPA, Maciej NYCKOWSKI

**Abstract.** The study examined an assembly composed of a motor vehicle with a launcher of unguided missiles mounted on it. A real self-propelled missile assembly was used to develop a physical model, and then Lagrange equations of the second type were applied in order to implement a mathematical model. The characteristic values and eigenvectors were determined on the basis of the equations describing the autonomous and conservative motion of the system. The main coordinates were introduced and the orthogonality conditions of the proper vibrations forms were checked with the designated dynamic characteristics of the analyzed system. Then the independent equations of vibrations of the missile launcher-motor vehicle assembly were determined taking into consideration the characteristic values and eigenvectors. To conclude, an analysis of vibrations of the considered system was conducted.

**Keywords:** mechanics, missile launcher, armoured fighting vehicle, main coordinates