MINUT 2023 (5), s. 251–255
ISSN 2719-3063

Piotr GAWRON[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Kłamię

Streszczenie. Podajemy przykłady paradoksów z różnych epok, poczynając od starożytnego paradoksu kłamcy do paradoksów Russella.
Słowa kluczowe: paradoks, logika matematyczna

1. Wstęp

Ludzie od czasów, gdy zaczęli myśleć abstrakcyjne, natrafiali na problemy trudne do rozwiązania — niektóre z nich wydawały się być nierozwiązywalnymi, prowadzącymi do sprzeczności, niezgodnymi z doświadczeniem życiowym. Starożytni Grecy nazywali je paradoksami. Słowo *paradoks*, pochodzące z greki, oznacza *nieoczekiwany, nieprawdopodobny, zadziwiający* [5]. Najstarszy znany paradoks to paradoks kłamcy. W uproszczonej wersji brzmi: „Kłamię". Prosimy czytelnika o ocenę prawdziwości tej wypowiedzi.

Przedstawimy dalej różne paradoksy pojawiające się wraz z rozwojem nauki i opiszemy próby ich objaśnienia. Paradoksy bardzo często stymulowały naukę do dalszego rozwoju, do tworzenia nowych teorii czy wymogów precyzyjnych definicji i aksjomatów, a niekiedy okazywały się być łatwiejsze do objaśnienia przy użyciu nowych narzędzi naukowych. Paradoksy prowadzące do sprzeczności (z reguły — pozornej) nazywamy też *antynomiami.* W niniejszej pracy wybraliśmy tylko kilka znaczących historycznie przykładów, kierując się subiektywnymi preferencjami autora. Wiele innych paradoksów można znaleźć w [1].

2. Paradoks kłamcy

Twórcą tego paradoksu jest Epimenides z Krety, żyjący na przełomie VII i VI w. p.n.e., jeden z pierwszych znanych greckich filozofów i poetów. Znany jest jego cytat *Kreteńczycy zawsze kłamcy, wstrętne bestie, brzuchy bezczynne* [6]. Należy pamiętać, że sam Epimenides był Kreteńczykiem, i mimo że powyższy cytat można traktować w kategorii obelgi, posłużył on do rozważań nad jego prawdziwością logiczną.

Zainspirowało to innego filozofa greckiego Eubulidesa z Miletu (ok. IV w. p.n.e.) do sformułowania paradoksu w wersji prostszej: *Teraz kłamię. Czy powiedziałem prawdę czy fałsz?* [12]. Rozważmy to zdanie,

Autor korespondencyjny: P. Gawron piotr.gawron@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 20.09.2023.

skracając je do tytułowego *kłamię*. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, to znaczy, że kłamię, a zatem zdanie jest fałszywe. Doszliśmy do sprzeczności i — w standardowym rozumowaniu — kończymy rozważania. Jednak popatrzmy jeszcze dalej: jeśli zdanie „kłamię" jest fałszywe, oznacza to, że mówię prawdę. Każda interpretacja logiczna prowadzi do sprzeczności, co znaczy, że stajemy przed nierozwiązanym problemem logiki.

Paradoks kłamcy mimo bardzo prostej konstrukcji okazał się być nadzwyczaj trudnym do rozwiązania. Dopiero w 1933 roku polski logik Alfred Tarski zaproponował jego rozwiązanie: [8], [9]. W pracach o rozumieniu prawdy wykluczył możliwość używania zdań mówiących o samych sobie, wprowadzając dwa poziomy języka: język rzeczywisty (przedmiotowy, opisujący rzeczywistość) i metajęzyk (opisujący język rzeczywisty). W tym sensie zdanie *kłamię* jest zdaniem z metajęzyka próbującym opisać rzeczywistość, czyli niepoprawnym, bez wartości logicznej. Przykładem prawidłowego użycia jest metajęzykowy zwrot: *Zdanie „kłamię" jest prawdziwe*, stwierdzający prawdziwość zdania w języku rzeczywistym — to znaczy kłamstwo osoby je wypowiadającej. Oczywiście, dopuszczalny jest zwrot: *Zdanie „kłamię" jest fałszywe*, oceniający prawdomówność osoby je wypowiadającej.

Rozwiązanie Tarskiego jest dość powszechnie przyjęte przez matematyków, natomiast wśród filozofów toczą się dalej dyskusje na temat innych możliwości [11], [7], [10].

Paradoksowi kłamcy poświęciliśmy tutaj wiele miejsca, ponieważ jest najbardziej znany, a przy tym był i jest przedmiotem licznych kontrowersji.

3. Paradoks Eulera

Leonhard Euler, XVIII-wieczny matematyk, był jednym z twórców nowoczesnej matematyki. W młodym wieku zainteresował się problemem zbieżności szeregu

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{1}$$

o wyrazie ogólnym $(-1)^{n+1}$ [4]. Grupując parami wyrazy szeregu, otrzymał

$$(1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$$

, a z drugiej strony —

$$1 - (1-1) - (1-1) + \dots = 1 - 0 - 0 - \dots = 1.$$

Który wynik jest poprawny? Jednocześnie jeśli oznaczamy sumę naszego szeregu przez σ, otrzymujemy

$$\sigma = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - \sigma.$$

Wynika z tego równanie

$$\sigma = 1 - \sigma, \text{ czyli } \sigma = 1/2.$$

Zatem uzyskaliśmy tutaj trzeci rezultat.

De facto tym samym zagadnieniem niemal 30 lat wcześniej zajmował się niezbyt znany matematyk włoski Guido Grandi, który doszedł w podobny sposób do tego samego wyniku, potwierdzając go dodatkowo obliczeniem sumy szeregu geometrycznego o ilorazie -1. Niekiedy szereg $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ jest nazywany szeregiem Grandiego.

W rzeczywistości nie mamy tutaj żadnego paradoksu — po prostu szereg (1) nie jest zbieżny, co jest konsekwencją warunku koniecznego zbieżności szeregu: *Jeżeli szereg jest zbieżny, to jego wyraz ogólny dąży do* 0. Oczywiście ciąg $(-1)^{n+1}$ nie dąży do 0.

Za tego typu rozważania nie ma powodu ganić młodego Eulera, który później wniósł potężny wkład w rozwój teorii szeregów, dochodząc do wielu wspaniałych wzorów [4].

Jako ciekawostkę można wspomnieć, że prowadzone są badania nad sumowaniem (w niestandardowy sposób) szeregów rozbieżnych, a niektóre rezultaty są używane w fizyce.

4. Paradoks petersburski

Rozpatrzmy następującą grę losową: rzucamy w kasynie monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeżeli orzeł wypadnie za n-tym rzutem, krupier wypłaca nam 2^n złotych.

Zastanówmy się, ile można zainwestować w wejście do gry? Jak się domyślamy, powinniśmy obliczyć wartość oczekiwaną wygranej i — w zależności od naszej skłonności do ryzyka — podjąć decyzję.

Możliwe rezultaty w grze tworzą ciąg nieskończony, który zapiszemy w poniższej tabeli — wraz z prawdopodobieństwem p_n uzyskania odpowiedniego rezultatu w n-tej próbie i wartością wygranej w_n.

rezultat w grze	O	RO	RRO	RRRO	...
prawdopodobieństwo rezultatu p_n	1/2	1/4	1/8	1/16	...
wartość wygranej w_n	2	4	8	16	...
$p_n \times w_n$	1	1	1	1	...

Ostatni wiersz tabeli posłuży nam do obliczenia wartości oczekiwanej wygranej W w całej grze.

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \times w_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Wartość oczekiwana wygranej przy wielu próbach dąży do nieskończoności. Czy zatem można ryzykować i postawić dowolną kwotę, aby wejść do gry? Rozsądek powinien podpowiedzieć, że nie warto. Niżej wyjaśnimy dlaczego.

Przedstawiony problem jest bardzo uproszczoną wersją *paradoksu petersburskiego*, stworzonego przez Nicolasa Bernoulliego (1687-1759) i badanego przez jego kuzyna Daniela Bernoulliego (1700-1782), profesora matematyki w Petersburgu [2].

Najprostsze rozwiązanie paradoksu otrzymamy, jeśli zastanowimy się nad wypłacalnością kasyna: wypłata nawet dla stosunkowo niedużych n jest wysoka — na przykład dla $n = 64$ uzyskamy kwotę $2^6 4$ (ponad 18 trylionów), znaną z opowieści o szachach [13], której na pewno żadne kasyno nie jest w stanie wypłacić. Wartość oczekiwana musi być zatem dopasowana do realiów i, przykładowo, dla maksymalnej wygranej $2^{10} = 1024$ wynosi 10.

Paradoks petersburski zainspirował ekonomistów do badań nad pojęciem użyteczności pieniądza.

5. Paradoks Russella

W roku 1874 niemiecki matematyk Georg Cantor zaczął badania nowego typu obiektów — zbiorów. Teoria zbiorów przyjęła w języku polskim nazwę teorii mnogości. Cantor założył, że dowolny zestaw obiektów może utworzyć zbiór, a zbiory mogą być elementami innych zbiorów. Szczególnie interesowało go badanie zbiorów nieskończonych. Rezultaty, które osiągnął, stały się podstawami współczesnej matematyki i jej języka. Jednak z uwagi na wysoki poziom abstrakcji teoria mnogości nie była aprobowana przez wielu znaczących matematyków XIX wieku (Leopold Kronecker, Henri Poincaré). Problemów z uznaniem teorii mnogości przysporzyły paradoksy:

- paradoks zbioru wszystkich zbiorów — Cantora,
- paradoks liczb porządkowych — Buralego-Fortiego,
- paradoks Russella.

Tutaj zajmiemy się tym ostatnim. W 1901 roku Bertrand Russell [3] badał zbiór składający się ze zbiorów, które nie są swoimi elementami:

$$\mathfrak{R} = \{X : X \notin X\}$$

.

Nazwijmy $\mathfrak{R}$ zbiorem Russella. Postawmy pytanie: *Czy $\mathfrak{R}$ jest swoim elementem?*. Jeżeli $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$, to zgodnie z definicją zbioru Russella $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$, więc otrzymujemy sprzeczność. Zgodnie z zasadami dowodzenia wyciągamy wniosek, że $\mathfrak{R}$ nie jest swoim elementem, $\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}$, lecz oznacza to, że spełniona jest definicja zbioru Russella, czyli $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$. I znów otrzymujemy sprzeczność.

Zwróćmy uwagę na to, że podobne rozumowanie przeprowadziliśmy przy analizie paradoksu kłamcy.

Rozwiązaniem problemu była rezygnacja z założenia, że zbiór może być utworzony z dowolnych obiektów — będącego podstawą, tak zwanej współcześnie, *naiwnej teorii mnogości*. Pomimo że prowadzi ona do paradoksów, przy zachowaniu odpowiedniej ostrożności jest stosowana przez większość matematyków. Paradoksy znikają, gdy wprowadzimy odpowiednie zasady tworzenia zbiorów, przykładowo: teorię typów Russella, aksjomatykę Zermela-Fraenkla (uznawaną za najpopularniejszy standard) czy aksjomatykę Von Neumanna-Bernaysa-Gödla.

6. Paradoks Berry'ego

Jedną z podstawowych własności liczb naturalnych jest zasada minimum: *Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.* Jest ona równoważna zasadzie indukcji matematycznej.

Autorem kolejnego paradoksu jest Bertrand Russell, zainspirowany pomysłem G. Berry'ego, bibliotekarza z Oxfordu. Zachowując ideę Russella, przedstawimy pewną wersję tego paradoksu.

Używając co najwyżej 1000 znaków (liter i cyfr) języka polskiego, możemy zapisać tylko skończoną ilość liczb naturalnych, bo ilość ciągów długości nieprzekraczającej 1000 jest ograniczona. Zatem możemy rozpatrywać zbiór L, czyli *zbiór wszystkich liczb naturalnych, do których zapisu potrzeba co najmniej 1001 znaków.* Ponieważ jest to dopełnienie podzbioru skończonego zbioru liczb naturalnych, zbiór L jest niepusty, czyli — w myśl zasady minimum — ma element najmniejszy: liczbę l. Jednak wówczas powoduje to, że l jest *najmniejszą liczbą naturalną, do której zapisu potrzeba co najmniej 1001 znaków.* Zwróćmy uwagę, że ostatnia fraza definiująca l zawiera mniej niż 1001 znaków, co prowadzi do sprzeczności.

Rozwiązanie paradoksu jest analogiczne do rozwiązania starożytnego paradoksu kłamcy: musimy oddzielić język od metajęzyka [3].

Literatura

1. G. W. Erickson, J. A. Fossa, *Dictionary of paradox*, University Press of America , Lanham, New York, Oxford, 1998
2. J. Golik, *Krótka historia paradoksu petersburskiego i jego wczesnych rozwiązań*, Ogólnopolska Konferencja Studentów Matematyków, Wydział Matematyki i Informatyki UAM, Poznań, 2016, s. 65–76
3. S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand Company, New York, Toronto; 1952
4. M. Kline, *Euler and Infinite Series*, Mathematics Magazine, Vol. 56, No. 5. (1983), pp. 307–314.
5. W. Kopaliński, *Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych z almanachem*, RYTM, Warszawa, 2021
6. P. Lorek, *Epimenides z Krety w kontekście nowotestamentowym (Tt 1,12; Dz 17,28)*, Verbum Vitae, 39/3 (2021), s. 849–863
7. J. Pruś, *Semantyczna teoria prawdy a antynomie semantyczne*, Rocznik Filozoficzny Ignatianum, Vol. 27, No. 1 (2021), s. 341–363
8. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Pisma logiczno–filozoficzne, t. I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995, str. 13–172
9. A. Tarski, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, Pisma logiczno–filozoficzne, t. I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995, s. 228–282
10. J. Wawrzyniak, *Paradoks kłamcy*, Analiza i Egzystencja, 15 (2011), s. 161–179
11. L. Wittgenstein, *Uwagi o podstawach matematyki*, Wydawnictwo KR, Warszawa, 2000
12. `https://www.britannica.com/biography/Eubulides-of-Miletus` [widziane: 20.09.2023]
13. `https://en.wikipedia.org/wiki/Wheat_and_chessboard_problem` [widziane: 20.09.2023]