

Grzegorz MIKOŁAJCZAK*
Jakub PEKSIŃSKI*
Janusz KOWALSKI**

MODYFIKACJE ALGORYTMU UŚREDNIANIA WYKŁADNICZEGO DO USUWANIA ZAKŁÓCENIA ADDYTYWNEGO

W pracy zaproponowano modyfikacje algorytmu wygładzania wykładniczego, które minimalizują określone kryterium przy jednoczesnym zachowaniu struktury pierwotnego sygnału. Oceny przydatności proponowanej metody dokonano wygładzając tłumiony sygnał okresowy, zakłócony szumem addytywnym o rozkładzie normalnym.

SŁOWA KLUCZOWE: filtry cyfrowe, wygładzanie wykładnicze, wygładzanie sygnałów

1. WSTĘP

Wygładzanie jest jedną z metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, polegającą na estymacji wartości sygnałów w ustalonych chwilach na podstawie zarówno poprzednich, jak i następnych obserwacji. W praktyce jest to zastąpienie wyrazów danego szeregu, mającego przebieg nieregularny, innym o przebiegu gładszym, o którym można przypuszczać, że lepiej reprezentuje istotę zjawiska niż szereg pierwotny. Model wyrównania wykładniczego stanowi jeden z klasycznych już modeli wygładzania sygnałów opracowany przez R. G. Browna [1]. W modelu wyrównania wykładniczego ocenę sygnału y_t w czasie t można przedstawić jako średnią ważoną wartości sygnału z okresu poprzedniego y_{t-1} oraz najnowszej obserwacji x_t . Wartości ocen sygnału wyznacza się za pomocą następującej relacji:

$$y_t = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot y_{t-1} \quad t = 1, \dots, n \quad (1)$$

przy czym $y_0 = x_0$, a zatem początkowa ocena sygnału to wartość najwcześniejszej chronologicznie obserwacji x_t . Parametr $\alpha \in (0, 1)$ jest nazywany stałą wygładzania. W zależności od wielkości parametru większe znaczenie mają obserwacje bieżące lub poprzednie. Wartości parametru bliskie jedności oznaczają, że większy udział mają obserwacje najnowsze, natomiast wartości bliskie zera oznaczają, że większą wagę mają obserwacje okresu poprzedniego. Wartość parametru α ustala się zwykle metodą doświadczalną. Za najlepszą uznaje się tę wartość, dla której otrzymuje się największą

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny.

** Pomorski Uniwersytet Medyczny w Szczecinie.

zgodność obserwacji empirycznych szeregu z wartościami teoretycznymi modelu [2]. W publikacji [3] pokazano, że redukcja wariancji szumu dla wykładniczego, dla zakłócenia losowego $\{z_k\}$, o wartości przeciętnej zero $E(z) = 0$ i wariancji $V(z) = \sigma^2$, wyraża się wzorem:

$$\sigma_w^2 = \sigma^2 \cdot \frac{\alpha}{2 - \alpha} \quad (2)$$

gdzie: σ^2 – wariancja szumu wejściowego, σ_w^2 – wariancja szumu po wykładaniu.

Z równania (2) wynika, że w wyniku wykładania wykładniczego następuje redukcja wariancji szumu, której wielkość zależna jest od stałej wykładania α . Im mniejsze staje się α , tym większa jest osiągnięta redukcja szumu. Jednakowoż, im mniejsza jest wartość α , tym wolniej system wykładający odpowiada na zmiany w sygnale wejściowym.

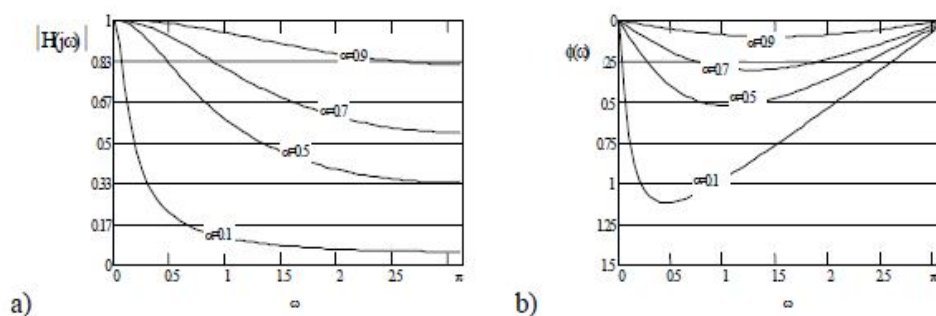
Wykładanie wykładnicze można również interpretować jako jednoogniowy filtr cyfrowy o nieskończonej odpowiedzi impulsowej NOI. Równanie różnicowe opisujące tego typu filtry można zapisać w postaci:

$$y_n = \sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} + \sum_{m=0}^M b_m x_{n-m} \quad (3)$$

Stąd algorytmy wykładania noszą nazwę cyfrowych filtrów wykładających. Możemy zatem określić charakterystykę częstotliwościową takiego filtru [5], którą dla filtru jednoogniowego NOI, współczynniki zależności (1) przyjmują odpowiednio wartości: $M = 0$, $K = 1$, $b_0 = \alpha$ i $a_1 = (1 - \alpha)$, na podstawie czego otrzymujemy charakterystykę częstotliwościową wykładania wykładniczego:

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) \cos(\omega) + j(1 - \alpha) \sin(\omega)} \quad (4)$$

Na podstawie powyższej zależności (4) możemy wykreślić charakterystyki amplitudowe i fazowe, dla różnych wartości parametru wykładania α , w unormowanym zakresie pulsacji $0 \leq \omega \leq \pi$. Jak widać na wykresie charakterystyki amplitudowej (rys. 1) w miarę zmniejszania wartości α , filtr wykładania wykładniczego zachowuje się jak filtr dolnoprzepustowy.



Rys. 1. Charakterystyka filtru wykładającego: a) amplitudowa, b) fazowa [1]

2. PROPOZYCJE MODYFIKACJI

Dany ciąg próbek sygnału $\{x_k\}$ obarczonych addytywnym zakłóceniem losowym $\{n_k\}$, o wartości przeciętnej zero $E(n) = 0$ i wariancji $V(z) = \sigma^2$, chcemy zastąpić nowym ciągiem $\{y_k\}$ tak by wyeliminować szum, jednocześnie zachowując pierwotny sygnał. W tym celu tworzymy funkcjonal (5)-(8), przypominający zależność (1), w którym pierwszy składnik odpowiada za zgodność z sygnałem a drugi za usuwanie zakłócenia według określonego kryterium.

1. Minimalizacja wariancji przy zachowaniu zgodności z pierwotnym ciągiem.

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1-\alpha) \sum_{k=1}^N (y_k - \tilde{y})^2 \quad (5)$$

gdzie:

$$\tilde{y} \approx \tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad \tilde{y} \approx \tilde{x} = \text{med}\{x_k\}, \quad \tilde{y} \approx \tilde{x} = \sqrt[N]{\prod_{k=1}^N x_k}, \quad \tilde{y} \approx \tilde{x} = \frac{N}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{x_k}}$$

2. Minimalizacja pierwszej pochodnej ciągu $\{y_k\}$.

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1-\alpha) \sum_{k=1}^N (y_k - y_{k-1})^2 \quad (6)$$

3. Zgodność wartości ciągu $\{y_k\}$ i pierwszych pochodnych

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1-\alpha) \sum_{k=1}^N [(y_k - y_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})]^2 \quad (7)$$

4. Minimalizacja drugich pochodnych.

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1-\alpha) \sum_{k=1}^N (y_{k+1} - 2 \cdot y_k + y_{k-1})^2 \quad (8)$$

Minimalizując funkcjonal (6) względem y_k , oraz podstawiając za \tilde{y} - średnią arytmetyczną, otrzymujemy następujące wyrażenie :

$$y_k = \alpha \cdot x_k + (1-\alpha) \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (9)$$

Dla przypadku drugiego minimalizując funkcjonal (6) względem y_k otrzymamy wyrażenie:

$$\alpha(y_k - x_k) + (1-\alpha)(2y_k - y_{k+1} - y_{k-1}) = 0 \quad (10)$$

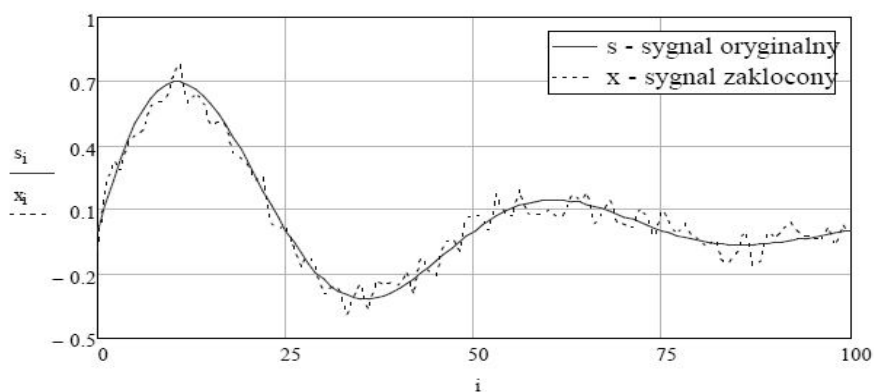
oraz zakładając, że możemy zastąpić wyrażenie $0.5 \cdot (y_{k+1} + y_{k-1}) \approx 0.5 \cdot (x_{k+1} + x_{k-1})$ otrzymamy:

$$y_k = \frac{(1-\alpha) \cdot x_{k+1} + \alpha \cdot x_k + (1-\alpha) \cdot x_{k-1}}{2-\alpha} \quad (11)$$

Podobnie postępujemy w pozostałych przypadkach.

3. WYNIKI TESTÓW

Proponowane metody (9) i (11) poddano testom, polegającym na wygładzaniu ciągu próbek $\{x_k\}$, wygenerowanych na podstawie tłumionego sygnału harmonicznego $\{s_k\}$ (12), przedstawionym na rys. 2, zakłóconych szumem $\{n_k\}$, o rozkładzie normalnym (Gaussa), wartości przeciętnej zero $E(n) = 0$ i wariancji $V(n) = \sigma_n^2$, dla następujących wartości odchylenia standardowego: $\sigma_n = 0.25$, $\sigma_n = 1$, $\sigma_n = 4$.



Rys. 2. Przebieg sygnału oryginalnego $\{s_n\}$ oraz zakłóconego szumem o rozkładzie normalnym $\{x_n\}$

$$x = s + n$$

$$s_k = e^{-\frac{\pi}{K} \cdot k} \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{K} \cdot k\right) \quad k \in (1;100) \quad (12)$$

Oceny przedstawionej metody wygładzania, dokonano stosując kryterium błędu średniokwadratowego MSE (mean square error) zdefiniowanego wzorem:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s_k - y_k)^2 \quad (13)$$

gdzie: s_k - sygnał niezakłócony; y_k - sygnał po filtracji

Wyniki poszczególnych testów zebrano w tabeli 1. Analizując wyniki poszczególnych prób można stwierdzić, że proponowane modyfikacje metody (9) i (11) wygładzania wykładniczego (1) dają mniejszy błąd średniokwadratowy w wielu próbach. Wynika to z faktu, że w proponowanych algorytmach, zachodzi kompromis między zmniejszaniem wariancji zakłócenia, a wiernym odwzorowaniem sygnału niezakłóconego. Uzyskuje się również błąd bardziej niezależny od stałej wygładzania α .

Warto zauważyć, że w przypadku gdy $\alpha = 0$ to dla (9) otrzymamy: $y_k = \tilde{x}$ - co odpowiada minimalnej wariancji szumu na wyjściu filtru. Natomiast dla $\alpha = 1$ to

$y_k = x_k$ - zachodzi maksymalna zgodność ciągu wyjściowego z wejściowym, słuszna dla sygnału nie zaszumionego.

Tabela 1. Wartości błędu średniokwadratowego MSE poszczególnych metod wygładzania dla różnego poziomu zakłócenia w funkcji parametru α

$\alpha \backslash \sigma^2$	Wygładzanie wykładnicze (1)			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla N = 3-punktów			Zmodyfikowane wygładzanie (10)		
	0,25	1	4	0,25	1	4	0,25	1	4
0	0.442	1.932	9.077	0.084	0.335	1.34	0.142	0.567	2.267
0.1	0.055	0.196	0.695	0.085	0.34	1.36	0.124	0.495	1.979
0,2	0.048	0.162	0.628	0.09	0.359	1.434	0.107	0.427	1.707
0,3	0.054	0.183	0.805	0.098	0.391	1.565	0.092	0.366	1.465
0,4	0.065	0.232	1.064	0.11	0.438	1.75	0.08	0.318	1.27
0,5	0.081	0.301	1.38	0.125	0.499	1.992	0.072	0.287	1.148
0,6	0.101	0.388	1.751	0.144	0.573	2.288	0.071	0.285	1.138
0,7	0.127	0.493	2.185	0.166	0.662	2.64	0.081	0.324	1.296
0,8	0.16	0.618	2.69	0.192	0.764	3.048	0.107	0.428	1.713
0,9	0.201	0.766	3.283	0.222	0.88	3.511	0.158	0.632	2.527
1.0	0.253	0.944	3.988	0.254	1.01	4.029	0.248	0.991	3.963

LITERATURA

- [1] R.G. Brown Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. Engelwood Cliffs, New York 1963.
- [2] E.S. Gardner Exponential smoothing the state of art. Journal of Forecasting nr 4 1-28 1985.
- [3] R.A. Witte Averaging Techniques Reduce Test Noise. Improve Accuracy. Microwaves&RF, Feb. 1988.
- [4] J. Purczyński, J. Ayman Porównanie właściwości filtru medianowego i filtru średniej ruchomej. Mat. Konf. ZKwE'2000 s.353-356 Poznań 2000.
- [5] R.G. Lyos Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. WKŁ Warszawa 1999.

MODIFICATION ALGORITHM EXPONENTIAL AVERAGING FOR DISPOSAL OF INTERFERENCE ADDITIVE

The paper proposes modifications to the exponential smoothing algorithm that minimizes the defined sample while maintaining the structure of the original signal. Assess the suitability of the proposed method has been damped periodic signal smoothing, additive noise disturbed the normal distribution.