



Władysław KOC, Katarzyna PALIKOWSKA

OCENA DYNAMICZNA WYBRANYCH SPOSOBÓW ŁĄCZENIA ELEMENTÓW TRASY O ZRÓŻNICOWANEJ KRZYWIZNIE

Streszczenie

Artykuł przedstawia porównanie właściwości dynamicznych kubicznych krzywych C-Bezier i PH krzywych Bezier piątego stopnia na tle krzywej typu K^0 uzyskanej przy zastosowaniu uniwersalnej metody modelowania krzywizny. Właściwości dynamiczne i możliwości zastosowania wymienionych krzywych w projektowaniu dróg kolejowych omówiono na przykładach łączenia krzywą przejścia dwóch łuków kołowych odwrotnych oraz dwóch łuków zgodnych (bez przypadku zawierania się jednego łuku w drugim).

WSTĘP

W ostatnich latach w szeregu publikacji dotyczących krzywych Bezier [1, 2] autorzy przedstawiają nowe sposoby konstruowania tych krzywych oraz sugerują możliwość zastosowania tego rodzaju krzywych w dziedzinie projektowania dróg kołowych i kolejowych. Niniejszy artykuł stanowi próbę oceny możliwości zastosowania proponowanych w pracach [1, 2] krzywych Bezier w projektowaniu układów geometrycznych toru kolejowego. Ocena ta została dokonana na podstawie analizy oddziaływań dynamicznych w układzie tor – pojazd oraz sprawdzenia, czy spełnione są warunki stawiane układom geometrycznym toru [3]. Jako element porównawczy wykorzystano tzw. krzywą typu K^0 , uzyskaną na drodze analitycznej przy zastosowaniu uniwersalnej metody kształtowania krzywizny.

Zastosowany model oraz sposób oceny oddziaływań dynamicznych został przedstawiony w pracach [4, 7]. Zasadniczym elementem analizy oddziaływań dynamicznych jest wyznaczenie wielkości drgań $X(t)$ oraz wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym $X''(t)$ w rejonach, w których występują zmiany poziomej krzywizny toru. W pracy [7] przedstawiono opis metody numerycznej stosowanej do wyznaczenia wielkości drgań $X(t)$ przy założeniu, że czynnikiem wymuszającym drgania poprzeczne pojazdu szynowego są zmiany krzywizny poziomej toru.

Krzywizna parametrycznej krzywej $P(t)$ wyznaczana jest na podstawie formuły:

$$k(t) = \frac{P'(t) \times P''(t)}{\|P'(t)\|^3} \quad (1)$$

Pochodna krzywizny, istotna z punktu widzenia oceny parametrów kinematycznych:

$$k'(t) = \frac{\varphi(t)}{\|\mathbf{P}'(t)\|^5} \quad (2)$$

gdzie:

$$\varphi(t) = \frac{d(\mathbf{P}'(t) \times \mathbf{P}''(t))}{dt} (\mathbf{P}'(t) \cdot \mathbf{P}'(t)) - \frac{3}{2} (\mathbf{P}'(t) \times \mathbf{P}''(t)) \frac{d(\mathbf{P}'(t) \cdot \mathbf{P}'(t))}{dt}$$

$\|\mathbf{a}\|$ – długość wektora, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – iloczyn skalarny wektorów, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – iloczyn wektorowy.

1. KUBICZNE KRZYWE C-BEZIER

W pracy [1] przedstawiono sposób konstruowania kubicznej krzywej C-Bezier (*cubic C-Bezier curve*) łączącej łuki odwrotne (*S-shaped*) i zgodne (*C-shaped*) wraz z warunkami istnienia rozwiązania. Przyjęto następującą postać kubicznej krzywej C-Bezier:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{2}{\pi-2} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{2-\pi}{4-\pi} & \frac{2}{4-\pi} & -1 \\ -1 & \frac{2}{4-\pi} & \frac{2-\pi}{4-\pi} & 0 \\ -1 & \frac{2}{4-\pi} & \frac{-2}{4-\pi} & 1 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-2}{4-\pi} & \frac{\pi-2}{4-\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

zdefiniowaną dla parametru t spełniającego zależność $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Spośród punktów kontrolnych $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^3$ punkty \mathbf{P}_0 i \mathbf{P}_3 styczności krzywej z łukiem odpowiednio pierwszym i drugim (rys. 1 i 2) stanowią węzły krzywej Bezier.

Pierwsza pochodna krzywej (3) wyrażona jest następującą formułą:

$$\mathbf{P}'(t) = \frac{2}{\pi-2} [(1 - \sin t)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + (1 - \cos t)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)] + \frac{2}{4-\pi} (\cos t + \sin t - 1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (4)$$

Druga pochodna krzywej (3) przedstawia się następująco:

$$\mathbf{P}''(t) = \frac{2}{\pi-2} \left[\left(\frac{\pi-2}{4-\pi} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \right) \cos t + \left(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 - \frac{\pi-2}{4-\pi} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \sin t \right) \right] \quad (5)$$

W pracy [1] podano algorytm wyznaczania punktów kontrolnych $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^3$ z uwzględnieniem parametrów geometrycznych układu. Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt dokładnego uwzględnienia położenia środków łuków i zaprojektowanie krzywej przejściowej nie wymagającej zmiany położenia tychże łuków.

Wprowadzono wektory jednostkowe \mathbf{T}_i związane z punktami kontrolnymi \mathbf{P}_i (rys. 1 i 2), których zastosowanie prowadzi do wyrażenia pierwszej i drugiej pochodnej projektowanej krzywej jako funkcji kąta θ i parametru kształtu m :

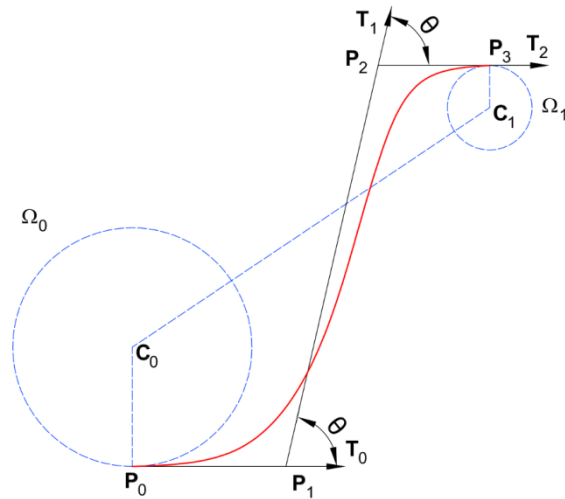
$$\mathbf{P}'(t) = mr_0 \tan \theta \cdot [(1 - \sin t)T_0 + m(\cos t + \sin t - 1) \sec \theta \cdot T_1 + \lambda(1 - \cos t)T_2] \quad (6)$$

$$\mathbf{P}''(t) = mr_0 \tan \theta \cdot [-\cos t \cdot T_0 + m(\cos t - \sin t) \cdot \sec \theta \cdot T_1 + \lambda \sin t \cdot T_2] \quad (7)$$

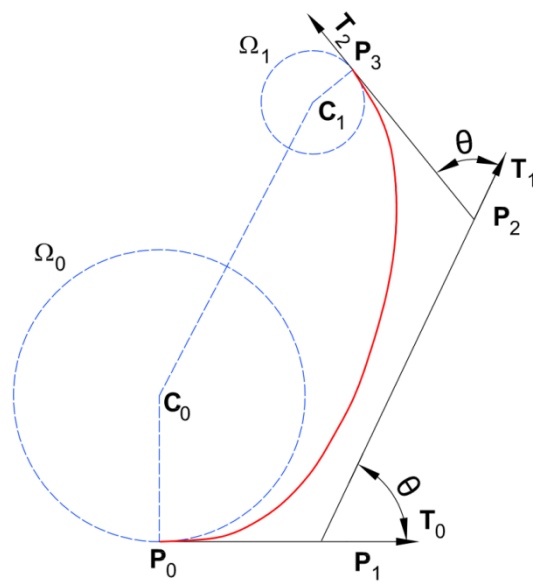
gdzie: m – parametr kształtu,

R_0 – promień pierwszego łuku ($R_0 \geq R_1$),

$$\lambda = \sqrt{\frac{R_1}{R_0}}.$$



Rys. 1. Połączenie łuków odwrotnych (*S-shaped*) kubiczną krzywą C-Bezier



Rys. 2. Połączenie łuków zgodnych (*C-shaped*) kubiczną krzywą C-Bezier

W przypadku łuków odwrotnych w celu zapewnienia monotoniczności krzywizny wymagane jest spełnienie jednej z dwóch par zależności pomiędzy parametrem m i λ : $m \geq \frac{2}{3}$ i $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$ lub $m \geq 1$ i $\frac{1}{7} \leq \lambda \leq 1$. W przypadku łuków zgodnych, z których jeden nie jest zawarty w drugim, uzyskanie pojedynczego ekstremum krzywizny wymaga spełnienia zależności $m \geq \frac{(1+\sqrt{7})}{3}$.

1.1. Łuki odwrotne (*S-shaped*)

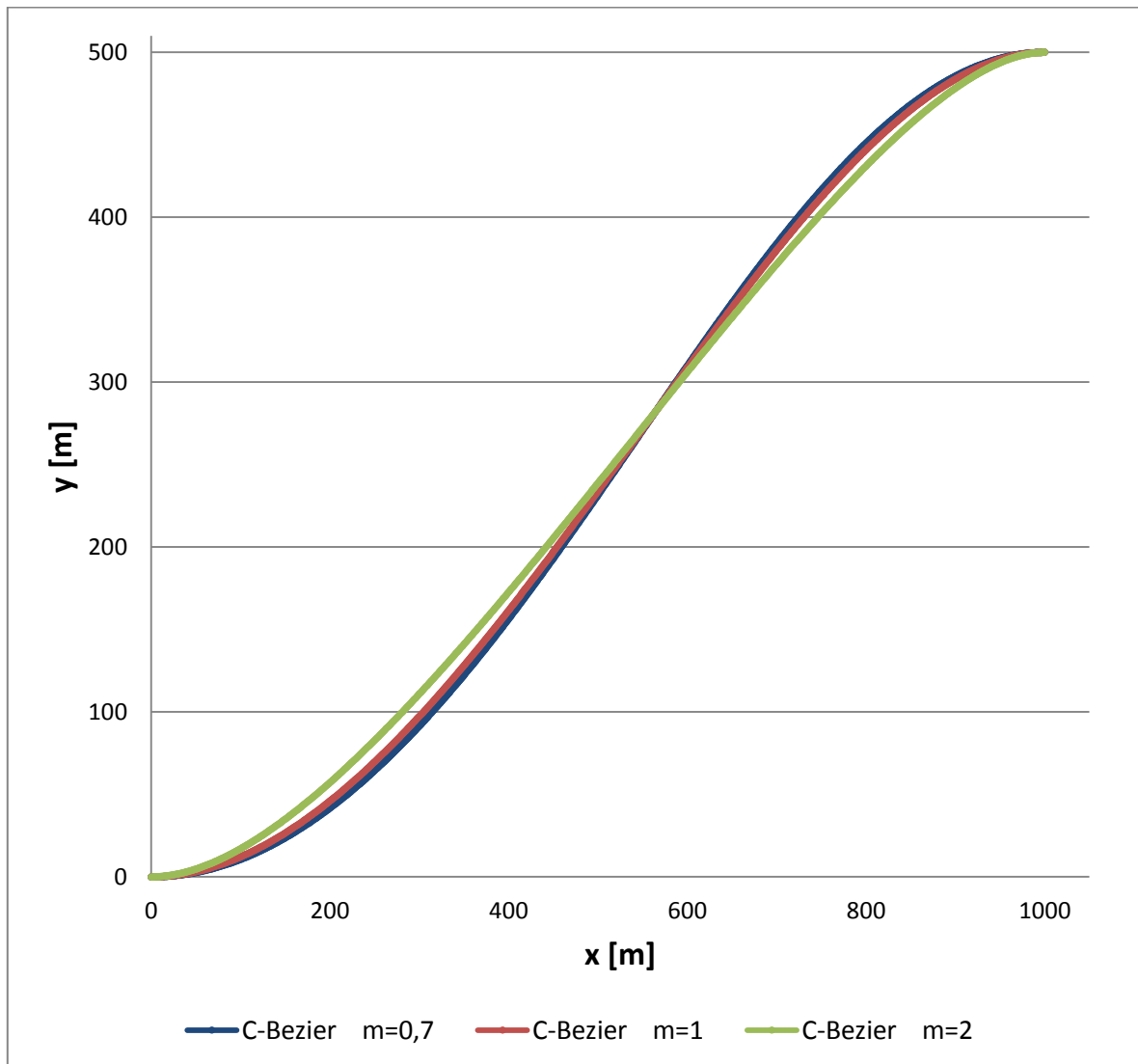
Rozważono układ geometryczny dwóch łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 (rys. 1) opisany w tabeli 1. Początek układu współrzędnych punkt (0;0) znajduje się w punkcie kontrolnym P_0 , będącym jednocześnie punktem styczności konstruowanej krzywej z łukiem Ω_0 .

Tab. 1. Parametry geometryczne układu łuków odwrotnych

Położenie środka łuku		Promień łuku	
C_0	(0;700)	R_0	700 m
C_1	(1000;0)	R_1	500 m

Odległość środków łuków opisanych w tabeli 1 wynosi $R = \|C_1 - C_0\| = 1220,66$ m.

Dla różnych wartości parametru $m \in \{0,7; 1; 2\}$ otrzymano rodzinę kubicznych krzywych C-Bezier pokazaną na rysunku 3.



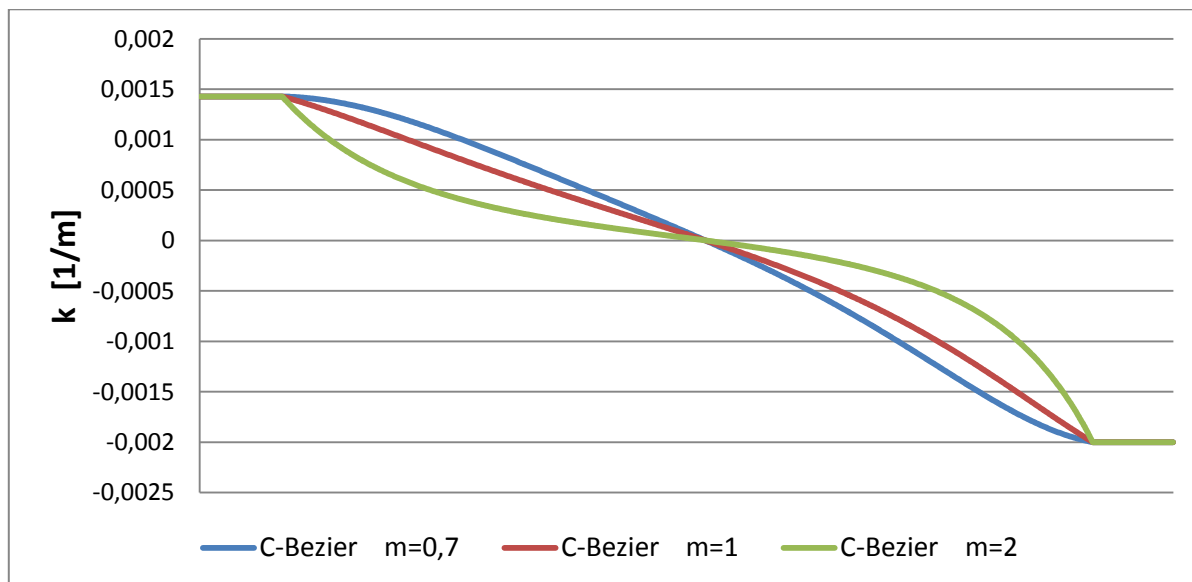
Rys. 3. Połączenie łuków odwrotnych rodziną kubicznych krzywych C-Bezier

Kubiczne krzywe C-Bezier na rysunku 3 różnią się długością (tab. 2) i krzywizną (rys. 4). Punkty styczności krzywych z łukami Ω_0 i Ω_1 są wspólne.

Tab. 2. Długości kubicznych krzywych C-Bezier w zależności od parametru kształtu m

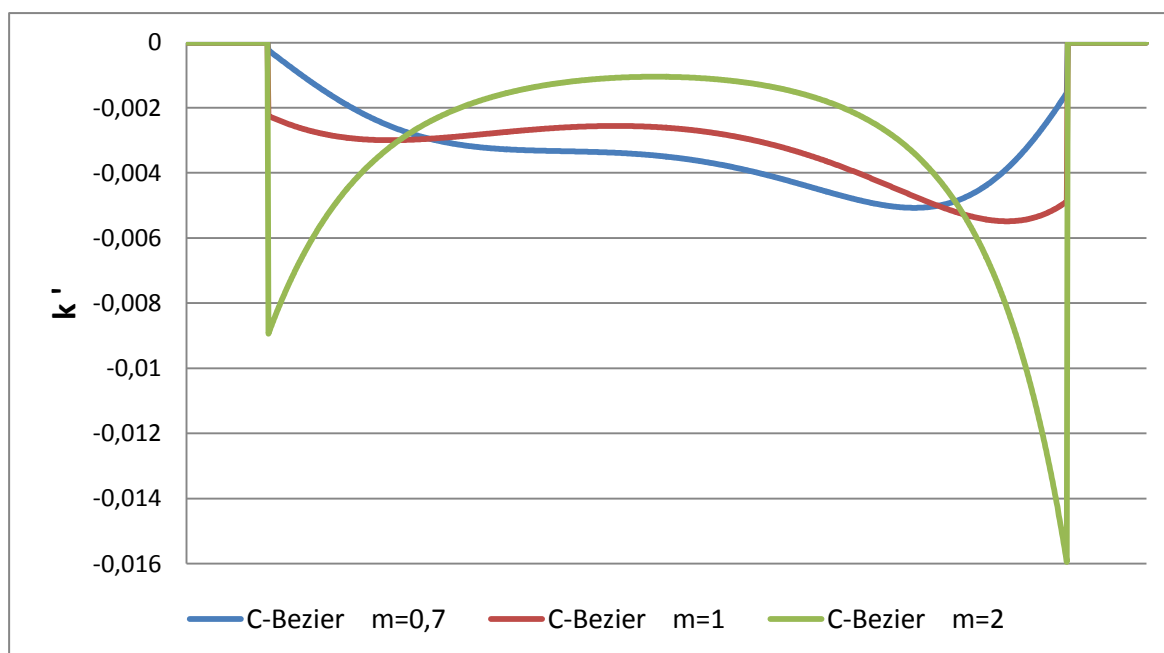
m	0,7	1	2
długość krzywej l [m]	1139,95	1136,92	1130,62

Na rysunku 4 zaprezentowano krzywizny kubicznych krzywych C-Bezier w funkcji parametru t spełniającego zależność $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Rys. 4. Krzywizna $k(t)$ kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki odwrotne

Zdecydowanie korzystniejszy przebieg pochodnej krzywizny mają kubiczne krzywe C-Bezier z parametrem $m = 0,7$ i $m = 1$ w odróżnieniu od krzywej z parametrem $m = 2$ (rys. 5).



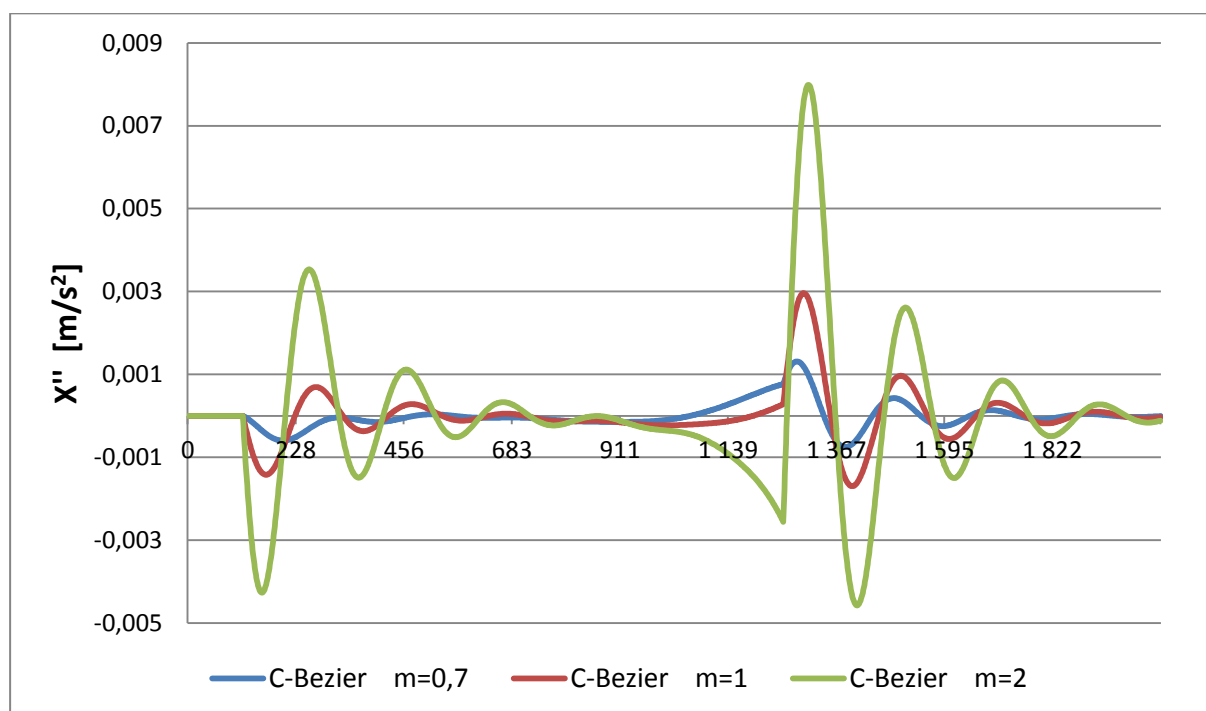
Rys. 5. Pochodna krzywizny kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki odwrotne

W analizie oddziaływań dynamicznych przyjęto parametry opisane w tabeli 3.

Tab.3. Wartości parametrów uwzględnione w analizie oddziaływań dynamicznych

V [m/s]	33,333	stała prędkość
a_0 [m/s ²]	0,4286	wartość niezrównoważonego przyspieszenia na łuku Ω_0
a_1 [m/s ²]	0,6	wartość niezrównoważonego przyspieszenia na łuku Ω_1
D	0,175	wskaźnik tłumienia Lehr'a
Ω	3,5	pulsacja drgań własnych

Uzyskano przebieg drgań $X(t)$ oraz wyznaczono wypadkowe przyspieszenie w ruchu drgającym $X''(t)$ dla poszczególnych krzywych (rys. 6).



Rys. 6. Przyspieszenie w ruchu drgającym X'' w funkcji długości krzywej l

Na podstawie rysunku 6 można stwierdzić, że kubiczna krzywa C-Bezier z parametrem $m = 0,7$ ma najlepsze właściwości dynamiczne (najmniejszą wartość maksymalnych wartości przyspieszenia w ruchu drgającym X''). Zdecydowanie najgorsze właściwości ma kubiczna krzywa C-Bezier z parametrem $m = 2$.

1.2. Łuki zgodne (C-shaped)

Rozważono układ geometryczny dwóch łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 (rys. 2) opisany w tabeli 4. Początek układu współrzędnych punkt (0;0) znajduje się w punkcie kontrolnym P_0 , będącym jednocześnie punktem styczności konstruowanej krzywej z łukiem Ω_0 .

Tab. 4. Parametry geometryczne układu dwóch łuków zgodnych

Położenie środka łuku		Promień łuku	
C_0	(0;700)	R_0	700 m
C_1	(600;600)	R_1	500 m

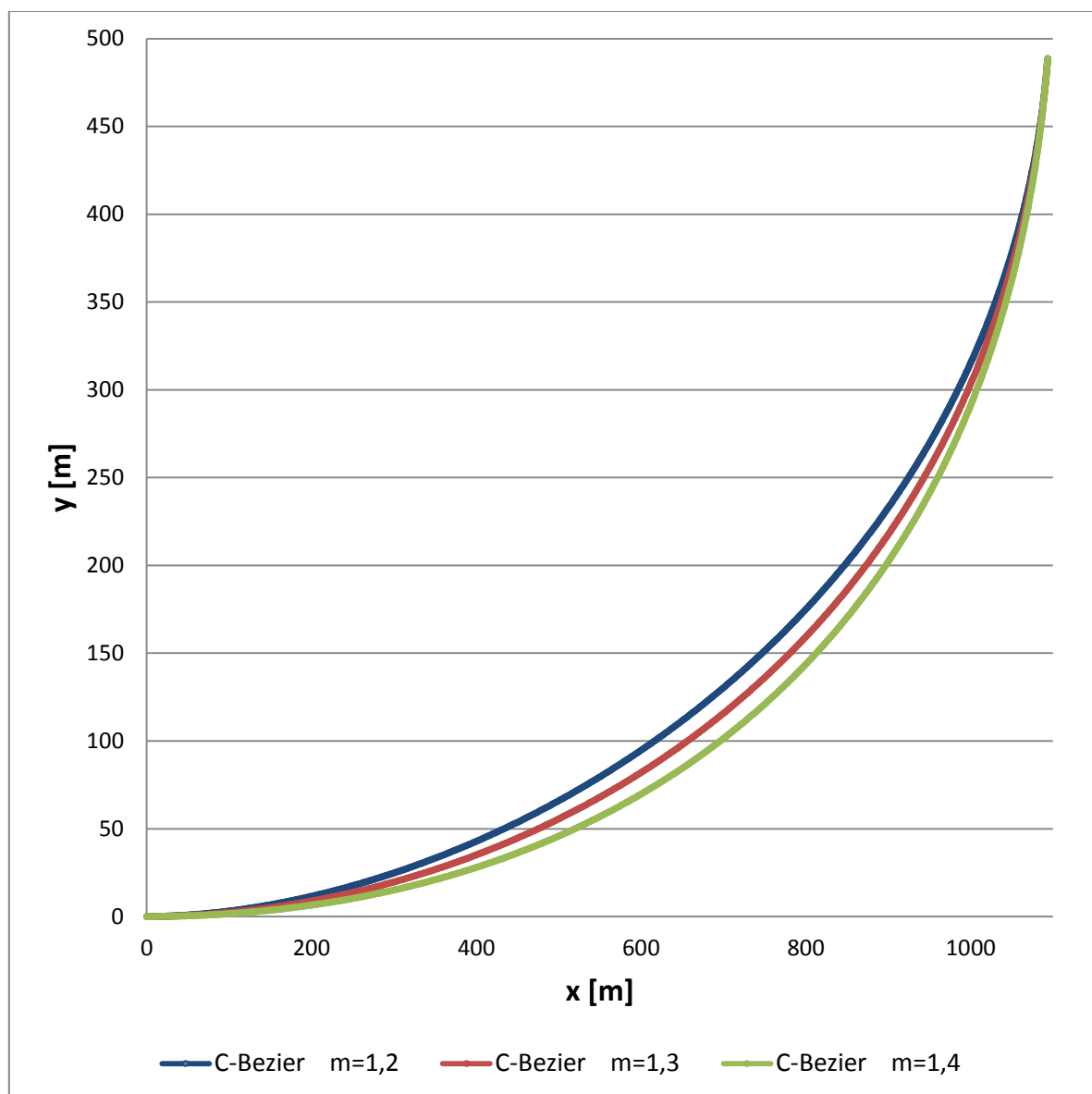
Odległość środków łuków opisanych w tabeli 4 wynosi $R = \|C_1 - C_0\| = 608,276$ m.

Dla różnych wartości parametru $m \in \{1,2; 1,3; 1,4\}$ otrzymano rodzinę kubicznych krzywych C-Bezier przedstawioną na rysunku 7.

Kubiczne krzywe C-Bezier na rysunku 7 różnią się długością (tab. 5) i krzywizną (rys. 8). Punkty styczności krzywych z łukami Ω_0 i Ω_1 są wspólne.

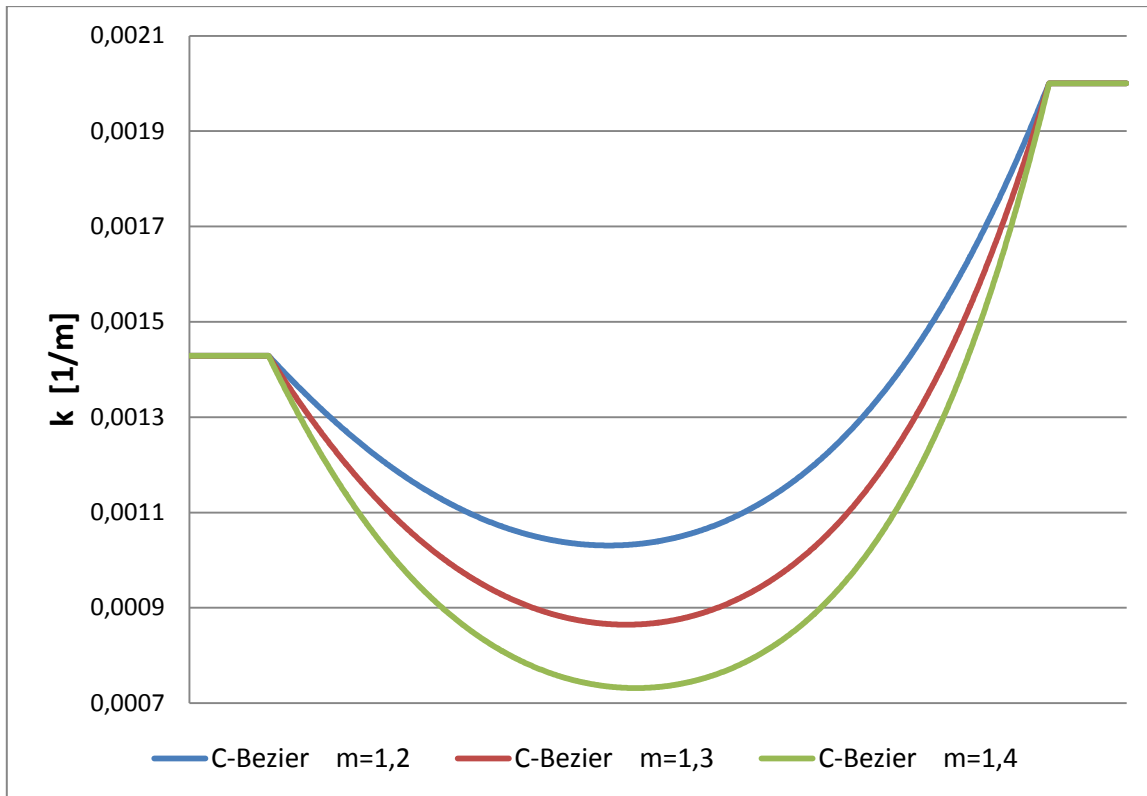
Tab.5. Długości kubicznych krzywych C-Bezier w zależności od parametru kształtu m

m	1,2	1,3	1,4
długość krzywej l [m]	1270,98	1280,76	1290,95



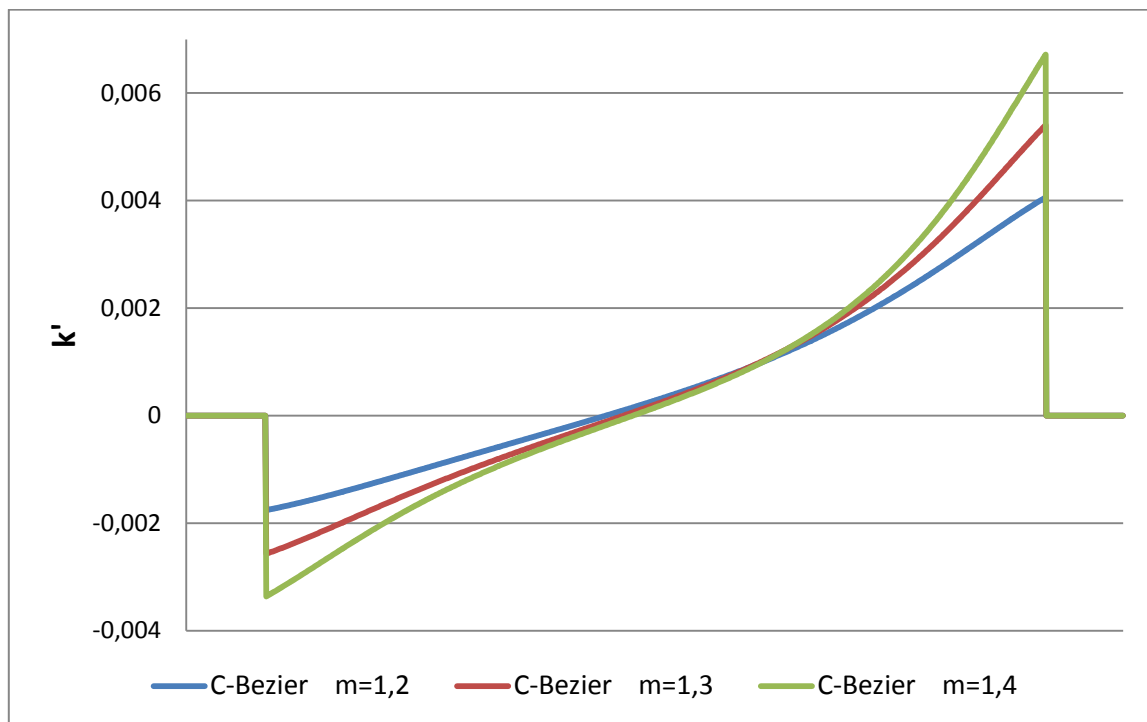
Rys. 7. Połączenie łuków zgodnych rodziną kubicznych krzywych C-Bezier

Rys. 8 prezentuje krzywizny kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki zgodne w funkcji parametru t spełniającego zależność $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. W przypadku łączenia krzywą przejściową łuków zgodnych, z których jeden nie zawiera się w drugim, obecność pojedynczego ekstremum krzywizny jest nieuniknione [1, 2].



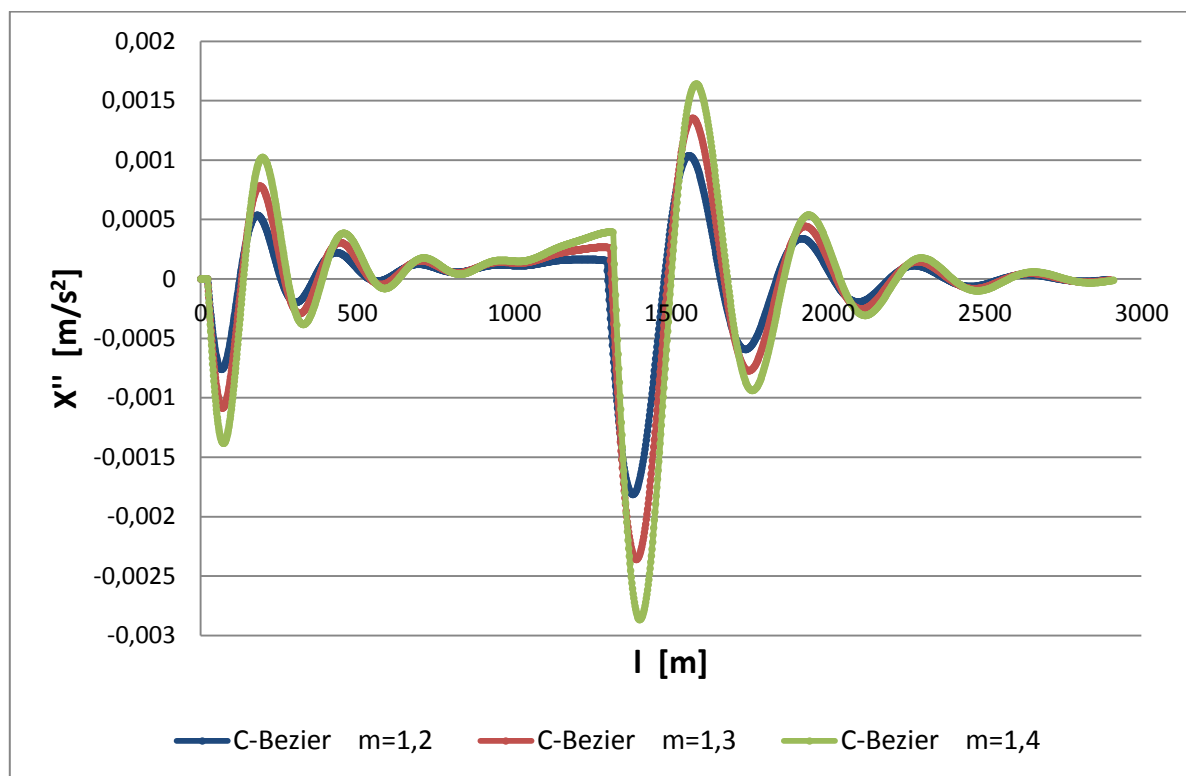
Rys. 8. Krzywizna $k(t)$ kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki zgodne

Rysunek 9 przedstawia odpowiednie wykresy pochodnych krzywizny.



Rys. 9. Pochodna krzywizny kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki zgodne

Na rysunku 10 przedstawiono przyspieszenie w ruchu drgającym X'' wyznaczone z uwzględnieniem parametrów opisanych w tabeli 3.



Rys. 10. Przyspieszenie w ruchu drgającym X'' w funkcji długości krzywej l

Najkorzystniejsze właściwości dynamiczne z rodziny kubicznych krzywych C-Bezier łączących łuki zgodne ma krzywa z parametrem kształtu $m = 1,2$.

2. KRZYWE BEZIER PIĄTEGO STOPNIA

W pracy [2] przedstawiono zastosowanie krzywej Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curve*) opisaną formułą:

$$\mathbf{P}(t) (= x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} \mathbf{P}_i (1-t)^{5-i} t^i \quad (8)$$

zdefiniowanej dla parametru t , spełniającego zależność $0 \leq t \leq 1$.

Spośród punktów kontrolnych $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^5$ punkty \mathbf{P}_0 i \mathbf{P}_5 styczności krzywej z łukiem odpowiednio pierwszym i drugim (rys. 11 i 12) stanowią węzły krzywej Bezier.

Zastosowana krzywa spełnia warunek stawiany Pitagorejskim hodografom (*Pythagorean hodograph*), polegający na możliwości przedstawienia wyrażenia $x'(t)^2 + y'(t)^2$ jako wielomianu kwadratowego zmiennej t . Pochodna krzywej wyrażona jest następującą formułą:

$$\mathbf{P}'(t) (= x'(t), y'(t)) = (u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(1-t)^2 + 2u_1t(1-t) + u_2t^2 \\ v(t) &= v_0(1-t)^2 + 2v_1t(1-t) + v_2t^2 \end{aligned}$$

W przypadku łuków odwrotnych:

$$(u_0, u_1, u_2) = u_0 \left(1, \frac{3m}{4}, \lambda \right), \text{ gdzie } \lambda = \sqrt[3]{\frac{R_1}{R_0}}$$

$$(v_0, v_1, v_2) = \left(0, \frac{u_0^3}{4r_0}, 0 \right)$$

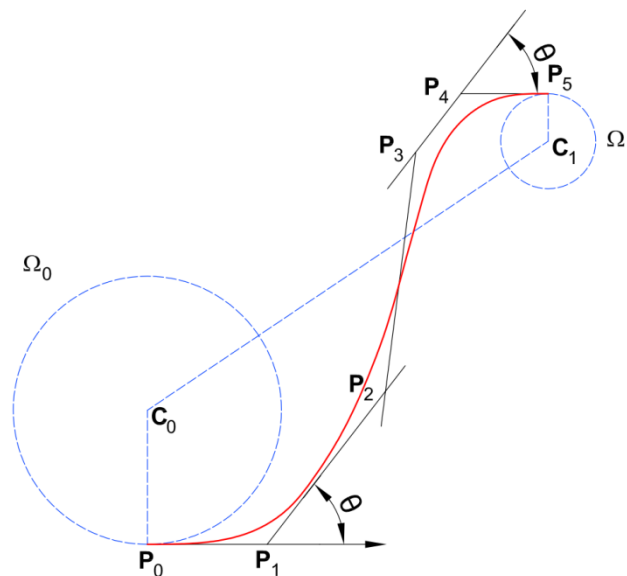
W przypadku łuków zgodnych:

$$(u_0, u_1, u_2) = 2\sqrt{mr_0 \tan \theta} (1, m, \lambda \cos 2\theta)$$

$$(v_0, v_1, v_2) = 2\sqrt{mr_0 \tan \theta} (0, m \tan \theta, \lambda \sin 2\theta)$$

W pracy [2] podano sposób wyznaczenia u_0 (łuki odwrotne) i θ (łuki zgodne) dla przyjętej wartości parametru kształtu m .

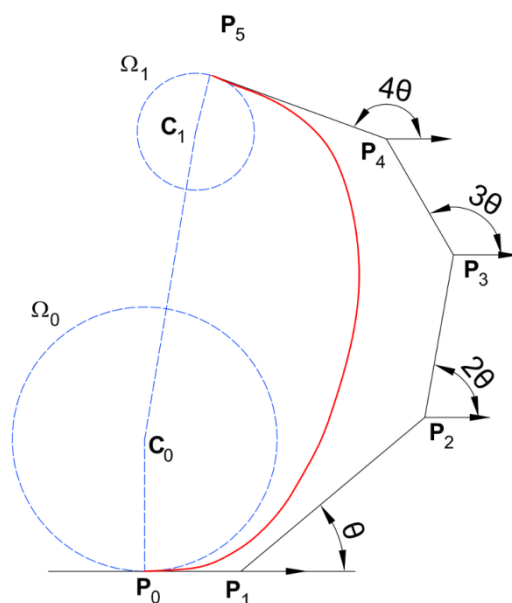
Algorytm konstruowania PH krzywej Bezier piątego stopnia zakłada określenie wartości R stanowiącej odległość pomiędzy środkami łuków zgodnych Ω_0 i Ω_1 (rys. 11 i 12). Niestety położenie środka łuku Ω_1 zmienia się w zależności od przyjętego parametru m . Algorytm gwarantuje jedynie utrzymanie zadanej wartości odległości pomiędzy środkami łuków R . Ograniczenie to stanowi wadę w porównaniu z algorytmem konstruowania kubicznej krzywej C-Bezier, który gwarantował niezmiennie położenie środków obu łuków Ω_0 i Ω_1 .



Rys. 11. Połączenie łuków odwrotnych PH krzywą Bezier piątego stopnia

Podane przez autorów [2] warunki istnienia rozwiązania w przypadku łuków odwrotnych wymagają, by spełnione były następujące zależności: $R > R_0 + R_1$; $m \geq 1$; $0,3 \leq \lambda \leq 1$.

W przypadku łuków zgodnych warunki ograniczają się do zależności $R > R_0 - R_1$. Spełnienie wymagań jest niezbędne w celu uzyskania monotonicznej krzywizny (łuki odwrotne) i krzywizny z pojedynczym ekstremum (łuki zgodne).



Rys. 12. Połączenie łuków zgodnych PH krzywą Bezier piątego stopnia

2.1. Łuki odwrotne (*S-shaped*)

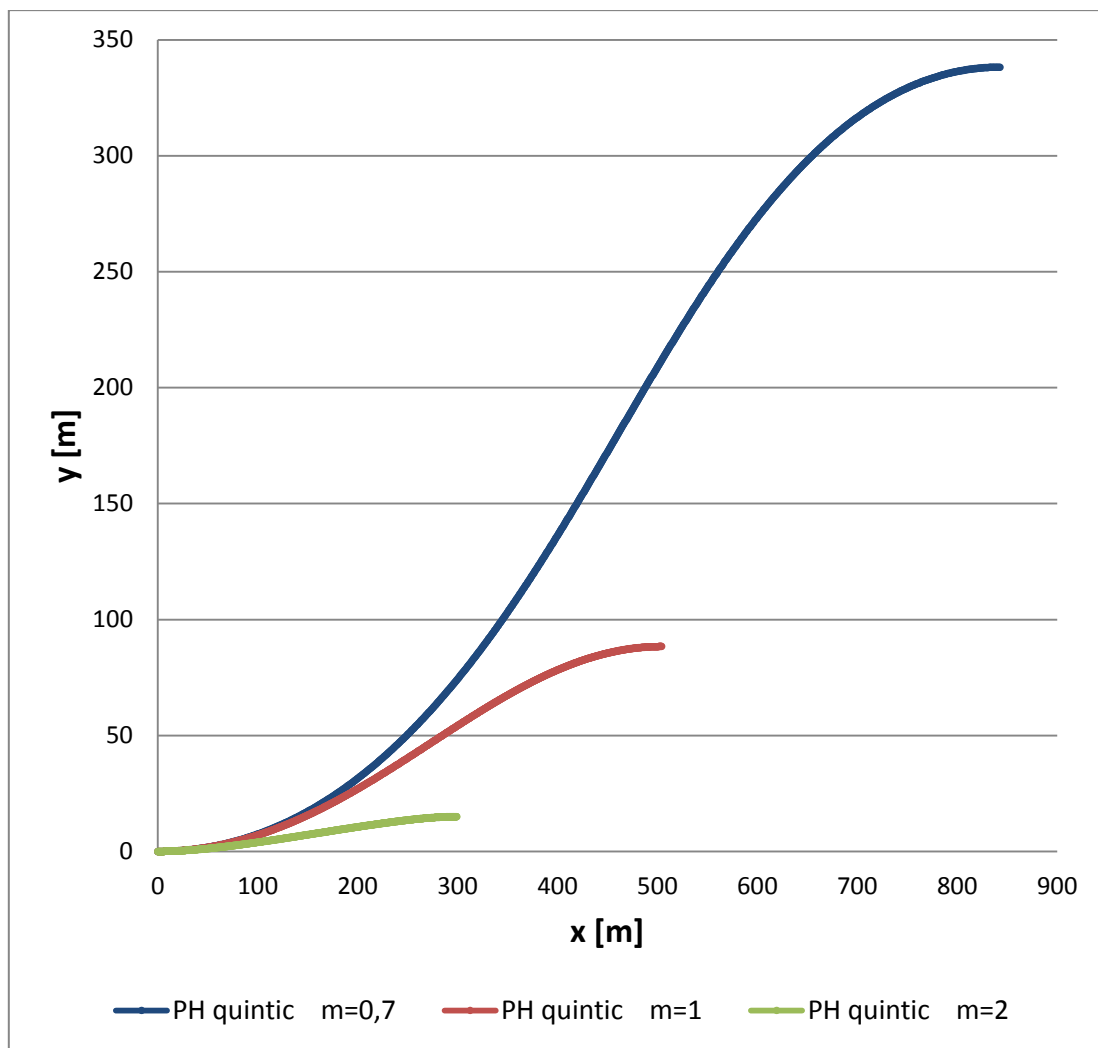
Rozważono układ geometryczny dwóch łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 opisany w tabeli 1, z tą różnicą, że położenie środka C_1 łuku Ω_1 zostanie wyznaczone w toku algorytmu konstruowania krzywej, a zachowana zostanie jedynie odległość $R = \|C_1 - C_0\| = 1220,66$ m. Dla różnych wartości parametru $m \in \{0,7; 1; 2\}$ otrzymano krzywe pokazane na rysunku 13.

Rodzina PH krzywych Bezier piątego stopnia przedstawiona na rysunku 13 różni się długością (tab. 6), krzywizną (rys. 14) oraz położeniem środka C_1 łuku Ω_1 , a co za tym idzie punktem styczności krzywej z łukiem Ω_1 . Punkt styczności krzywej z łukiem Ω_0 jest wspólny.

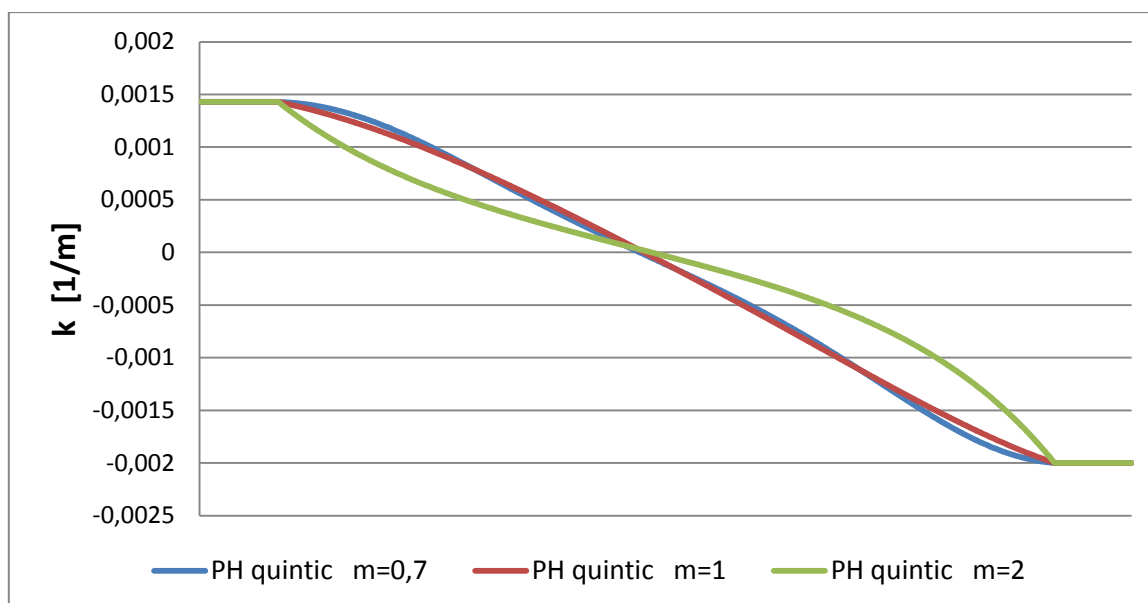
Tab. 6. Długości, położenia środka C_1 łuku Ω_1 oraz punkty styczności rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia w zależności od parametru kształtu m

M	0,7	1	2
długość krzywej l [m]	926,89	513,78	299,52
C_1	(843,01; -161,81)	(504,27; -411,63)	(299,10; -484,97)
P_5 (punkt styczności)	(843,01; 338,19)	(504,27; 88,37)	(299,10; 15,03)

Na rysunku 14 przedstawiono krzywizny rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki odwrotne w funkcji parametru t spełniającego zależność $0 \leq t \leq 1$.

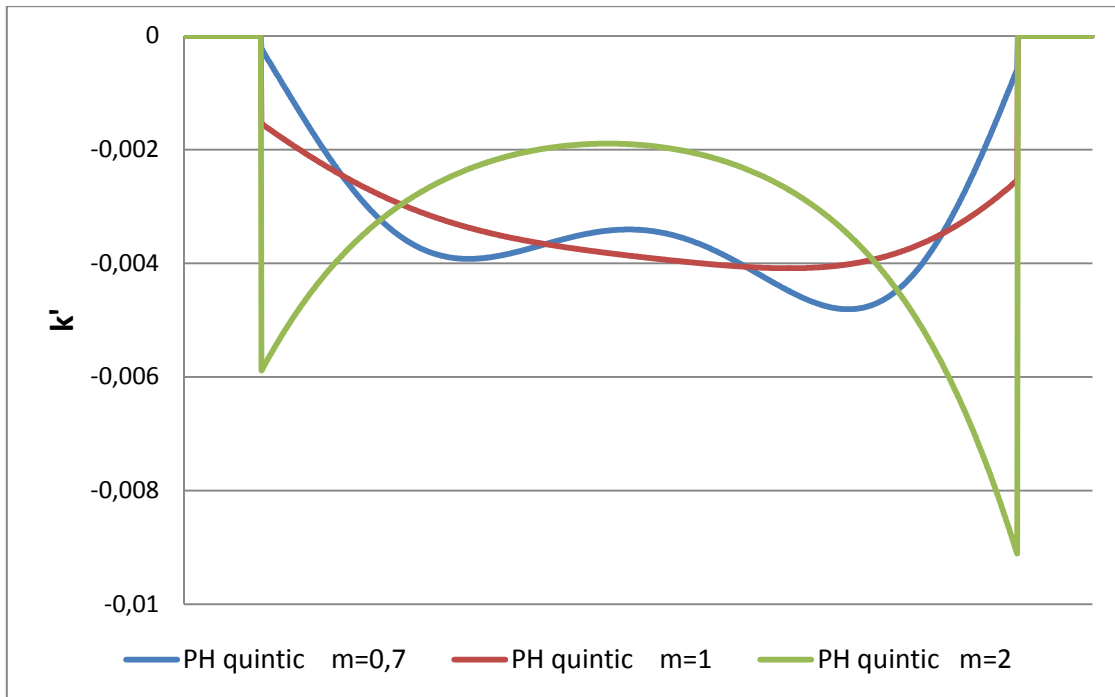


Rys. 13. Połączenie łuków odwrotnych rodziną PH krzywych Bezier piątego stopnia

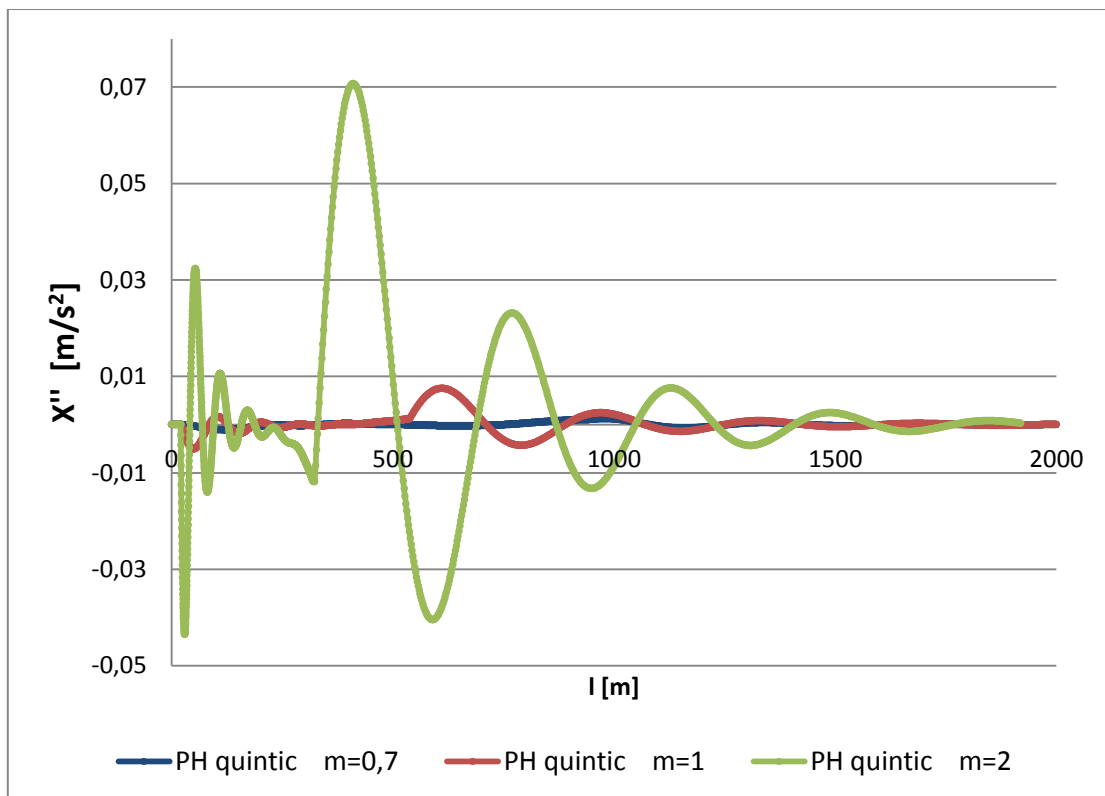


Rys. 14. Krzywizna $k(t)$ rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki odwrotne

Na rysunku 15 pokazano wykresy pochodnej krzywizny rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki odwrotne, a na rysunku 16 przyspieszenie w ruchu drgającym X'' . Najkorzystniejsze właściwości dynamiczne z rodziny omawianych krzywych łączących łuki odwrotne ma krzywa z parametrem kształtu $m = 0,7$, a zdecydowanie najgorsze $m = 2$.



Rys. 15. Pochodna krzywizny rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki odwrotne

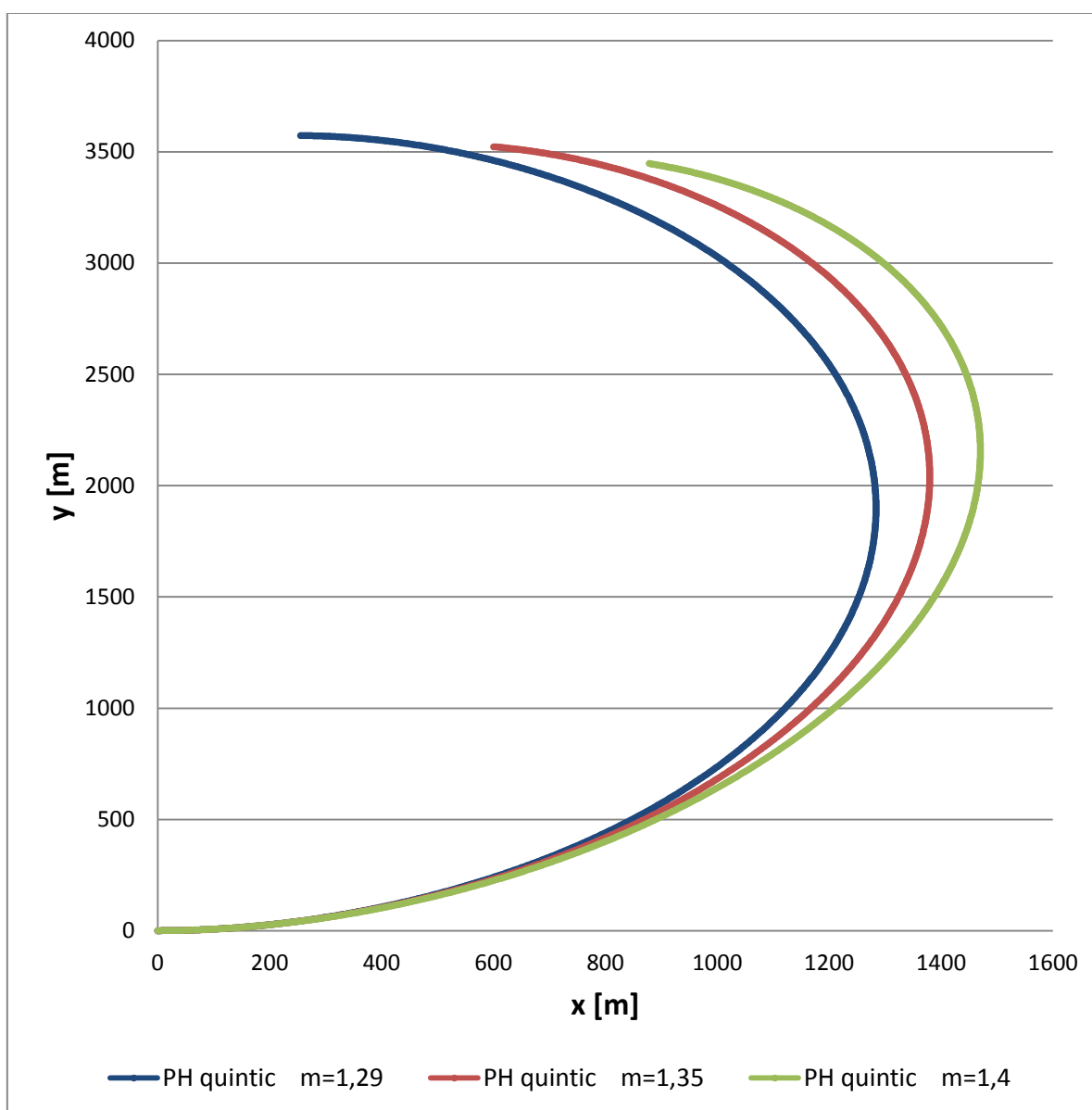


Rys. 16. Przyspieszenie w ruchu drgającym X'' w funkcji długości krzywej l

Znaczne różnice we właściwościach dynamicznych krzywych z rodziny PH Bezier piątego stopnia wynikają z ich zróżnicowanej długości. Krzywa z parametrem $m = 2$ o najgorszych właściwościach dynamicznych jest najkrótsza (tab. 6).

2.2. Łuki zgodne (C-shaped)

Rozważono jeszcze układ geometryczny dwóch łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 opisany w tabeli 4, z tą różnicą, że położenie środka C_1 łuku Ω_1 zostanie wyznaczone w toku algorytmu konstruowania krzywej, a zachowana zostanie jedynie odległość pomiędzy środkami łuków Ω_0 i Ω_1 wynosząca $R = \|C_1 - C_0\| = 2385,37$ m. Dla różnych wartości parametru $m \in \{1,29; 1,35; 1,4\}$ otrzymano krzywe pokazane na rysunku 17.



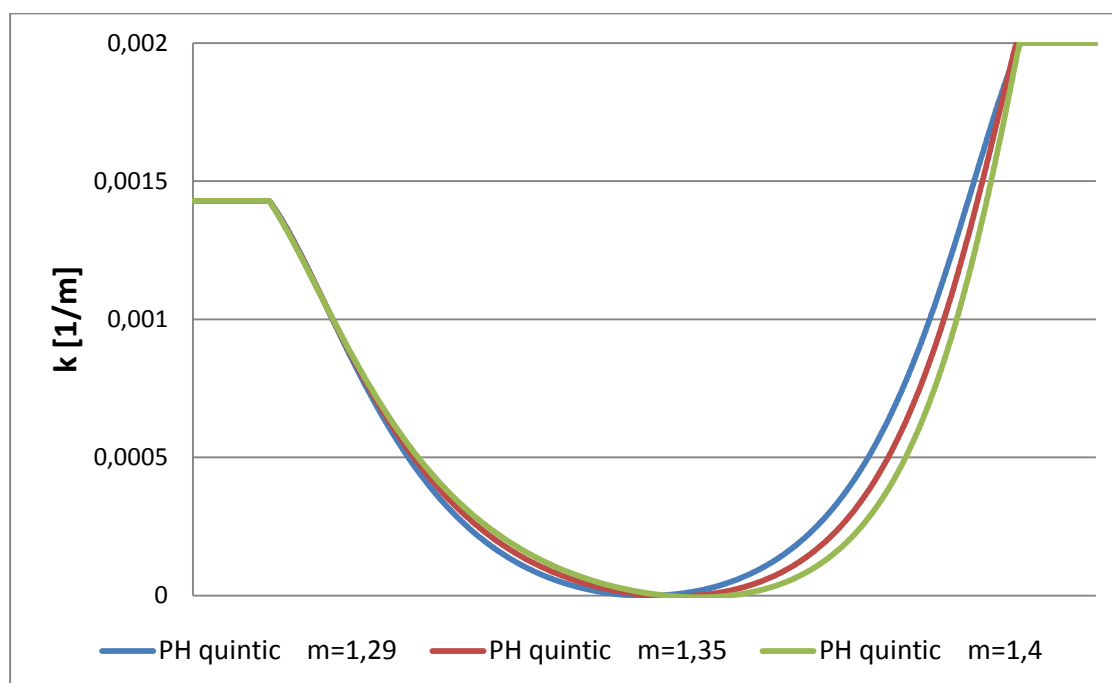
Rys. 17. Połączenie zgodnych łuków kołowych rodziną PH krzywych Bezier piątego stopnia

Rodzina PH krzywych Bezier piątego stopnia na rysunku 17 różni się długością (tab. 7), krzywizną (rys. 18) oraz położeniem środka C_1 łuku Ω_1 , a co za tym idzie punktem styczności krzywej z łukiem Ω_1 . Punkt styczności krzywej z łukiem Ω_0 jest wspólny.

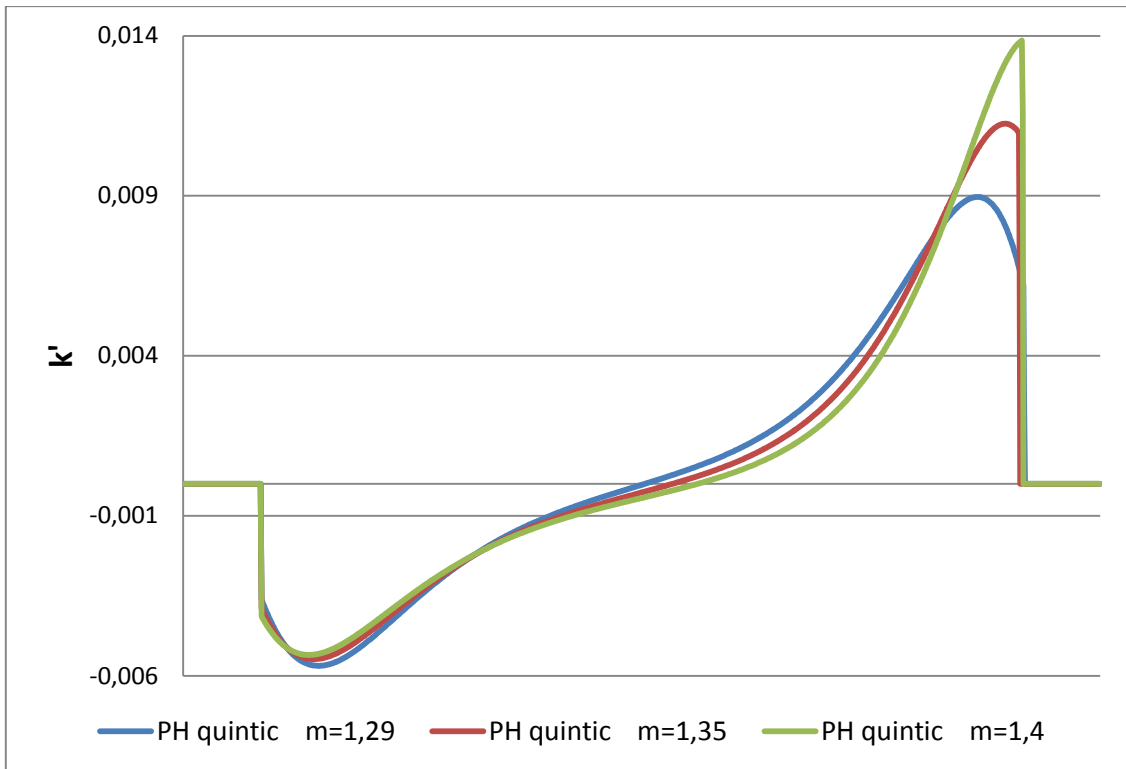
Tab. 7. Długości, położenia środka C_1 łuku Ω_1 oraz punkty styczności rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia w zależności od parametru kształtu m

m	1,29	1,35	1,40
długość krzywej l [m]	4651,62	4479,73	4338,28
C_1	(249,86; 3072,25)	(493,00; 3033,87)	(690,23; 2983,33)
P_5 (punkt styczności)	(252,48; 3572,24)	(597,67; 3522,79)	(876,35; 3447,40)

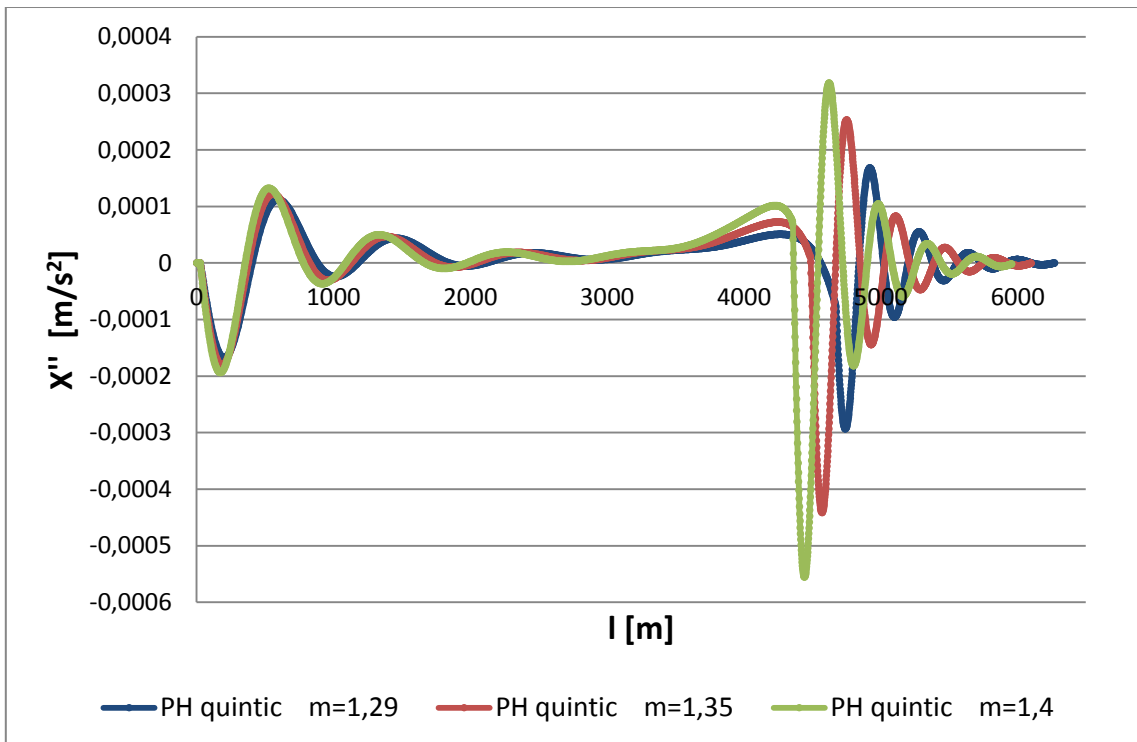
Rysunek 18 prezentuje krzywizny rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki zgodne w funkcji parametru t spełniającego zależność $0 \leq t \leq 1$. Na rysunku 19 pokazano wykresy pochodnej krzywizny rodziny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki zgodne, a na rysunku 20 przyspieszenie w ruchu drgającym X'' . Najkorzystniejsze właściwości dynamiczne z rodziny omawianych krzywych łączących łuki zgodne ma krzywa z parametrem kształtu $m = 1,29$.



Rys. 18. Krzywizna $k(t)$ PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki zgodne



Rys. 19. Pochodna krzywizny PH krzywych Bezier piątego stopnia łączących łuki zgodne



Rys. 20. Przyspieszenie w ruchu drgającym X'' w funkcji długości krzywej l

3. KRZYWA TYPU K^0

3.1. Uniwersalna metoda modelowania krzywizny

Połączenie elementów trasy kolejowej o zróżnicowanej krzywiznie powinno zapewniać ciągłą zmianę niezrównoważonego przyspieszenia bocznego, w sposób korzystny dla dynamiki oddziaływań w układzie droga – pojazd. Wiąże się to ściśle z właściwym sposobem kształtowania krzywizny. Uogólniając metodę identyfikacji przyspieszeń niezrównoważonych występujących na różnych rodzajach krzywych przejściowych [6], możemy poszukiwać funkcji krzywizny $k(l)$ wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$k^{(m)}(l) = f[l, k, k', \dots, k^{(m-1)}] \quad (10)$$

z warunkami na początku (dla $l = 0$) i na końcu (dla $l = l_k$) krzywej przejścia

$$k^{(i)}(0^+) = \begin{cases} k_1 & \text{dla } i = 0 \\ 0 & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n_1 \end{cases} \quad (11)$$

$$k^{(j)}(l_k^-) = \begin{cases} k_2 & \text{dla } j = 0 \\ 0 & \text{dla } j = 1, 2, \dots, n_2 \end{cases} \quad (12)$$

przy czym parametrem l jest położenie danego punktu na długości krzywej. Rząd równania różniczkowego (10) wynosi $m = n_1 + n_2 + 2$, a otrzymana funkcja $k(l)$ jest funkcją klasy C^n w przedziale $(0, l_k)$, gdzie $n = \min(n_1, n_2)$.

Zastosowanie przedstawionej metody stwarza możliwość łączenia różnorodnych elementów geometrycznych, np. prostej z łukiem kołowym czy też dwóch łuków kołowych o przebiegu zgodnym lub odwrotnym. Metoda ta pozwala na generowanie rozwiązań o liniowej lub nieliniowej zmianie krzywizny.

Po wyznaczeniu krzywizny $k(l)$ zadaniem podstawowym staje się określenie współrzędnych krzywej w układzie x, y . Zakładamy, że początek tego układu znajduje się w punkcie końcowym krzywej wejściowej o krzywiznie k_1 , a oś odciętych jest styczna do tej krzywej w tymże punkcie. Równanie szukanego połączenia możemy zapisać w postaci parametrycznej:

$$x(l) = \int \cos \theta(l) dl \quad (13)$$

$$y(l) = \int \sin \theta(l) dl \quad (14)$$

Funkcję $\theta(l)$ określamy na podstawie wzoru

$$\theta(l) = \int k(l) dl \quad (15)$$

3.2. Przypadek liniowej zmiany krzywizny

Przykład zastosowania omawianej metody będzie obejmował przypadek liniowej zmiany krzywizny. Jak powszechnie wiadomo, liniowa zmiana krzywizny występuje na krzywej przejściowej zwanej klotoidą, łączącą prostą ($k_1 = 0$) z łukiem kołowym ($k_2 = \frac{1}{R}$). Spróbujmy

teraz ten przypadek uogólnić. Liniową zmianę krzywizny na określonej długości l_k uzyskuje się przez przyjęcie dwóch elementarnych warunków:

$$\begin{cases} k(0^+) = k_1 \\ k(l_k^-) = k_2 \end{cases} \quad (16)$$

oraz równania różniczkowego rzędu drugiego dającego rozwiązanie wielomianowe

$$k''(l) = 0 \quad (17)$$

Po wyznaczeniu stałych rozwiązanie problemu różniczkowego (16), (17) jest następujące:

$$k(l) = k_1 + \frac{1}{l_k}(k_2 - k_1)l \quad (18)$$

Ponieważ otrzymane rozwiązanie stanowi funkcja klasy C^0 , zaliczymy je do kategorii określonej przez nas jako krzywe typu K^0 . Wyznaczenie funkcji $\theta(l)$

$$\theta(l) = k_1 l + \frac{1}{2 l_k}(k_2 - k_1)l^2 \quad (19)$$

umożliwia określenie współrzędnych $x(l)$ i $y(l)$ za pomocą wzorów (13) i (14) i rozwinięciu funkcji podcałkowych w szereg Maclaurina [5]. Po przeprowadzeniu całej procedury otrzymujemy następujące równania parametryczne:

$$x(l) = \int \cos \theta(l) dl = l - \frac{k_1^2}{6} l^3 - \frac{k_1}{8 l_k}(k_2 - k_1)l^4 + \left[\frac{k_1^4}{120} - \frac{1}{40 l_k^2}(k_2 - k_1)^2 \right] l^5 + \frac{k_1^3}{72 l_k}(k_2 - k_1)l^6 - \left[\frac{k_1^6}{5040} - \frac{k_1^2}{112 l_k^2}(k_2 - k_1)^2 \right] l^7 - \left[\frac{k_1^5}{1920 l_k}(k_2 - k_1) - \frac{k_1}{384 l_k^3}(k_2 - k_1)^3 \right] l^8 + \left[\frac{k_1^8}{362880} - \frac{k_1^4}{1728 l_k^2}(k_2 - k_1)^2 + \frac{1}{3456 l_k^4}(k_2 - k_1)^4 \right] l^9 + \dots \quad (20)$$

$$y(l) = \int \sin \theta(l) dl = \frac{k_1}{2} l^2 + \frac{1}{6 l_k}(k_2 - k_1)l^3 - \frac{k_1^3}{24} l^4 - \frac{k_1^2}{20 l_k}(k_2 - k_1)l^5 + \left[\frac{k_1^5}{720} - \frac{k_1}{48 l_k^2}(k_2 - k_1)^2 \right] l^6 + \left[\frac{k_1^4}{336 l_k}(k_2 - k_1) - \frac{1}{336 l_k^3}(k_2 - k_1)^3 \right] l^7 - \left[\frac{k_1^7}{40320} - \frac{k_1^3}{384 l_k^2}(k_2 - k_1)^2 \right] l^8 - \left[\frac{k_1^6}{12960 l_k}(k_2 - k_1) - \frac{k_1^2}{864 l_k^3}(k_2 - k_1)^3 \right] l^9 + \dots \quad (21)$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe równania dla $k_1 = 0$ opisują krzywą przejściową w postaci kłoidy.

W przypadku łuków zgodnych funkcja $\theta(l)$ jest funkcją monotoniczną. W przypadku łuków odwrotnych, z uwagi na fakt, iż funkcja $\theta(l)$ posiada ekstremum w punkcie l_0 , równania parametryczne (20) i (21) obowiązują dla $l \in \langle 0, l_0 \rangle$.

$$l_0 = -\frac{k_1}{k_2 - k_1} l_k \quad (22)$$

Dla $l \in \langle l_0, l_k \rangle$ funkcje podcałkowe należy rozwinąć w szereg Taylora [5]. Otrzymujemy wówczas:

$$x(l) = x(l_0) + \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right)(l - l_0) - \left[\frac{(k_2 - k_1)}{6 l_k} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^3 - \left[\frac{(k_2 - k_1)^2}{40 l_k^2} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^5 + \left[\frac{(k_2 - k_1)^3}{336 l_k^3} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^7 + \left[\frac{(k_2 - k_1)^4}{3456 l_k^4} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^9 + \dots \quad (23)$$

$$y(l) = y(l_0) + \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right)(l - l_0) + \left[\frac{(k_2 - k_1)}{6 l_k} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^3 - \left[\frac{(k_2 - k_1)^2}{40 l_k^2} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^5 - \left[\frac{(k_2 - k_1)^3}{336 l_k^3} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^7 + \left[\frac{(k_2 - k_1)^4}{3456 l_k^4} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)} l_k\right) \right] (l - l_0)^9 + \dots \quad (24)$$

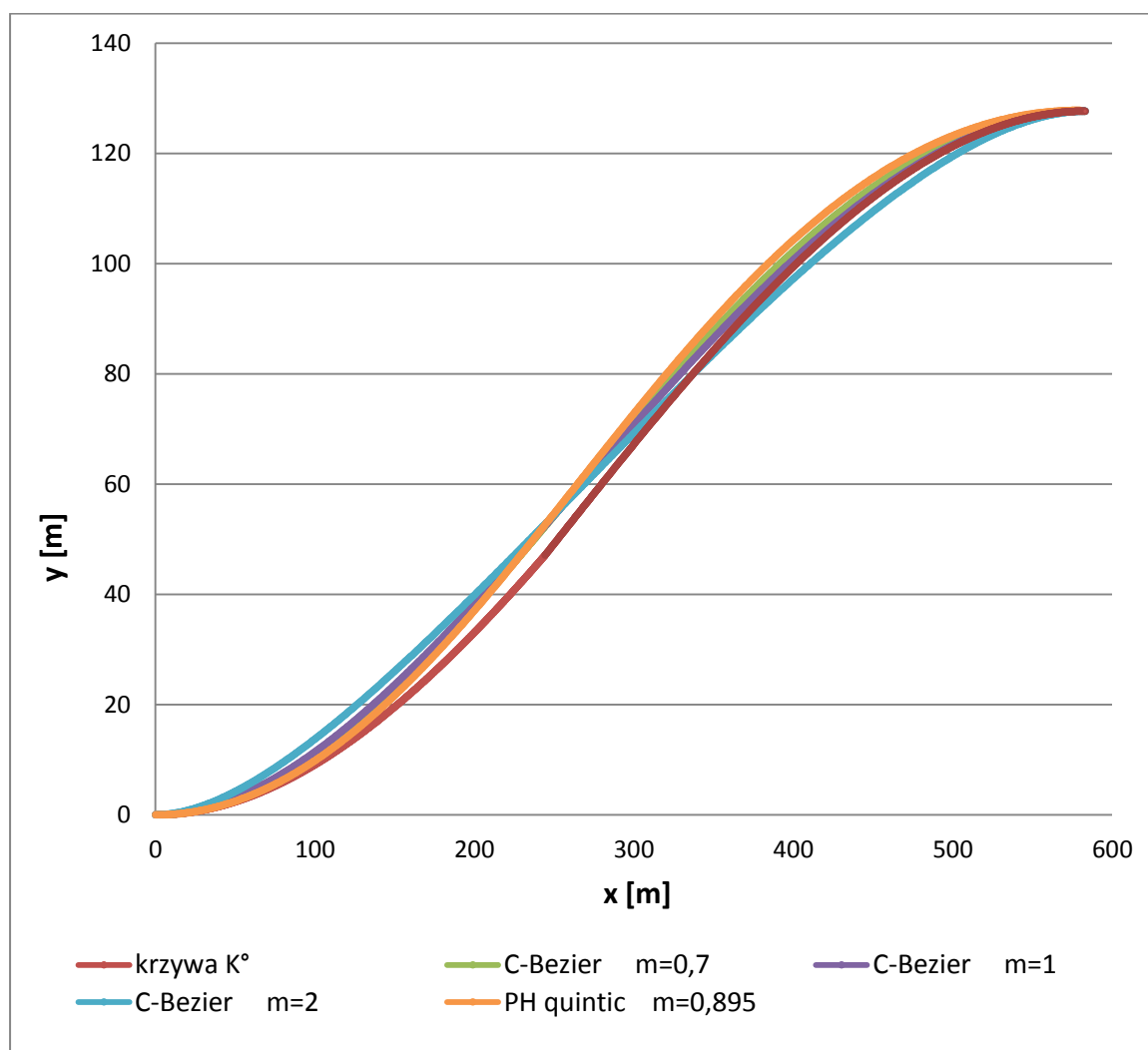
4. PORÓWNANIE WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH

Rozważmy układ geometryczny dwóch łuków kołowych Ω_0 i Ω_1 opisany w tabeli 8.

Tab. 8. Parametry geometryczne układu odwrotnych łuków kołowych

Położenie środka łuku		Promień łuku	
C_0	(0;500)	R_0	500 m
C_1	ustalany w toku algorytmu konstruowania krzywej	R_1	700 m

W układ opisany w tabeli 8 wpisujemy krzywą typu K^0 o założonej długości $l_k = 600$ m, w wyniku czego otrzymujemy położenie środka $C_1 = (583,09; -572,33)$ łuku Ω_1 oraz odległość pomiędzy środkami łuków $R = \|C_1 - C_0\| = 1220,61$ m. W celu porównania krzywych Bezier z krzywą typu K^0 skonstruowano rodzinę kubicznych krzywych C-Bezier zachowując położenie środków łuków C_0 i C_1 dla różnych wartości parametru kształtu $m \in \{0,7; 1; 2\}$ oraz skonstruowano PH krzywą Bezier piątego stopnia przyjmując położenie środka łuku C_0 , zadane $R = 1220,61$ m poprzez dobór parametru kształtu $m = 0,895$. W wyniku takiej operacji otrzymano połączenie łuków odwrotnych przedstawione na rysunku 21.



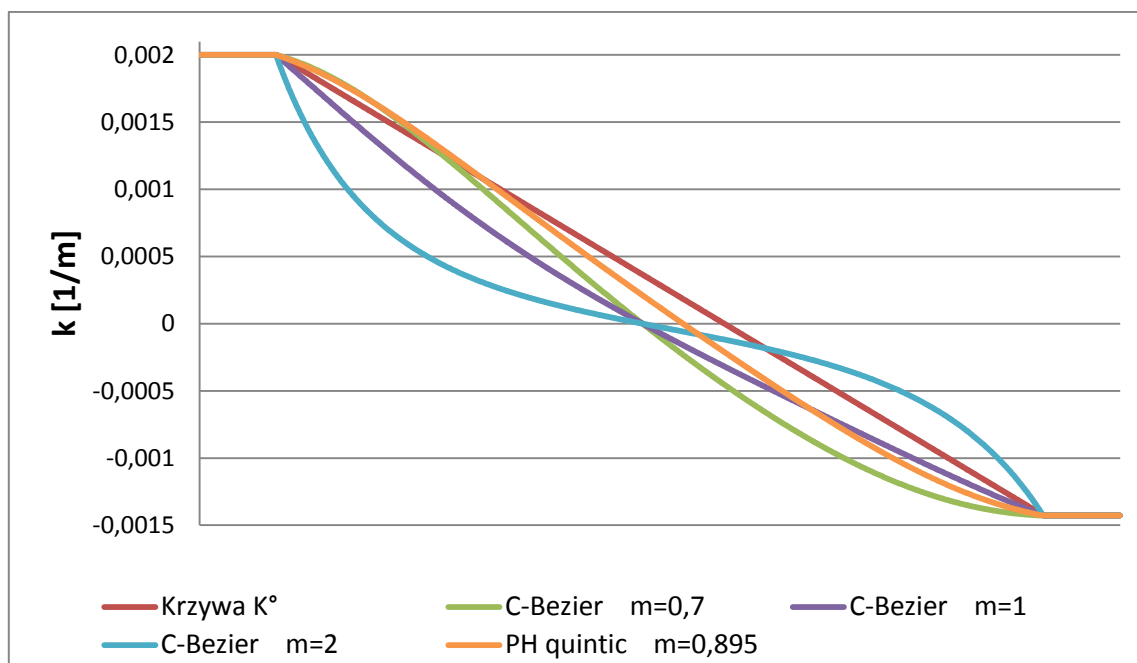
Rys. 21. Połączenie łuków odwrotnych krzywą typu K^0 , rodziną kubicznych krzywych C-Bezier oraz PH krzywą Bezier piątego stopnia

Krzywe na rysunku 21 różnią się krzywizną (rys. 22) oraz nieznacznie długością (tab. 9) i punktami styczności krzywych z łukiem Ω_1 . W przypadku PH krzywej Bezier piątego stopnia nieznacznie przesunięty jest również środek C_1 łuku Ω_1 .

Tab. 9. Długości, położenia środka C_1 łuku Ω_1 oraz punkty styczności krzywej K^0 , rodziny kubicznych krzywych C-Bezier i PH krzywej Bezier piątego stopnia

Krzywa	Krzywa K^0	PH quintic	C-Bezier	C-Bezier	C-Bezier
M	–	0,895	0,7	1	2
długość krzywej l [m]	600	597,05	599,98	599,54	598,63
punkt styczności z Ω_1	(583,05; 127,67)	(579,59; 127,82)	(583,09; 127,67)	(583,09; 127,67)	(583,09; 127,67)
C_1	(583,33; -572,33)	(583,09; -572,18)	(583,09; -572,33)	(583,09; -572,33)	(583,09; -572,33)

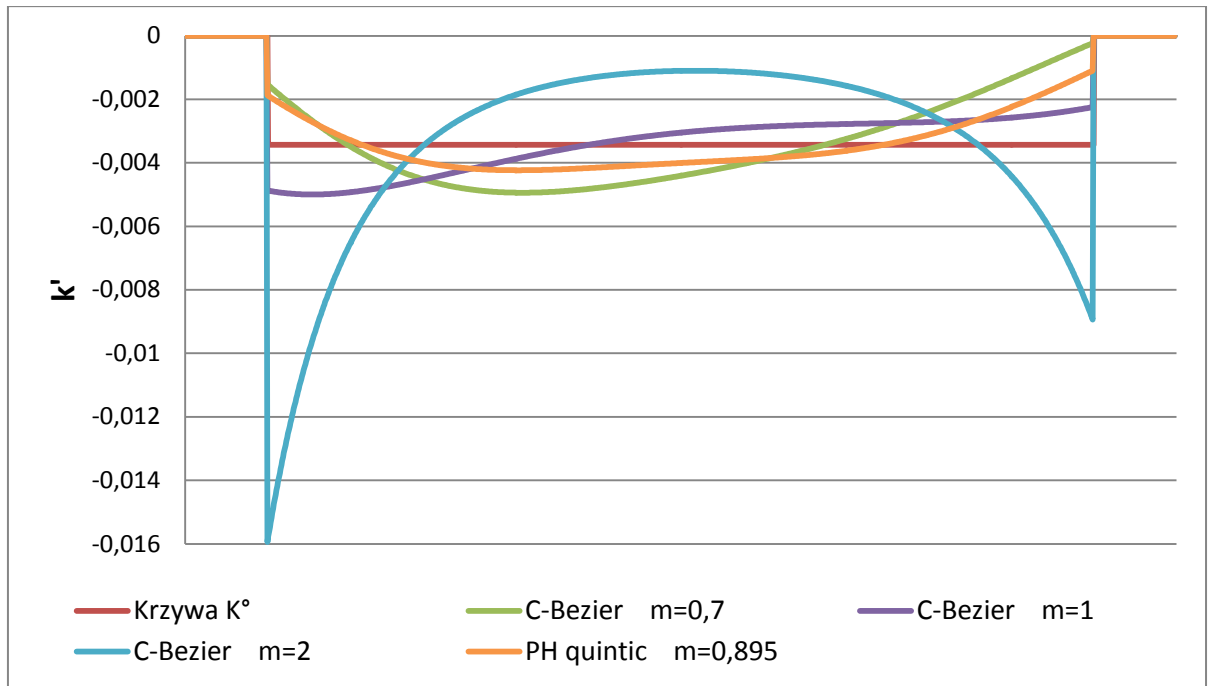
Parametry kształtu krzywych Bezier oraz parametry geometryczne układu odwrotnych łuków kołowych (tab. 8 i 9) zostały dobrane tak by spełnić wymagania niezbędne do uzyskania monotoniczności krzywizny określone przez algorytmy konstruowania krzywych [1, 2].



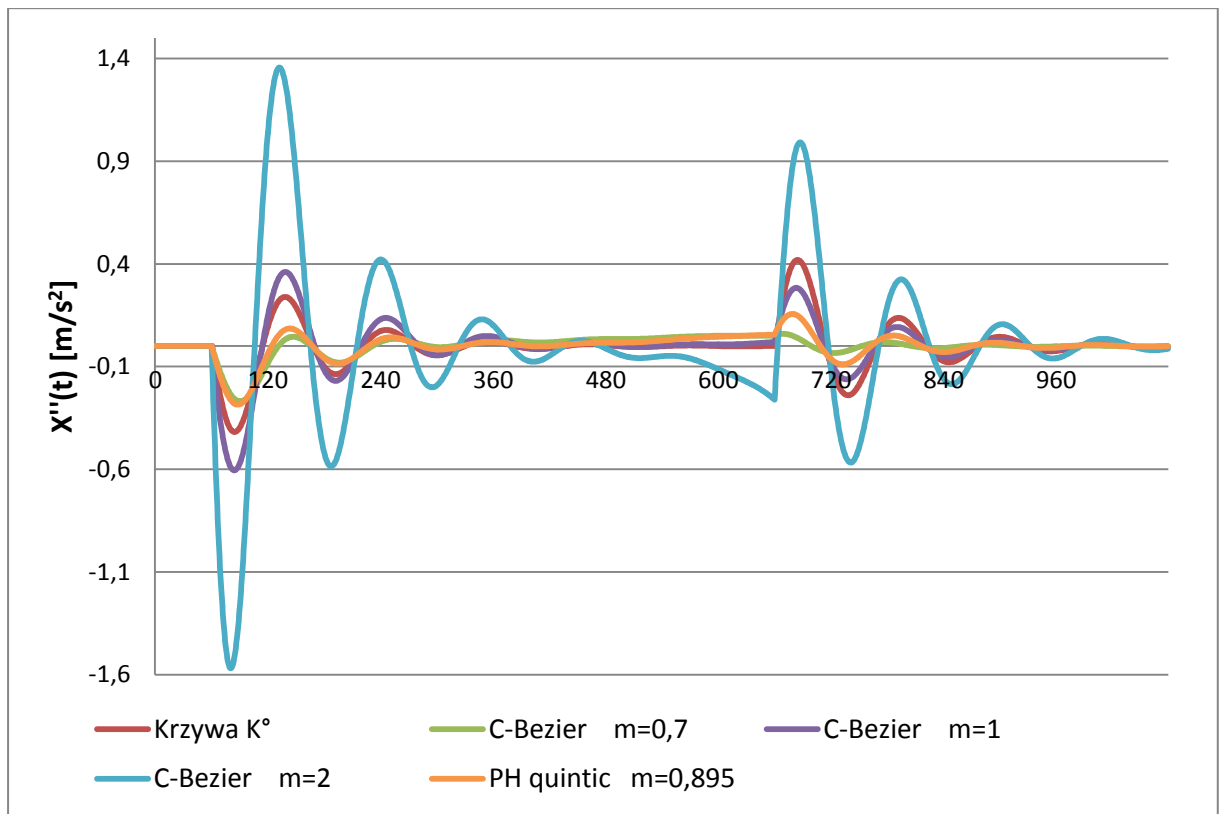
Rys. 22. Krzywizny porównywanych krzywych łączących łuki odwrotne

Na rysunku 23 pokazano wykresy pochodnej krzywizny porównywanych krzywych. Rysunek 24 przedstawia przyspieszenie w ruchu drgającym X'' .

Najlepsze właściwości dynamiczne posiada kubiczna krzywa C-Bezier z odpowiednio dobranym parametrem kształtu ($m = 0,7$) oraz PH krzywa Bezier piątego stopnia z $m = 0,895$. Stosowana w celach porównawczych krzywa typu K^0 , o liniowym przebiegu krzywizny, znajduje miejsce pomiędzy rozpatrywanymi krzywymi Bezier. Może to wskazywać na to, że wśród krzywych Bezier znajdują się rozwiązania, które okażą się korzystne do zastosowania w drogach kolejowych (a także w drogach kołowych).



Rys. 23. Pochodne krzywizny porównywanych krzywych łączących łuki odwrotne



Rys. 24. Przyspieszenie w ruchu drgającym X'' w funkcji długości krzywej l

PODSUMOWANIE

Krzywe C-Bezier (*cubic C-Bezier curve*) [1] oraz PH krzywe Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curve*) [2], pozwalające łączyć ze sobą łuki kołowe (o przebiegu zgodnym lub odwrotne) stanowią nową, wartą do rozważenia propozycję z punktu widzenia praktycznego zastosowania w układach geometrycznych dróg kołowych i kolejowych.

Algorytmy konstruowania wszystkich porównywanych krzywych C-Bezier pozwoliły na uzyskanie monotonicznej krzywizny (*S-shaped*) lub krzywizny z pojedynczym ekstremum (*C-shaped*), czyli warunku niezbędnego do ich zastosowania w drogach kolejowych [3].

Kubiczne krzywe C-Bezier oraz PH krzywe Bezier piątego stopnia porównano z krzywą typu K^0 o liniowym przebiegu krzywizny (uzyskaną za pomocą uniwersalnej metody modelowania krzywizny) poprzez zastosowanie wymienionych krzywych jako krzywych przejścia łączących dwa łuki odwrotne (*S-shaped*). Uzyskano przy tym dużą zgodność przebiegu wszystkich krzywych i wykazano możliwość ich praktycznego zastosowania.

Przeprowadzona analiza dynamiczna wykazała, że spośród analizowanych krzywych najlepsze właściwości dynamiczne posiada kubiczna krzywa C-Bezier z odpowiednio dobranym parametrem kształtu ($m = 0,7$). Również PH krzywa Bezier piątego stopnia wykazała się lepszymi właściwościami dynamicznymi niż referencyjna krzywa typu K^0 .

Wykonana analiza potwierdza celowość prowadzenia dalszych badań nad określeniem możliwości zastosowania analizowanych krzywych Bezier w wybranych przypadkach projektowania układów geometrycznych dróg kołowych i kolejowych.

DYNAMIC PROPERTIES EVALUATION OF THE SELECTED METHODS OF JOINING ROUTE SEGMENTS WITH DIFFERENT CURVATURE

Abstract

Comparison of the dynamic properties of the cubic C-Bezier curves and the PH quintic Bezier curves against the K^0 curve obtained using universal modeling curvature method is presented in the article. The dynamic properties and application prospects of the mentioned curves in the railway route design are presented on two cases of joining two circular arcs: with S-shaped and C-shaped transition curves (without the case when one circle is inside the other).

BIBLIOGRAFIA

1. Cai H., Wang G.: *A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter*. Journal of Zhejiang University Science A 2009 10(4) 562-569.
2. Habib Z., Sakai M.: *G^2 Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control*. Computer Aided Geometric Design 24 (2007) 252-266.
3. Koc W.: *Elementy teorii projektowania układów torowych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.
4. Koc W., Mieloszyk E.: *Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 33 (2) 239-261
5. Korn G.A., Korn T.M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. Warszawa: PWN 1983.

6. Mieloszyk E., Koc W.: *General dynamic method for determining transition curve equations*. Rail International – Schienen der Welt 1991, No. 10.
7. Palikowska K.: *Projektowanie układów geometrycznych toru kolejowego z zastosowaniem programowania ewolucyjnego*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2002.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. Władysław KOC – Politechnika Gdańska

dr inż. Katarzyna PALIKOWSKA – Politechnika Gdańska