

Optimal Power Flow by Interior Point and Non Interior Point Modern Optimization Algorithms

Authors

Marcin Połomski
Bernard Baron

Keywords

optimal power flow, interior point, non interior point

Abstract

The idea of optimal power flow (OPF) is to determine the optimal settings for control variables while respecting various constraints, and in general it is related to power system operational and planning optimization problems. A vast number of optimization methods have been applied to solve the OPF problem, but their performance is highly dependent on the size of a power system being optimized. The development of the OPF recently has tracked significant progress both in numerical optimization techniques and computer techniques application. In recent years, application of interior point methods to solve OPF problem has been paid great attention. This is due to the fact that IP methods are among the fastest algorithms, well suited to solve large-scale nonlinear optimization problems. This paper presents the primal-dual interior point method based optimal power flow algorithm and new variant of the non interior point method algorithm with application to optimal power flow problem. Described algorithms were implemented in custom software. The experiments show the usefulness of computational software and implemented algorithms for solving the optimal power flow problem, including the system model sizes comparable to the size of the National Power System.

DOI: 10.12736/issn.2300-3022.2013112

1. Introduction

The task of optimizing power flow in a power system (called optimal power flow, OPF) is to find a point in the operation of the system which is optimal from the point of view of the set objective function while satisfying all specified technical constraints. An OPF task is in fact a group of nonlinear programming tasks, and for systems whose dimensions are comparable to the size of the actual system, measured in thousands of buses, is in fact a large-scale optimization problem. Over the years there have been many methods of solving the OPF problem, using various optimization techniques, but their effectiveness and performance is largely dependent on the size of the analysed system.

The search for an effective method to solve the optimization problem with respect to power flow in a power system were initiated by Jacques Carpentier in 1962 [1], when the OPF task was first formulated as a nonlinear programming problem with equality and inequality nonlinear constraints. Since the OPF task was formulated, the vast number of methods have been developed to solve it. A good overview of optimization methods developed to be applied in OPF can be found in publications: [2, 3].

In recent years, the use of the interior point method (IP) to solve tasks associated with optimal power flow in power systems has become a focal point of interest to many authors [4, 5]. Mainly because these methods have been successfully used both to solve

linear and nonlinear mathematical programming problems, and have also proved to be particularly useful for large mathematical programming problems, they are now among the most efficient optimization algorithms for large-scale problems [6, 7].

Several decades have passed since the inception of the IP method. Over the years, this method has been used and implemented in different computational packages and numerical libraries [5], including MATPOWER [7] calculation package, dedicated to calculate analyses and optimize power flow, in which the said method is the most effective (in terms of calculation duration) [7].

The IP method, despite its well-established and proven position, as demonstrated in numerous studies and implementations, is still an inspiration for research focused on the design of new algorithms, and work on its constant improvement continues [4, 8]. Hybrid algorithms are also developed which combine features of the interior point method and evolutionary algorithms [9]. Despite the aforementioned facts, newly created mathematical models for the wide, still identified and classified group of optimization problems [10] motivate to review IP class methods (especially in the application to OPF), and to search for solutions for which the starting point is the well known and successfully used IP method, and to undertake attempts to improve it or redefine the problem. This research focuses on the complementary problem class, formulated in recent years [10].

2. The optimal power flow problem formulation

Finding the optimal power flow in a power system requires finding the minimum of a certain objective function, for example, one describing the total generation costs, losses in transmission lines or other suited for the OPF method variant applied to a particular problem. It is, however, most frequently formulated as the total cost of demand balancing [11], while meeting all the constraints, i.e. constraints resulting from equations of active and reactive power balance at system buses, and technical limitations, related mainly to: permissible voltage values at system buses, permissible active and reactive powers generated at productive buses and permissible flow of current (or power) in the system limbs. The issue being formulated, therefore, is, in fact, a mathematical programming problem [12], which, as a nonlinear programming problem with equality and inequality constraints, is written as follows:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{przy} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

where:

- \mathbf{x} – vector of decision variables, containing state variables (modules and angles of bus voltages) and control variables (active and reactive powers generated at production buses)
- f – objective function of the optimization task
- $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – equality constraints vector, containing active and reactive power flow equations at system buses
- $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – inequality constraints vector resulting from technical characteristics of devices used for generation and transmission of electric power.

In the classic case, the objective function f is used, in the form of variables concerning the total cost of power generation, as described by formula [12]:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_g} (a_i P_{gi}^2 + b_i P_{gi} + c_i) \quad (2)$$

where:

- P_{gi} – the value of active power generated at the i -th production bus
- Q_{gi} – the value of reactive power generated at the i -th production bus
- a_i, b_i, c_i – characterisation ratios of production costs of the i -th production bus
- N_g – number of production buses.

3. Interior point method for nonlinear programming

Given the algorithm structure in the interior point method, the basic transformation performed in order to apply it in a nonlinear programming problem (1) is the introduction of the vector of non-negative complementary variables \mathbf{z} , and, considering the

properties of the barrier method logarithmic function [13], the definition of the replacement problem, which in effect results in the modification of primary task (1) to the following form:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \left(f(\mathbf{x}) - \mu_k \sum_{i=1}^{n_g} \ln(z_i) \right) \\ \text{przy} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

where:

- \mathbf{z} – slack variables vector
- μ_k – barrier parameter
- n_g – number of inequality constraints.

The barrier parameter value μ_k is successively decreased to zero as iterations progress. The barrier parameter sequence $\{\mu_k\}$, with $\mu_k \rightarrow 0$ for $k=0, 1, \dots$ forms a corresponding sequence of optimization tasks defined by (3). As the barrier parameter value approaches zero, the sequence of obtained vectors $\{x^{(k)}\}$, which are successive solutions to the problem (3), aims at the optimal solution x^* of task (1). The local minimum of the objective function for a nonlinear programming problem, in the form of (3) is defined by a stationary point of the Lagrange function and Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions must be met, hence the following relationships must be fulfilled:

$$\nabla_{\mathbf{y}} L_{\mu}(\mathbf{y}^k, \mu_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\pi - \mu_k \mathbf{e} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} \\ \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \boldsymbol{\lambda} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

where

- $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$,
- $\mathbf{Z} = \text{diag}[z_i; i=1, \dots, n_g]$
- $\boldsymbol{\lambda}$ – vector of Lagrange multipliers corresponding to equality constraints
- $\boldsymbol{\pi}$ – vector of Lagrange multipliers, corresponding to inequality constraints
- $\mathbf{y} = [\mathbf{z}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}]^T$.

The system of nonlinear equations (4) is also the basis for the calculation process in the primal-dual interior point method (PDIPM). In order to solve the problem, Isaac Newton's method was used, whereby at each iteration step k , the system of equations is solved in the following form:

$$(\nabla_{\mathbf{y}} L_{\mu}(\mathbf{y}^k, \mu_k)) \Delta \mathbf{y}^k = -\nabla_{\mathbf{y}} L_{\mu}(\mathbf{y}^k, \mu_k) \quad (5)$$

where:

- $\Delta \mathbf{y} = [\Delta \mathbf{z}, \Delta \boldsymbol{\pi}, \Delta \mathbf{x}, \Delta \boldsymbol{\lambda}]^T$ – search direction vector
- $\nabla_{\mathbf{y}}^2 L_{\mu}$ – Jacobian matrix of the vector function $\nabla_{\mathbf{y}} L_{\mu}$

Equation (5) can be written in an equivalent form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} & \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T & \nabla_{\mathbf{x}}^2 L & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\pi - \mu_k \mathbf{e} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

wherein:

$$\nabla_x^2 L = \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})) + \nabla_x^2 (\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_x = \nabla_x f(\mathbf{x}) + (\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \boldsymbol{\lambda} + (\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \boldsymbol{\pi} \quad (8)$$

where:

$$\boldsymbol{\Pi} = \text{diag}[\pi_i, i = 1, 2, \dots, n_g], \mathbf{1} \text{ identity matrix.}$$

In the author's software, matrix coefficients (6) are determined in an analytical manner. A correction of the search direction vector, in a single Newton's method step, can be determined by solving a system of linear equations (6), directly or by solving an analytically reduced system of equations (9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \\ \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

wherein:

$$\mathbf{H} = \nabla_x^2 L + (\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\Pi} (\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{r}_x + (\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{Z}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_k \mathbf{e} + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad (11)$$

The determination of values of all elements of the search direction vector Δy is performed by first determining the value of vectors Δx and $\Delta \lambda$ from the solution of the reduced system of equations (9) and then values of Δz and $\Delta \pi$ vectors are determined, using respectively the following formulas:

$$\Delta \mathbf{z} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z} - \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (12)$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\pi} + (\mathbf{Z}^{-1}) (\boldsymbol{\mu}_k \mathbf{e} - \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{z}) \quad (13)$$

which allows obtaining a complete solution of the system (6) with a reduced system of equations.

In the iterative process, at the k -th step in PDIPM, new values of primal variables x , z are determined, and of dual variables λ , π in the optimization task, by the following formulas:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k^p \Delta \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k^p \Delta \mathbf{z}_k \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k^d \Delta \boldsymbol{\lambda}_k, \quad \boldsymbol{\pi}_{k+1} = \boldsymbol{\pi}_k + \alpha_k^d \Delta \boldsymbol{\pi}_k \quad (15)$$

where:

$\alpha_p^k \in (0, 1]$, $\alpha_d^k \in (0, 1]$ – scalar variables which are the step length values in the search vector direction.

Step lengths α_p^k and α_d^k at the k -th step are determined by the formulas [14]:

$$\alpha_k^p = \min \{1, \gamma \min \{-z_i / \Delta z_i \mid \Delta z_i < 0\}\} \quad (16)$$

$$\alpha_k^d = \min \{1, \gamma \min \{-\pi_i / \Delta \pi_i \mid \Delta \pi_i < 0\}\} \quad (17)$$

where:

$\gamma \in (0, 1)$ – a constant defined as the so-called safety factor.

The safety factor value usually reaches a value close to one, in the software $\gamma = 0.99995$ is usually applied, and the barrier parameter value μk is in subsequent iterations reduced to zero, according to the following rule:

$$\mu_{k+1} = \sigma (\mathbf{z}_k^T \boldsymbol{\pi}_k) / n_g \quad (18)$$

where:

σ – scaling parameter.

If, for the assumed accuracy values at the k -th iteration, the conditions for convergence are met, then the convergence criterion of the IP method algorithm is reached and the algorithm is terminated. The iteration counter allows checking whether the preset maximum number of iterations k_{max} has not been exceeded. In order to determine the convergence criterion of the algorithm, at the k -th algorithm iteration step, the algorithm termination conditions are checked due to: primal variables, dual variables, complementary gap, the objective function.

4. Non-interior point method for nonlinear programming

An important feature of the IP method is the fact that the search for the optimal solution begins from the very interior of the feasible region, due to the complementary conditions of the task (strict positivity conditions), and remains within the search area during the entire optimization process. This feature affects the convergence process, and as a result, the number of algorithm iterations and time needed to find the solution (which is confirmed by numerical experiments carried out during research). Attempts undertaken by many authors to modify the above technique resulted in creating a number of algorithmic solutions as well as new methods and concepts over the years, such as the unlimited point algorithm [15]. One promising group of algorithms that do not require the transformation of variables in the optimization task, unlike the unlimited point algorithm, are sequential algorithms whose concepts were developed in the field of complementary problems [16]. Among them there is a particularly interesting group of algorithms, in which, smoothing NCP functions were used to handle complementary conditions [16]. Satisfactory results of these algorithms, obtained for the class of complementary problems, and papers proposing the application of this concept to solve the OPF task [17] indicate these algorithms as a promising alternative to the well-known IP method, encouraging examination of them and making attempts to design new algorithm variants in this class, at the same time not being limited to purely theoretical considerations. The concept proposed (among others) by Christian Kanzov in his paper [18] and by other authors for linear and nonlinear complementary problems involves the introduction of the so-called smoothing function with parameter $\mu > 0$ (the so-called smoothing parameter – as opposed to the barrier parameter in IP method) that meets the following equivalence:

$$\varphi_\mu(\pi, z) = 0 \Leftrightarrow \pi > 0, z > 0, \pi z = \mu \quad (19)$$

dla $\mu > 0$

and the solution of the system of equations, sequentially reducing $\mu \rightarrow 0$. As a result of tests, the best results were obtained using a modified Fischer-Burmeister function in the following form:

$$\varphi_\mu(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2\mu} \quad (20)$$

The system of equations resulting from Karush-Kuhn-Tucker conditions for optimization task (1), after the transformation of non-equality constraints into equality constraints restriction does not directly take the complementary problem form. However, the concept proposed for CP complementary problems may be applied to complementary conditions $Z\pi=0$, obtaining in consequence the following system of nonlinear equations:

$$\Psi_\mu(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \Phi_\mu(z, \pi) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} \\ \nabla_x f(\mathbf{x}) + (\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \lambda + (\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \pi \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (21)$$

where: $\Phi_\mu(z, \pi) = [\varphi_\mu(z_i, \pi_i); i = 1, 2, \dots, n_g]^T, y = [z, \pi, x, \lambda]^T$.

Expressing complementary conditions using the function in the form (19) results in automatic fulfillment of complementary conditions, and at the same fulfills the condition of non-negativity of complementary variables and dual variables. It is assumed that the system of nonlinear equations (21) is solved sequentially, for $\mu \rightarrow 0$ in subsequent iterations of optimization algorithms. At the k -th iterative step in the damped Newton's method, the correction in the solution of nonlinear equations (21) is determined by solving the following sparse system of linear equations:

$$\nabla_y \Psi_\mu(\mathbf{y}^k) \Delta \mathbf{y}^k = -\Psi_\mu(\mathbf{y}^k) \quad (22)$$

where:

$\Delta y \Psi_\mu(\mathbf{y}^k)$ – Jacobian matrix of the vector function $\Psi_\mu(\mathbf{y}^k)$ at point $\mathbf{y}^k, \Delta y = [\Delta z, \Delta \pi, \Delta x, \Delta \lambda]^T$.

The solution of the system of equations (22) corresponds to the solution, at the k -th iteration step, of a linear system of equations, which in the matrix notation takes the following form (in the variable record, upper iteration index k is omitted for clarity):

$$\begin{bmatrix} \nabla_z \Phi_\mu & \nabla \Phi_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})^T & \nabla_x^2 L & \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = -\Psi_\mu(\mathbf{y}) \quad (23)$$

where:

$$\nabla_z \Phi_\mu = \text{diag} \left[\partial \varphi_\mu(z_i, \pi_i) / \partial z_i; i = 1, 2, \dots, n_g \right]$$

$$\nabla_\pi \Phi_\mu = \text{diag} \left[\partial \varphi_\mu(z_i, \pi_i) / \partial \pi_i; i = 1, 2, \dots, n_g \right]$$

In the implemented algorithm, individual components of the main matrix of system of equations (23) were determined analytically. In addition, the main matrix of system (23) is indeed a sparse matrix and its components (submatrices) are also sparse. In the OPF task, for systems with dimensions similar to the size of the actual power system, it can reach very large values (of the order of tens of thousands, Tab. 1). The new value of the vector of variables y is determined according to the following equation:

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \alpha^k \Delta \mathbf{y}^k \quad (24)$$

where:

k – number of iterations,

α^k – step length in the direction of vector $\Delta \mathbf{y}^k$.

The choice of step length α^k is based on the recurrence strategy, with Armijo search rule. It involves testing the value of a certain function, which is the distance measure from the solution point. This function has a value of zero only when the solution is found. Naturally, it takes the following form:

$$\theta_\mu(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\Psi_\mu(\mathbf{y})\|^2 = \frac{1}{2} \Psi_\mu(\mathbf{y})^T \Psi_\mu(\mathbf{y}) \quad (25)$$

The choice of step length α^k is performed according to the following rule: for set values of coefficients, $\sigma_1 \in (0,1], \alpha_i \in (0,1]$ find such:

$$\alpha^k = \max \{ \alpha_i^p : p = 0, 1, 2, \dots \} \quad (26)$$

for which the following condition is fulfilled:

$$\theta_\mu(\mathbf{y}^k + \alpha_i^p \Delta \mathbf{y}^k) \leq (1 - \sigma_1 \alpha_i^p) \theta_\mu(\mathbf{y}^k) \quad (27)$$

For step length α^k determined in this manner, the new value of the variable vector is determined according to equation (24). The system of nonlinear equations (21), parameterised by μ (smoothing parameter) is solved sequentially for $\mu \rightarrow 0$ in each subsequent iteration of Newton's method. When the value of the smoothing parameter μ in system of equations (21) reaches zero (or sufficiently close to zero), the final solution is reached, which is the implication of property (19). However, this requires that the smoothing parameter be modified to a similar extent as the barrier parameter in the interior point method. Based on considerations, research and numerical experiments, a new variant of the method was proposed, by modifying the so far developed algorithms in the non-interior point method (NIP), used in a nonlinear programming problem, in particular, in the OPF task, formulated as a nonlinear programming task. A modification is proposed in which the smoothing parameter μ is not treated as a parameter, but as an additional variable in the system of equations (21). This concept has been proposed with respect to algorithms dedicated to complementary problems [19]. This modification reduces the system of equations (21) to the following form:

$$\Psi(\mathbf{y}, \mu) = \begin{bmatrix} \Phi_{\mu}(\mathbf{z}, \pi) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} \\ \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \lambda + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \pi \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \sigma \mu \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (28)$$

In this case, the function of parameter $\sigma \in (0,1)$ is similar to the role of the scaling parameter in the IP method. The system of linear equations corresponding to (23), resulting from the used Newton's method, takes the following form:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}} \Phi_{\mu} & \nabla_{\pi} \Phi_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{\mu} \Phi_{\mu} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T & \nabla_{\mathbf{x}}^2 L & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \pi \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = -\Psi(\mathbf{y}, \mu) \quad (29)$$

where:

$$\nabla_{\mu} \Phi_{\mu} = \text{diag} \left[\partial \varphi_{\mu}(z_i, \pi_i) / \partial \mu; i = 1, 2, \dots, n_g \right]$$

Another modification is an analytical reduction of the system of equations (29), which helps obtain the following form of the reduced system:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (30)$$

where:

$$\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{x}}^2 L + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T (\nabla_{\mathbf{z}} \Phi_{\mu})^{-1} (\nabla_{\pi} \Phi_{\mu}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_{\pi} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T (\nabla_{\pi} \Phi_{\mu})^{-1} (\nabla_{\mathbf{z}} \Phi_{\mu} \mathbf{r} - \Phi_{\mu}(\mathbf{z}, \pi) + \sigma \mu \nabla_{\mu} \Phi_{\mu})$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \lambda + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \pi$$

$$\mathbf{r}_{\pi} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}$$

Solving a system of linear equations (30), a correction of vectors $\Delta \mathbf{x}$ and $\Delta \lambda$ is obtained. Other correction vectors for the system of equations (29) are determined in a sequence by the following formulas:

$$\Delta \mathbf{z} = -(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (31)$$

$$\Delta \pi = (\nabla_{\pi} \Phi_{\mu})^{-1} (-\Phi_{\mu}(\mathbf{z}, \pi) - \nabla_{\mu} \Phi_{\mu} \Delta \mu - \nabla_{\mathbf{z}} \Phi_{\mu} \Delta \mathbf{z}) \quad (32)$$

$$\Delta \mu = -\sigma \mu \quad (33)$$

Another modification is the method of determining the step length α^k , at the k -th iteration of Newton's method. The recurrence method with the Armijo search rule was used, but instead of exploring the full norm of vector $\Psi(\mathbf{y}, \mu)$, it is proposed that only the complementary part be used $\Phi_{\mu}(\mathbf{z}, \pi)$, and the search rule be replaced as follows:

$$\alpha^k = \max \left\{ \alpha_1^p : p = 0, 1, 2, \dots; \theta_{\mu}(\mathbf{y}^k + \alpha_1^p \Delta \mathbf{y}^k) \leq \beta (1 - \sigma \alpha_1^p) \mu^k \right\} \quad (34)$$

where:

$$\beta \geq \theta_{\mu^0}(\mathbf{y}^0) / \mu^0, \theta_{\mu}(\mathbf{y}) = 0.5 \Phi(\mathbf{y}, \mu)^T \Phi(\mathbf{y}, \mu)$$

5. Computational experiments

A natural consequence of the theoretical considerations are computational experiments, allowing confirmation of the practical usefulness of the proposed algorithmic solutions. During tests, the implementation of proprietary software (PSManager) was carried out, the user interface of which is depicted in Fig. 1. The software allows solving the optimal power flow problem, using implemented optimization algorithms of interior point and non interior point. The software uses sparse matrix techniques, for efficient storing of data used in the program, and dedicated algorithms for solving sparse systems of linear equations are used. Computational experiments were carried out for a set of test systems whose statistics are presented in Table 1. Test system data whose statistics are collected in Tab. 1, is derived from the MATPOWER package, available for scientific and educational applications which allows solving OPF using various optimization methods, but the most effective method (as far as duration is concerned), with nonlinear programming method for OPF task implemented in it, is the interior point method (PDIPM) [14]. The set of test data contains system models whose size is comparable to the size of the actual power system (examples Test Case and Case-2383-2746 in Tab. 1). These models are variants of the KSE, which is part of the European UCTE system. All calculations presented in this chapter were carried out on a computer with an Intel® Core™ 2 Quad 2.4GHz with 4GB of RAM, running on 32-bit Windows operating system. Sizes of the tested power systems translate directly into the range of the optimization task, in this case a nonlinear programming problem. Tab. 1 shows the extent of the nonlinear programming problem (1), formulated for each of the test systems and the size of the main matrix of the system of linear equations, formulated in the calculation process of optimization non-interior point method (for the proposed method variant). Tab. 2 shows the results of experiments carried out using an algorithm interior point method for a set of test systems. Experiments were carried out to study the effect of the reduction of the system of linear equations (6), on the duration of calculations. Tab. 3 summarises results of identical experiments conducted with the proposed variant of the non-interior point method, testing not only the algorithm convergence process, but also the effect of the applied analytical reduction of the system of linear equations on the computing time.

As a starting point for this calculation, one in which initial values of angles were set at zero, and the values of voltage, active and reactive power modules at production buses were set at the average calculated from the minimum and maximum permissible values. It should be noted that the experiments whose results are collected in Tab. 2 and 3 were carried out repeatedly, and computation times presented in the tables are mean values from a series of measurements. For a

| Name | Number of buses | Number of generator buses | Number of load buses | Number of branches | The number of optimization task variables | Number of equality constraints | Number of inequality constraints | Dimensions of main URL matrix, formulated in the calculation of the algorithm in non-interior point optimization* | |
|-----------|-----------------|---------------------------|----------------------|--------------------|---|--------------------------------|----------------------------------|---|-----------|
| | N_w | N_g | N_o | N_l | n_x | n_h | n_g | N_{full} | N_{red} |
| Case-9 | 9 | 3 | 6 | 9 | 24 | 18 | 48 | 139 | 42 |
| Case-30 | 30 | 6 | 24 | 41 | 72 | 60 | 166 | 465 | 132 |
| Case-118 | 118 | 54 | 64 | 186 | 344 | 236 | 824 | 2,229 | 580 |
| Case-300 | 300 | 69 | 231 | 411 | 738 | 600 | 1,698 | 4,735 | 1,338 |
| Case-2383 | 2,383 | 327 | 2,056 | 2,896 | 5,420 | 4,766 | 11,866 | 33,191 | 10,186 |
| Case-2746 | 2,746 | 364 | 2,382 | 3,279 | 6,220 | 5,492 | 13,506 | 38,725 | 11,712 |

* concerns the size of the main matrix in the system of linear equations (29), which corresponds to column N_{full} and (30), which corresponds to a table N_{red} .

Tab. 1. Statistics of test systems used in numerical experiments

| Name | IP_{full} | | IP_{red} | | Iteration number | Objective function value |
|-----------|------------------|---------------------|------------------|---------------------|------------------|--------------------------|
| | Calculation time | Mean iteration time | Calculation time | Mean iteration time | | |
| | t, ms | t_{it}, ms | t, ms | t_{it}, ms | N_{iter} | $f_{minCost}$ |
| Case-9 | 18 | 1.6 | 15 | 1.3 | 11 | 5,296.69 |
| Case-30 | 73 | 5.6 | 61 | 4.6 | 13 | 576.89 |
| Case-118 | 440 | 24.4 | 351 | 19.5 | 18 | 129,660.69 |
| Case-300 | 1,597 | 55.0 | 1,247 | 43.0 | 29 | 719,725.08 |
| Case-2383 | 19,407 | 485.1 | 15,387 | 384.6 | 40 | 1,862,367.03 |
| Case-2746 | 20 335 | 564.8 | 16,081 | 446.7 | 36 | 1,605,145.58 |

IP_{full} – corresponds to IP method algorithm with the use of a non-reduced matrix (6) in the calculation process, IP_{red} – corresponds to IP algorithm method with the use of an analytically reduced system of linear equations (9)

Tab. 2. Results of numerical experiments conducted using the interior point method algorithm

| Name | NIP_{full} | | NIP_{red} | | Iteration number | Objective function value |
|-----------|------------------|---------------------|------------------|---------------------|------------------|--------------------------|
| | Calculation time | Mean iteration time | Calculation time | Mean iteration time | | |
| | t, ms | t_{it}, ms | t, ms | t_{it}, ms | N_{iter} | $f_{minCost}$ |
| Case-9 | 12 | 1.0 | 13 | 1.1 | 12 | 5,296.69 |
| Case-30 | 101 | 5.9 | 75 | 4.4 | 17 | 576.89 |
| Case-118 | 440 | 28.0 | 303 | 20.2 | 15 | 129,660.69 |
| Case-300 | 1,058 | 62.2 | 764 | 44.9 | 17 | 719,725.08 |
| Case-2383 | 13,761 | 550.4 | 9,883 | 395.3 | 25 | 1,862,367.03 |
| Case-2746 | 15 386 | 641.1 | 10 916 | 454.8 | 24 | 1,605,145.58 |

NIP_{full} – corresponds to NIP method algorithm with the use of a non-reduced matrix (29) in the calculation process, NIP_{red} – corresponds to NIP algorithm method with the use of an analytically reduced system of linear equations (30)

Tab. 3. Results of numerical experiments conducted using the non interior point method algorithm

specific test system and the selected method of optimization, in a series of experiments, convergence was obtained to the same solution point (both with respect to the value of the objective function and variables of vector y) with preset calculation accuracy ($\epsilon = 1e - 6$). In addition, for each test case a set of default parameters was used, which were modified to obtain the best calculation times. To verify the obtained results, further numerical experiments were carried out to compare the results obtained using proprietary software and the results obtained using the MATPOWER package. As

an example, Tab. 4 shows the results obtained for a 9-bus system. The comparison was made as to the value of the vector of variables $x = [U, \varphi, Pg, Qg]T$ for an optimization task containing variables: modules and bus voltage angles, active and reactive powers generated at production buses.

In this analysis, the software uses the proposed variant of the non-interior point method, and MATPOWER software used the interior point method (PDIPM) implemented in it. A comparative analysis of results was performed for:

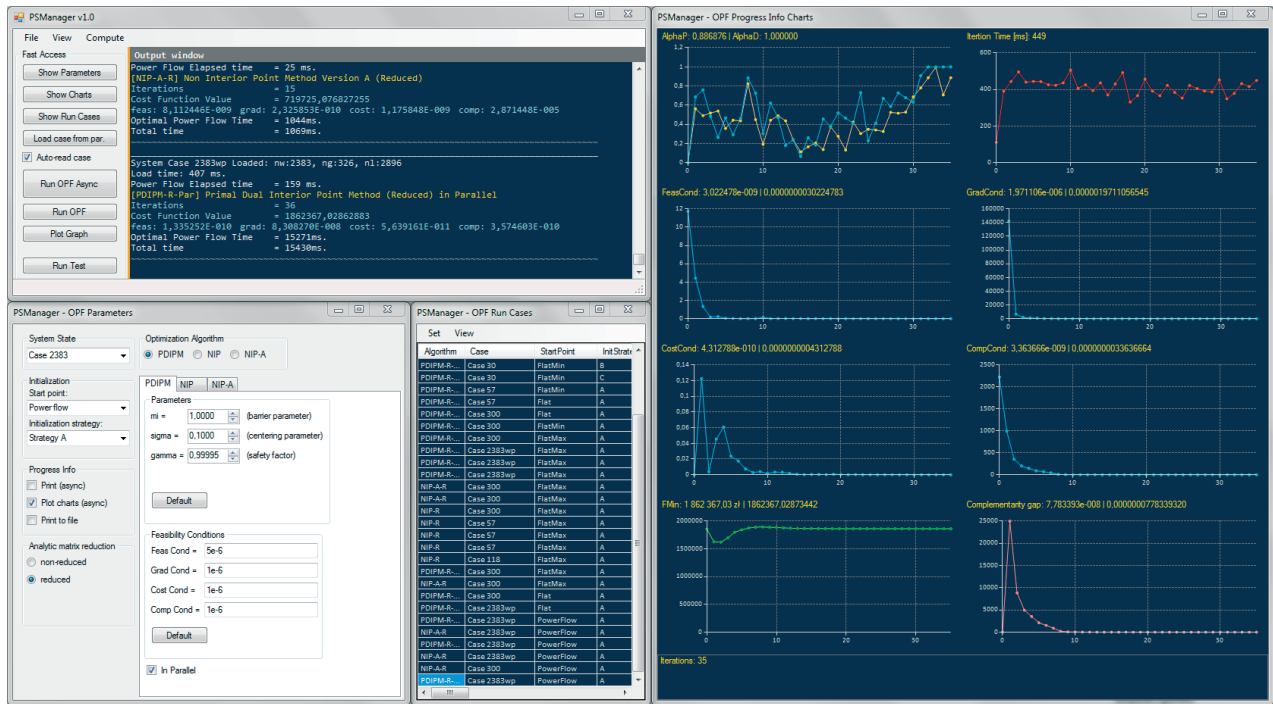


Fig. 1. User interface in PSManger software

| Element of vector x | Bus No. | Copyrighted software (NIP method) | MatPower (PDIPM method) | a-b |
|---------------------|---------|-----------------------------------|-------------------------|------------|
| | | a | b | |
| U [p.u.] | 1 | 1.09995644 | 1.09995086 | 5.5812E-06 |
| | 2 | 1.09736195 | 1.09736288 | 9.3186E-07 |
| | 3 | 1.08662656 | 1.08662735 | 7.8967E-07 |
| | 4 | 1.09419026 | 1.09418625 | 4.0073E-06 |
| | 5 | 1.08442711 | 1.08442437 | 2.745E-06 |
| | 6 | 1.09999925 | 1.09999914 | 1.0593E-07 |
| | 7 | 1.08948873 | 1.08948862 | 1.0545E-07 |
| | 8 | 1.09999927 | 1.09999917 | 1.0038E-07 |
| | 9 | 1.07173372 | 1.07173093 | 2.7882E-06 |
| φ [°] | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 4.893169673 | 4.893109098 | 6.057E-05 |
| | 3 | 3.249065707 | 3.249004939 | 6.077E-05 |
| | 4 | -2.46308933 | -2.463110555 | 2.123E-05 |
| | 5 | -3.982309771 | -3.98235179 | 4.202E-05 |
| | 6 | 0.602425198 | 0.602365867 | 5.933E-05 |
| | 7 | -1.196731461 | -1.196790286 | 5.883E-05 |
| | 8 | 0.905181601 | 0.905123821 | 5.778E-05 |
| | 9 | -4.615577443 | -4.615620948 | 4.351E-05 |
| Pg [MW] | 1 | 89.7986243 | 89.7986138 | 1.044E-05 |
| | 2 | 134.320647 | 134.320652 | 5.572E-06 |
| | 3 | 94.1874319 | 94.1874386 | 6.706E-06 |
| Qg [MVar] | 1 | 12.94178757 | 12.93873592 | 3.051E-03 |
| | 2 | 0.045924901 | 0.047729505 | 1.805E-03 |
| | 3 | -22.6213713 | -22.6197302 | 1.641E-03 |

Tab. 4. Comparison of results obtained for system Case-9

Case-9, obtaining:

$$\|U^{(a)} - U^{(b)}\|_{\infty} = 5,58e-06, \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_{\infty} = 6,08e-05, \|P_g^{(a)} - P_g^{(b)}\|_{\infty} = 1,04e-05, \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_{\infty} = 3,05e-03,$$

Case-30, obtaining:

$$\|U^{(a)} - U^{(b)}\|_{\infty} = 4,96e-04, \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_{\infty} = 3,30e-04, \|P_g^{(a)} - P_g^{(b)}\|_{\infty} = 7,47e-04, \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_{\infty} = 7,81e-03,$$

Case-300, obtaining:

$$\|U^{(a)} - U^{(b)}\|_{\infty} = 1,10e-03, \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_{\infty} = 4,55e-03, \|P_g^{(a)} - P_g^{(b)}\|_{\infty} = 6,47e-03, \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_{\infty} = 9,71e-03,$$

where: indices (a), (b) were used respectively to denote values of the variable vector obtained by copyrighted software PSManger (a) and MATPOWER (b).

It should be noted that one of the reasons for implementing the interior point method algorithm in the developed software (also implemented in the MATPOWER computational package) was the implementation of a calculation method that would provide a reference point for research using the non-interior point method algorithm.

It should also be noted that the primary criterion in the algorithm assessment was to meet the equality and inequality constraints in the optimization task (with a preset accuracy), determining the fulfillment of power balance at each system bus, as well as technical limitations.

6. Conclusions

Using the developed algorithm variant with the non interior point method, as presented in the paper, in the optimization of power flow in power systems enables reducing the number of iterations of the algorithm with respect to the interior point method, which

translates into a reduction of the computation time. An analytical generation of matrix elements and vectors used in the software allows the highest possible performance in computing (in terms of completion time). A significant impact on the calculation time will be used to reduce the analytical system of linear equations, formulated in the calculation method of IP and NIP. A significant impact on the effectiveness of the software is exerted by the correct selection of data structures and algorithms working on them. Computational experiments for the analysed set of test data confirmed the usefulness of computational software and implemented algorithms for solving the optimal power flow problem, including the system model sizes comparable to the size of the National Power System.

REFERENCES

1. Carpentier J., Contribution e l'etude do Dispatching Economique, *Bull. Soc. Francaise des Electriciens*, Vol. 3, pp. 431–447, August 1962.
2. Bansal R.C., Optimization Methods for Electric Power Systems: An Overview, *International Journal of Emerging Electric Power Systems* 2005, Vol. 2, No. 1.
3. Pandya K. S., Joshi S. K., A Survey of Optimal Power Flow Methods, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Vol. 4, No. 5, pp. 450–458, May 2008.
4. Capitanescu F. i in., Interior-point based algorithms for the solution of optimal power flow problems, *Electric Power Systems Research* 2007, Vol. 77, No. 5–6, pp. 508–517.
5. Quintana V.H., Torres G.L., Medina-Palomo J., Interior-point methods and their applications to power systems: a classification of publications and software codes, *IEEE Transactions on Power Systems* 2000, Vol. 15, No. 1, pp. 170–176.
6. Benson H. Y., Shanno D.F., Vanderbei R.J., A Comparative Study of Large-Scale Nonlinear Optimization Algorithms, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, Tech. Rep. ORFE 01-04, 2001.
7. Zimmerman R. D., Murillo-Sánchez C.E., Thomas R.J., MATPOWER: Steady-State Operations, Planning and Analysis Tools for Power Systems Research and Education, *IEEE Transactions on Power Systems* 2011, Vol. 26, No. 1, pp. 12–19.
8. Xie L., Chiang H., An enhanced multiple predictor-corrector interior point method for optimal power flow, *IEEE Power and Energy Society General Meeting* 2010, pp. 1–8.
9. Duvvuru N., Swarup K. S.: A Hybrid Interior Point Assisted Differential Evolution Algorithm for Economic Dispatch, *IEEE Transactions on Power Systems* 2011, Vol. 26, No. 2, pp. 541–549.
10. Billups S. C., Murty K. G., Complementarity problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, special issue on numerical analysis 2000, vol. IV, Optimization and nonlinear equations, Vol. 124, No. 1–2, pp. 303–318.
11. Kocot H., Korab R., Żmuda K., Planowanie pracy jednostek wytwórczych na rynku energii elektrycznej – przegląd stosowanych metod, *Politechnika Śląska Publishers, Kwartalnik Elektryka* 2009, Journal 3, Vol. 211, no. 1827, pp. 7–31.
12. Kremens Z., Sobierajski M., *Analiza systemów elektroenergetycznych*, WNT, 1996.
13. Quintana V.H., Torres G.L., Introduction to interior-point methods, *IEEE PICA*, Santa Clara, CA, 1999.
14. Rider M.J. i in., Towards a fast and robust interior point method for power system applications, *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution* 2004, Vol. 151, No. 5, pp. 575–581.
15. Tognola G., Bacher R., Unlimited point algorithm for OPF problems, *IEEE Transactions on Power Systems* 1999, Vol. 14, pp. 1046–1054.
16. De Luca T., Facchinei F., Kanzow C., A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems, *Mathematical Programming* 1996, vol. 75, pp. 407–439.
17. Torres G. L., Quintana V.H., Optimal power flow by a nonlinear complementarity method, *IEEE Transactions on Power Systems* 2000, Vol. 15, pp. 1028–1033.
18. Kanzow C., Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 1996, Vol. 17, pp 851–868.
19. Burke J., Xu S., A non interior predictor-corrector path following algorithm for the monotone linear complementarity problem, *Mathematical Programming* 1997, Vol. 87, pp. 113–130.

Bernard Baron

Silesian University of Technology

e-mail: bernard.baron@polsl.pl

Graduated from the Silesian University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and obtained a degree in mathematics at the Faculty of Mathematics and Physics at the Jagiellonian University. Author and co-author of over 350 publications, including many treatises and monographs, academic books, and scientific books published nationwide. Author and co-author of patents. Author of unpublished papers, expert opinions, and experimental design research. Supervisor of six completed PhD theses. Won numerous awards for his research and scientific activities. His research interests include: analysis of the magnetic field around power lines and high-current circuits, using structure programming in the modelling of electrical and power systems.

Marcin Połomski

Silesian University of Technology

e-mail: marcin.polomski@polsl.pl

Graduate of the Silesian University of Technology. Today employed as a lecturer at the Institute of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Electrical Engineering, his alma mater.

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 132–139. When referring to the article please refer to the original text.

PL

Optymalizacja rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym z zastosowaniem nowoczesnych algorytmów optymalizacji interior point oraz non interior point

Autorzy
Marcin Połomski
Bernard Baron

Słowa kluczowe
optymalizacja rozptyłu mocy, interior point, non interior point

Streszczenie

W artykule zaprezentowano algorytm prymalno-dualnej metody punktu wewnętrznego oraz nowy wariant metody optymalizacji non interior point, w zastosowaniu do zadania optymalizacji rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym. Opisane algorytmy zostały zaimplementowane w autorskim oprogramowaniu. Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe, wskazują przydatność oprogramowania i zaimplementowanych algorytmów w zakresie wyznaczenia rozwiązania zadania optymalizacji rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym, w tym dla modelu systemu o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami Krajowego Systemu Elektroenergetycznego (KSE).

1. Wprowadzenie

Zadanie optymalizacji rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym (ang. *optimal power flow*, OPF) polega na poszukiwaniu takiego punktu pracy systemu, który jest optymalny z punktu widzenia zadanej funkcji celu, przy jednoczesnym spełnieniu wszystkich zadanych ograniczeń technicznych. Zadanie OPF należy w istocie do grupy zadań programowania nieliniowego, a dla systemów, których rozmiary porównywalne są z rozmiarami systemu rzeczywistego, mierzonego w tysiącach węzłów, stanowi w istocie zadanie optymalizacyjne wielkiej skali. Na przestrzeni lat opracowano wiele metod rozwiązania zadania OPF, wykorzystując różne techniki optymalizacji, jednak ich skuteczność i wydajność jest w dużym stopniu uzależniona od wielkości rozpatrywanego systemu.

Poszukiwania efektywnej metody rozwiązania zadania optymalizacji rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym zapoczątkowane zostały przez Jacquesa Carpentiera w 1962 roku [1], kiedy to po raz pierwszy zostało sformułowane zadanie OPF jako zadanie programowania nieliniowego z nieliniowymi ograniczeniami równościowymi i nierównościami. Od momentu sformułowania zadania OPF opracowane zostały najróżnorodniejsze metody jego rozwiązania. Szeroki przegląd metod optymalizacji opracowanych w zastosowaniu do zadania OPF można znaleźć m.in. w publikacjach: [2, 3].

W ostatnich latach zastosowanie metod punktu wewnętrznego (ang. *interior point*, IP) do rozwiązania zadania optymalnego rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym znalazło się w *meritum* zainteresowania wielu autorów [4, 5]. Głównie z tego powodu, że metody te zostały z powodzeniem użyte zarówno do rozwiązania problemów programowania matematycznego liniowego, jak i nieliniowego, a także okazały się szczególnie przydatne dla dużych problemów programowania matematycznego i obecnie należą do grupy najbardziej

wydajnych algorytmów optymalizacyjnych dla problemów wielkiej skali [6, 7].

Od czasu powstania metody IP upłynęło kilka dekad. Na przestrzeni lat metoda ta była implementowana oraz wykorzystywana w różnych pakietach obliczeniowych i bibliotekach numerycznych [5], w tym w dedykowanym m.in. do obliczeń analizy i optymalizacji rozptyłu mocy pakiecie obliczeniowym MATPOWER [7], w którym wspomniana metoda stanowi najefektywniejszą (pod względem czasu realizacji obliczeń) wykorzystywaną w nim metodę [7]. Metoda IP, pomimo swej ugruntowanej i potwierdzonej wieloma badaniami oraz implementacjami pozycji, wciąż stanowi inspirację do prowadzenia badań w zakresie konstrukcji nowych algorytmów i nadal trwają prace nad ciągłym jej udoskonalaniem [4, 8]. Powstają również algorytmy hybrydowe, łączące w sobie cechy metody punktu wewnętrznego oraz algorytmów ewolucyjnych [9]. Mimo wyżej wymienionych faktów nowo powstałe modele matematyczne dla szerokiej, wciąż identyfikowanej i klasyfikowanej grupy problemów optymalizacyjnych [10] motywują do rewizji metod klasy IP (szczególnie w zastosowaniu dla problemu OPF), do poszukiwań, dla których punkt wyjścia stanowi dobrze znana i z powodzeniem używana metoda IP oraz do podejmowania prób jej udoskonalania bądź redefinicji zagadnienia. Poszukiwania te koncentrują się wokół sformułowanej w ostatnich latach klasy problemów komplementarnych [10].

2. Zadanie optymalnego rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym

Poszukiwanie optymalnego rozptyłu mocy w systemie elektroenergetycznym wymaga znalezienia minimum pewnej funkcji celu, np. opisującej sumaryczne koszty wytwarzania energii, straty w liniach przesyłowych lub innej charakterystycznej dla wariantu metody OPF danego zagadnienia. Najczęściej jednak sformułowanej jako sumaryczny koszt bilansowania zapotrzebowania

[11], przy jednoczesnym spełnieniu wszystkich ograniczeń, tj. ograniczeń wynikających z równań bilansu mocy czynnej i biernej w węzłach systemu oraz ograniczeń technicznych, obejmujących przede wszystkim: dopuszczalne wartości napięć w węzłach systemu, dopuszczalne wartości mocy czynnych i biernych generowanych w węzłach wytwórczych oraz dopuszczalnych przepływów prądu (lub mocy) w gałęziach systemu.

Tak sformułowane zagadnienie stanowi w istocie zadanie programowania matematycznego [12], które jako zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami równościowymi i nierównościami zapisuje się:

$$\min_x f(\mathbf{x})$$

$$\text{przy } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

gdzie:

\mathbf{x} – wektor zmiennych zadania optymalizacji zawierający zmienne stanu (moduły i kąty napięć węzłowych) i zmienne sterujące (moce czynne i bierne generowane w węzłach wytwórczych)

f – funkcja celu zadania optymalizacji,
 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – wektor ograniczeń równościowych, zawierający równania bilansu mocy czynnej i biernej w węzłach systemu

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – wektor ograniczeń nierównościami, wynikający z technicznych właściwości urządzeń służących do wytwarzania i przesyłu energii elektrycznej.

W klasycznym przypadku stosuje się funkcję celu f , w postaci zmiennych całkowitych kosztów wytwarzania energii, opisaną wzorem [12]:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_g} (a_i P_{gi}^2 + b_i P_{gi} + c_i) \quad (2)$$

gdzie:

P_{gi} – wartość mocy czynnej generowanej w i -tym węźle wytwórczym
 Q_{gi} – wartość mocy biernej generowanej w i -tym węźle wytwórczym
 a_i, b_i, c_i – współczynniki charakterystyki kosztów wytwarzania i -tego węzła wytwórczego
 N_g – liczba węzłów wytwórczych.

3. Metoda interior point w zadaniu programowania nieliniowego

Mając na uwadze konstrukcję algorytmu metody interior point, podstawowym przekształceniem wykonywanym w celu jego zastosowania dla problemu programowania nieliniowego (1) jest wprowadzenie wektora nieujemnych zmiennych dopełniających z oraz, biorąc pod uwagę własności metody logarytmicznej funkcji barierowej [13], zdefiniowanie problemu zastępczego, co w efekcie powoduje modyfikację zadania pierwotnego (1) do zadania w postaci:

$$\min_x \left(f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^{n_g} \ln(z_i) \right)$$

$$\text{przy } \begin{cases} \mathbf{h}(x) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(x) + \mathbf{z} = \mathbf{0} \\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:
 \mathbf{z} – wektor zmiennych dopełniających
 μ_k – parametr barierowy
 n_g – liczba ograniczeń nierównościowych.

Przy czym wartość parametru barierowego μ_k w kolejnych iteracjach sprowadzana jest do zera. Ciąg wartości parametru barierowego $\{\mu_k\}$, przy $\mu_k \rightarrow 0$, dla $k = 0, 1, \dots$ tworzy odpowiadający mu ciąg zadań optymalizacji zdefiniowanych przez (3). W miarę zbliżania się wartości parametru barierowego do zera ciąg otrzymywanych wektorów $\{x^{(k)}\}$, będących kolejnymi rozstrzygnięciami problemu (3), dąży do rozwiązania optymalnego x^* zadania (1). Minimum lokalne funkcji celu dla zadania programowania nieliniowego w postaci (3) określone jest przez punkt stacjonarny funkcji Lagrange'a i muszą być zachowane warunki optymalności Karusha-Kuhna-Tuckera, stąd muszą być spełnione następujące zależności:

$$\nabla_y L_\mu(y^k, \mu_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\pi - \mu, \mathbf{e} \\ \mathbf{g}(x) + \mathbf{z} \\ \nabla_x f(x) + (\nabla_x \mathbf{h}(x))^T \lambda + (\nabla_x \mathbf{g}(x))^T \pi \\ \mathbf{h}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

gdzie:
 $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$, $\mathbf{Z} = \text{diag}[z_i; i = 1, \dots, n_g]$
 λ – wektor mnożników Lagrange'a, odpowiadający ograniczeniom równościowym
 π – wektor mnożników Lagrange'a, odpowiadający ograniczeniom nierównościowym
 $y = [z, \pi, x, \lambda]^T$.

Układ równań nieliniowych (4) stanowi jednocześnie podstawę procesu obliczeniowego prymalno-dualnej metody punktu wewnętrznego (ang. *primal-dual interior point method*, PDIPM). W celu jego rozwiązania zastosowano metodę Isaaca Newtona, zgodnie z którą w każdym kroku iteracyjnym k rozwiązuje się układ równań w postaci:
 $(\nabla_y^2 L_\mu(y^k, \mu_k)) \Delta y^k = -\nabla_y L_\mu(y^k, \mu_k)$ (5)

gdzie:
 $\Delta y = [\Delta z, \Delta \pi, \Delta x, \Delta \lambda]^T$ – wektor kierunku poszukiwań,
 $\nabla_y^2 L_\mu$ – macierz Jacobiego funkcji wektorowej $\nabla_y L_\mu$.

Równanie (5) można zapisać w postaci równoważnej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} & \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{g}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{g}(x)^T & \nabla_x^2 L & \nabla_x \mathbf{h}(x)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_x \mathbf{h}(x) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\pi - \mu, \mathbf{e} \\ \mathbf{g}(x) + \mathbf{z} \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{h}(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

przy czym:

$$\nabla_x^2 L = \nabla_x^2 f(x) + \nabla_x^2 (\lambda^T \mathbf{h}(x)) + \nabla_x^2 (\pi^T \mathbf{g}(x)) \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_x = \nabla_x f(x) + (\nabla_x \mathbf{h}(x))^T \lambda + (\nabla_x \mathbf{g}(x))^T \pi \quad (8)$$

gdzie:
 $\mathbf{\Pi} = \text{diag}[\pi_i; i = 1, 2, \dots, n_g]$, $\mathbf{1}$ – macierz jednostkowa.

W autorskim oprogramowaniu współczynniki macierzy (6) wyznaczone są w sposób analityczny. Poprawka wektora kierunku poszukiwań, w pojedynczym kroku metody Newtona, może zostać wyznaczona poprzez rozwiązanie układu równań liniowych (6) bezpośrednio lub poprzez rozwiązanie zredukowanego analitycznie układu równań (9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \nabla_x \mathbf{h}(x)^T \\ \nabla_x \mathbf{h}(x) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Psi \\ \mathbf{h}(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

przy czym:

$$\mathbf{H} = \nabla_x^2 L + (\nabla_x \mathbf{g}(x))^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{\Pi} (\nabla_x \mathbf{g}(x)) \quad (10)$$

$$\Psi = \mathbf{r}_x + (\nabla_x \mathbf{g}(x))^T \mathbf{Z}^{-1} (\mu_k \mathbf{e} + \mathbf{\Pi} \mathbf{g}(x)) \quad (11)$$

Wyznaczenie wartości wszystkich elementów wektora kierunku poszukiwań Δy wykonywane jest, poprzez wyznaczenie w pierwszej kolejności wartości wektorów Δx oraz $\Delta \lambda$, z rozwiązania zredukowanego układu równań (9), a następnie wyznacza się wartości wektorów Δz oraz $\Delta \pi$, korzystając odpowiednio ze wzorów:

$$\Delta z = -\mathbf{g}(x) - \mathbf{z} - \nabla_x \mathbf{g}(x) \Delta x \quad (12)$$

$$\Delta \pi = -\pi + (\mathbf{Z}^{-1}) (\mu_k \mathbf{e} - \mathbf{\Pi} \Delta z) \quad (13)$$

co pozwala na otrzymanie pełnego rozwiązania układu (6) za pomocą zredukowanego układu równań.

W procesie iteracyjnym, w k -tym kroku metody PDIPM, wyznacza się nowe wartości zmiennych prymalnych x, z oraz zmiennych dualnych λ, π zadania optymalizacji, według wzorów:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k^p \Delta \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k^z \Delta \mathbf{z}_k \quad (14)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k^d \Delta \lambda_k, \quad \pi_{k+1} = \pi_k + \alpha_k^d \Delta \pi_k \quad (15)$$

gdzie:
 $\alpha_k^p \in (0, 1]$, $\alpha_k^z \in (0, 1]$ – zmienne skalarne, stanowiące wartości długości kroku, w kierunku wektora poszukiwań.
 Długości kroków α_k^p oraz α_k^z w k -tym kroku, wyznacza się według wzorów [14]:

$$\alpha_k^p = \min\{1, \gamma \min\{-z_i / \Delta z_i \mid \Delta z_i < 0\}\} \quad (16)$$

$$\alpha_k^z = \min\{1, \gamma \min\{-\pi_i / \Delta \pi_i \mid \Delta \pi_i < 0\}\} \quad (17)$$

gdzie:
 $\gamma \in (0, 1)$ – stała określana jako tzw. współczynnik bezpieczeństwa (ang. *safety factor*).

Wartość współczynnika bezpieczeństwa najczęściej osiąga wartość bliską jeden, w oprogramowaniu przyjęto stosować $\gamma = 0,99995$, natomiast wartość parametru barierowego μ_k sprowadzana jest w kolejnych iteracjach do zera, według następującej reguły:

$$\mu_{k+1} = \sigma (\mathbf{z}_k^T \pi_k) / n_g \quad (18)$$

gdzie:
 σ – parametr skalujący.

Jeżeli dla przyjętych wartości dokładności w k -tej iteracji spełnione są warunki zbieżności, to kryterium zbieżności algorytmu metody IP zostaje osiągnięte i działanie algorytmu przerwane. Licznik iteracji pozwala na sprawdzenie, czy nie została przekroczona, zadana z góry, maksymalna liczba iteracji k_{max} . W celu określenia kryterium zbieżności algorytmu, w k -tym kroku iteracyjnym algorytmu, sprawdza się warunki zakończenia algorytmu ze względu na: zmienne prymalne, zmienne dualne, lukę komplementarną, funkcję celu.

4. Metoda non interior point w zadaniu programowania nieliniowego

Istotną cechą metody IP jest fakt, że poszukiwanie rozwiązania optymalnego rozpoczyna się ze ściślego wnętrza obszaru rozwiązań dopuszczalnych, ze względu na warunki komplementarne zadania, i pozostaje we wnętrzu obszaru poszukiwań w trakcie całego procesu optymalizacji. Cecha ta wpływa na przebieg procesu zbieżności oraz w efekcie na liczbę iteracji algorytmu i czas wyznaczenia rozwiązania (co potwierdzają przeprowadzone w ramach badań eksperymenty numeryczne). Podejmowane przez wielu autorów próby modyfikacji wymienionej metody skutkowały powstaniem na przestrzeni lat wielu rozwiązań algorytmicznych oraz nowych metod i koncepcji, np. algorytm *unlimited point* [15]. Obiecującą grupę algorytmów, które nie wymagają transformacji zmiennych zadania optymalizacji, w odróżnieniu od algorytmu *unlimited point*, stanowią algorytmy sekwencyjne, których koncepcje wyrosły na gruncie problemów komplementarnych [16]. Wśród nich szczególnie interesującą grupę stanowią algorytmy, w których do warunków komplementarnych zadania wykorzystano funkcje wygładzające klasy NCP [16]. Zadowolające wyniki zastosowania tych algorytmów, uzyskane dla klasy problemów komplementarnych, oraz prace proponujące zastosowanie tej koncepcji do rozwiązania zadania OPF [17] wskazują te algorytmy jako obiecującą alternatywę do dobrze znanej metody IP, zachęcając do ich zbadania oraz podejmowania prób konstrukcji nowych wariantów algorytmów tej klasy, jednocześnie nie ograniczając się do rozważań czysto teoretycznych. Koncepcja zaproponowana m.in. przez Christiana Kanzowa w pracy [18] oraz przez

innych autorów dla liniowych oraz nieliniowych problemów komplementarnych polega na wprowadzeniu tzw. funkcji wygładzającej z parametrem $\mu > 0$ (tzw. parametr wygładzający – w odróżnieniu od parametru barierowego), spełniającej następującą równoważność:

$$\varphi_\mu(\pi, z) = 0 \Leftrightarrow \pi > 0, z > 0, \pi z = \mu \quad (19)$$

dla $\mu > 0$

oraz rozwiązanie układu równań, sekwencyjnie sprowadzając $\mu \rightarrow 0$. W efekcie przeprowadzonych badań najlepsze wyniki uzyskiwano przy zastosowaniu zmodyfikowanej funkcji Fischera-Burmeistera w postaci:

$$\varphi_\mu(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2\mu} \quad (20)$$

Układ równań wynikający z warunków Karusha-Kuhna-Tuckera dla zadania optymalizacji (1) po transformacji ograniczeń nierównościowych, do postaci ograniczeń równościowych, nie przyjmuje bezpośrednio postaci problemu komplementarnego. Można jednak koncepcję zaproponowaną dla problemów komplementarnych CP zastosować do warunków komplementarnych $Z\pi = 0$, otrzymując w efekcie następujący układ równań nieliniowych:

$$\Psi_\mu(y) = \begin{bmatrix} \Phi_\mu(z, \pi) \\ g(x) + z \\ \nabla_x f(x) + (\nabla_x h(x))^T \lambda + (\nabla_x g(x))^T \pi \\ h(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

gdzie:

$$\Phi_\mu(z, \pi) = [\varphi_\mu(z_i, \pi_i); i = 1, 2, \dots, n_g]^T$$

$$y = [z, \pi, x, \lambda]^T.$$

Wyrażenie warunków komplementarnych przy użyciu funkcji w postaci (19) powoduje automatyczne spełnienie warunków komplementarnych i jednocześnie warunków nieujemności zmiennych dopełniających oraz zmiennych dualnych. Zakłada się przy tym, że układ równań nieliniowych (21) rozwiązywany jest sekwencyjnie, dla $\mu \rightarrow 0$ w kolejnych iteracjach algorytmu optymalizacji. W k -tym kroku iteracyjnym tłumionej metody Newtona poprawkę rozwiązania układu równań nieliniowych (21) wyznacza się, rozwiązując następujący rzadki układ równań liniowych:

$$\nabla_y \Psi_\mu(y^k) \Delta y^k = -\Psi_\mu(y^k) \quad (22)$$

gdzie:

$\Delta y \Psi_\mu(y^k)$ – macierz Jacobiego funkcji wektorowej $\Psi_\mu(y^k)$ w punkcie y^k
 $\Delta y = [\Delta z, \Delta \pi, \Delta x, \Delta \lambda]^T$.

Rozwiązanie układu równań (22) odpowiada rozwiązaniu, w k -tym kroku iteracyjnym, układu równań liniowych, który w zapisie macierzowym przyjmuje postać (w zapisie zmiennych pominięto dla uproszczenia górny indeks iteracji k):

$$\begin{bmatrix} \nabla_z \Phi_\mu & \nabla_\pi \Phi_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_x g(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_x g(x)^T & \nabla_x^2 L & \nabla_x h(x)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_x h(x) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = -\Psi_\mu(y) \quad (23)$$

gdzie:

$$\nabla_z \Phi_\mu = \text{diag} [\partial \varphi_\mu(z_i, \pi_i) / \partial z_i; i = 1, 2, \dots, n_g]$$

$$\nabla_\pi \Phi_\mu = \text{diag} [\partial \varphi_\mu(z_i, \pi_i) / \partial \pi_i; i = 1, 2, \dots, n_g]$$

W zaimplementowanym algorytmie poszczególne składniki macierzy głównej układu równań (23) wyznaczone były w sposób analityczny. Ponadto istotnie macierz główna układu (23) jest macierzą rzadką, a jej składniki (podmacierze) również są macierzami rzadkimi. W zadaniu OPF, dla systemów o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami rzeczywistego systemu elektroenergetycznego, może ona osiągać bardzo duże rozmiary (rzędu dziesiątek tysięcy, tab. 1). Nową wartość wektora zmiennych y wyznacza się zgodnie z równaniem:

$$y^{k+1} = y^k + \alpha^k \Delta y^k \quad (24)$$

gdzie:

k – numer iteracji
 α^k – długość kroku w kier. wektora Δy^k .

Dobór długości kroku α^k opiera się na strategii nawrotów z regułą poszukiwania Armijo. Bazuje ona na badaniu wartości pewnej funkcji, stanowiącej miarę odległości od punktu rozwiązania. Funkcja ta przyjmuje wartość zero tylko w przypadku osiągnięcia rozwiązania. Naturalnie przyjmuje ona postać następującą:

$$\theta_\mu(y) = \frac{1}{2} \|\Psi_\mu(y)\|^2 = \frac{1}{2} \Psi_\mu(y)^T \Psi_\mu(y) \quad (25)$$

Dobór długości kroku α^k wykonywany jest zgodnie z następującą regułą: dla zadanych wartości współczynników $\sigma \in (0,1)$, $\alpha_i \in (0,1)$ znaleźć takie:

$$\alpha^k = \max \{ \alpha_i^p : p = 0, 1, 2, \dots \} \quad (26)$$

dla którego spełniony jest warunek:

$$\theta_\mu(y^k + \alpha_i^p \Delta y^k) \leq (1 - \sigma_i \alpha_i^p) \theta_\mu(y^k) \quad (27)$$

Dla tak wyznaczonej długości kroku α^k , nową wartość wektora zmiennych wyznacza się zgodnie z równaniem (24).

Układ równań nieliniowych (21), sparametryzowany przez μ (parametr wygładzający), rozwiązywany jest sekwencyjnie dla $\mu \rightarrow 0$ w kolejnych iteracjach metody Newtona. Gdy wartość parametru wygładzającego μ w układzie równań (21) osiąga wartość zero (lub wystarczająco bliską zero), ostateczne rozwiązanie jest osiągane, co jest implikacją własności (19). Wymaga to jednak, aby parametr wygładzający był modyfikowany w podobnym zakresie jak parametr barierowy w metodzie punktu wewnętrznego.

Opierając się na rozważaniach oraz badaniach i eksperymentach numerycznych, proponuje się nowy wariant metody, poprzez modyfikację dotychczas skonstruowanych algorytmów metody *non interior point* (NIP), w zastosowaniu do zadania

programowania nieliniowego, a w szczególności do zadania OPF sformułowanego jako zadanie programowania nieliniowego. Proponuje się modyfikację, w której parametr wygładzający μ nie jest traktowany jako parametr, lecz jako dodatkowa zmienna w układzie równań (21). Koncepcja ta zaproponowana została w kontekście algorytmów dedykowanych dla problemów komplementarnych [19]. Taka modyfikacja sprowadza układ równań (21) do następującej postaci:

$$\Psi(y, \mu) = \begin{bmatrix} \Phi_\mu(z, \pi) \\ g(x) + z \\ \nabla_x f(x) + (\nabla_x h(x))^T \lambda + (\nabla_x g(x))^T \pi \\ h(x) \\ \sigma \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

W tym przypadku parametr $\sigma \in (0,1)$ pełni rolę podobną do roli parametru skalującego w metodzie IP. Układ równań liniowych odpowiadający (23), wynikający z zastosowanej metody Newtona, przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \nabla_z \Phi_\mu & \nabla_\pi \Phi_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_\mu \Phi_\mu \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \nabla_x g(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla_x g(x)^T & \nabla_x^2 L & \nabla_x h(x)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla_x h(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = -\Psi(y, \mu) \quad (29)$$

gdzie:

$$\nabla_\mu \Phi_\mu = \text{diag} [\partial \varphi_\mu(z_i, \pi_i) / \partial \mu; i = 1, 2, \dots, n_g]$$

Kolejna modyfikacja polega na analitycznej redukcji układu równań (29), otrzymując w efekcie następującą postać układu zredukowanego:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \nabla_x h(x)^T \\ \nabla_x h(x) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{h}(x) \end{bmatrix} \quad (30)$$

gdzie:

$$\mathbf{W} = \nabla_x^2 L + \nabla_x g(x)^T (\nabla_z \Phi_\mu)^{-1} (\nabla_\pi \Phi_\mu) \nabla_x g(x)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_m + \nabla_x g(x)^T (\nabla_\pi \Phi_\mu)^{-1} (\nabla_z \Phi_\mu \mathbf{r} - \Phi_\mu(z, \pi) + \sigma \mu \nabla_\mu \Phi_\mu)$$

$$\mathbf{r}_x = \nabla_x f(x) + (\nabla_x h(x))^T \lambda + (\nabla_x g(x))^T \pi$$

$$\mathbf{r}_z = g(x) + z$$

Rozwiązując układ równań liniowych (30), otrzymuje się poprawkę wektora Δx oraz $\Delta \lambda$. Pozostałe wektory poprawki układu równań (29) wyznacza się kolejno według wzorów:

$$\Delta z = - (g(x) + z) - \nabla_x g(x) \Delta x \quad (31)$$

$$\Delta \pi = (\nabla_\pi \Phi_\mu)^{-1} (-\Phi_\mu(z, \pi) - \nabla_\mu \Phi_\mu \Delta \mu - \nabla_z \Phi_\mu \Delta z) \quad (32)$$

$$\Delta \mu = -\sigma \mu \quad (33)$$

Kolejna modyfikacja polega na sposobie wyznaczenia długości kroku α^k , w k -tej iteracji metody Newtona. Zastosowano metodę nawrotów z regułą przeszukiwania Armijo, lecz zamiast badać pełną normę wektora $\Psi(y, \mu)$ proponuje się uwzględnić tylko jego część komplementarną,

$\Phi_\mu(z, \pi)$, a regułę przeszukiwania zastąpić następującą:

$$\alpha^k = \max \left\{ \alpha_1^p : p = 0, 1, 2, \dots; \theta_\mu(\mathbf{y}^k + \alpha_1^p \Delta \mathbf{y}^k) \leq \beta (1 - \sigma \alpha_1^p) \mu^k \right\} \quad (34)$$

gdzie:
 $\beta \geq \theta_\mu(\mathbf{y}^0) / \mu^0$, $\theta_\mu(\mathbf{y}) = 0.5 \Phi(\mathbf{y}, \mu)^\top \Phi(\mathbf{y}, \mu)$.

5. Eksperymenty obliczeniowe

Naturalną konsekwencją przeprowadzonych rozważań są eksperymenty obliczeniowe, pozwalające stwierdzić praktyczną przydatność zaproponowanych rozwiązań algorytmicznych. W ramach badań dokonano implementacji autorskiego oprogramowania (PSManager), którego interfejs użytkownika przedstawiano na rys. 1. Oprogramowanie pozwala na rozwiązanie zadania optymalizacji rozpręgu mocy z zastosowaniem zaimplementowanych algorytmów optymalizacji *interior point* oraz *non interior point*. W oprogramowaniu uwzględniono zastosowanie techniki macierzy, rzadkich do efektywnego zapisu struktur danych używanych w programie oraz wykorzystano dedykowane algorytmy rozwiązywania rzadkich układów równań liniowych.

Eksperymenty obliczeniowe przeprowadzono dla zbioru systemów testowych, których statystyki zostały przedstawione w tab. 1. Dane systemów testowych, których statystyki zgromadzono w tab. 1, pochodzą z dostępnego m.in. dla zastosowań naukowych i edukacyjnych pakietu obliczeniowego MATPOWER, który pozwala na rozwiązanie zadania OPF przy zastosowaniu różnych metod optymalizacji, przy czym obecnie najbardziej efektywną (jeśli chodzi o czas wykonania), zaimplementowaną w nim metodą programowania nieliniowego dla zadania OPF jest metoda *interior point* (PDIPM) [14].

Zbiór danych testowych zawiera m.in. modele systemów, których rozmiary porównywalne są z rozmiarami rzeczywistego systemu elektroenergetycznego (przykłady testowe Case-2383 i Case-2746 w tab. 1). Modele te są wariantami KSE stanowiącego część europejskiego systemu UCTE. Wszystkie obliczenia zamieszczone w niniejszym rozdziale przeprowadzono na komputerze wyposażonym w procesor Intel® Core™ 2 Quad 2.4GHz z 4GB pamięci operacyjnej, pracującym pod kontrolą 32-bitowego systemu operacyjnego Windows.

Rozmiary testowanych systemów elektroenergetycznych przekładają się bezpośrednio na rozmiar zadania optymalizacji, w tym przypadku zadania programowania nieliniowego. W tab. 1 przedstawiono również rozmiar problemu zadania programowania nieliniowego (1), sformułowanego dla poszczególnych systemów testowych oraz rozmiary macierzy głównej układu równań liniowych, formułowanego w procesie obliczeniowym optymalizacji metody *non interior point* (dot. zaproponowanego wariantu metody).

W tab. 2 przedstawiono wyniki eksperymentów przeprowadzonych z użyciem algorytmu metody *interior point* dla zbioru systemów testowych. Eksperymenty przeprowadzono pod kątem zbadania wpływu redukcji układu równań liniowych (6), na czas realizacji obliczeń.

W tab. 3 zgromadzono wyniki analogicznych eksperymentów, przeprowadzonych z zastosowaniem zaproponowanego wariantu metody *non interior point*, badając przy tym nie tylko proces zbieżności algorytmu, ale również wpływ zastosowanej analitycznej redukcji układu równań liniowych na czas obliczeń. Jako punkt startowy obliczeń przyjęto ten, w którym wartości początkowe kątów ustawiano na zero, a wartości modułów napięć, mocy czynnych i biernych w węzłach wytwórczych ustawiano na wartość średnią z minimalnej i maksymalnej wartości dopuszczalnej. Należy podkreślić, że eksperymenty, których wyniki zgromadzono w tab. 2 oraz tab. 3, przeprowadzono wielokrotnie, a czasy obliczeń zaprezentowane w tabelach są wartościami średnimi z serii pomiarów. Dla danego systemu testowego oraz wybranej metody optymalizacji, w serii eksperymentów, uzyskiwano zbieżność do tego samego punktu rozwiązania (zarówno co do wartości funkcji celu, jak i wartości zmiennych wektora \mathbf{y}), zadaną dokładnością obliczeń ($\epsilon = 1e-6$). Ponadto dla każdego z przypadków testowych zastosowano zestaw parametrów domyślnych, które nie były modyfikowane w celu uzyskania najlepszych czasów obliczeń.

W celu weryfikacji uzyskanych wyników obliczeń przeprowadzono dodatkowo eksperymenty numeryczne, w celu porównania wyników uzyskanych za pomocą oprogramowania autorskiego oraz wyników uzyskanych

za pomocą pakietu MATPOWER. Jako przykład w tab. 4 przedstawiono wyniki otrzymane dla systemu 9-węzłowego. Porównania dokonano co do wartości wektora zmiennych $\mathbf{x} = [U, \varphi, P_g, Q_g]^\top$, zadania optymalizacji zawierającego zmienne: moduły i kąty napięć węzłowych, moce czynne i bierne generowane w węzłach wytwórczych. W przeprowadzonej analizie, w oprogramowaniu własnym zastosowano zaproponowany wariant metody *non interior point*, natomiast w oprogramowaniu MATPOWER zaimplementowaną w nim metodę *interior point* (PDIPM). Analizę porównawczą wyników wykonano dla systemów:

Case-9, uzyskując:

$$\begin{aligned} \|U^{(a)} - U^{(b)}\|_\infty &= 5,58e-06, \\ \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_\infty &= 6,08e-05, \\ \|P^{(a)} - P^{(b)}\|_\infty &= 1,04e-05, \\ \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_\infty &= 3,05e-03, \end{aligned}$$

Case-30, uzyskując:

$$\begin{aligned} \|U^{(a)} - U^{(b)}\|_\infty &= 4,96e-04, \\ \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_\infty &= 3,30e-04, \\ \|P^{(a)} - P^{(b)}\|_\infty &= 7,47e-04, \\ \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_\infty &= 7,81e-03, \end{aligned}$$

Case-300, uzyskując:

$$\begin{aligned} \|U^{(a)} - U^{(b)}\|_\infty &= 1,10e-03, \\ \|\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}\|_\infty &= 4,55e-03, \\ \|P^{(a)} - P^{(b)}\|_\infty &= 6,47e-03, \\ \|Q_g^{(a)} - Q_g^{(b)}\|_\infty &= 9,71e-03, \end{aligned}$$

gdzie: odpowiednio indeksami (a), (b) oznaczono wartości wektora zmiennych uzyskanych odpowiednio za pomocą oprogramowania autorskiego PSManager (a) oraz MATPOWER (b).

Należy podkreślić, że jedną z przyczyn zaimplementowania w stworzonym oprogramowaniu algorytmu metody *interior point* (zaimplementowanego również w pakiecie obliczeniowym MATPOWER) była implementacja metody obliczeniowej, która stanowiłaby punkt odniesienia do prowadzonych badań przy użyciu algorytmu metody *non interior point*.

Należy również dodać, że podstawowym kryterium oceny algorytmu było spełnienie warunków ograniczeń równościowych i nierównościowych zadania optymalizacji (z zadaną dokładnością), determinujących spełnienie bilansu mocy w każdym z węzłów systemu oraz ograniczeń technicznych.

| Nazwa | Liczba węzłów | Liczba węzłów wytwórczych | Liczba węzłów odbiorczych | Liczba linii | Liczba zmiennych zadania optymalizacji | Liczba ograniczeń równościowych | Liczba ograniczeń nierównościowych | Rozmiary macierzy głównej URL formułowanego w procesie obliczeniowym algorytmu optymalizacji <i>non interior point</i> * | |
|-----------|---------------|---------------------------|---------------------------|--------------|--|---------------------------------|------------------------------------|--|-----------|
| | N_w | N_g | N_o | N_l | n_x | n_h | n_g | N_{full} | N_{red} |
| Case-9 | 9 | 3 | 6 | 9 | 24 | 18 | 48 | 139 | 42 |
| Case-30 | 30 | 6 | 24 | 41 | 72 | 60 | 166 | 465 | 132 |
| Case-118 | 118 | 54 | 64 | 186 | 344 | 236 | 824 | 2 229 | 580 |
| Case-300 | 300 | 69 | 231 | 411 | 738 | 600 | 1 698 | 4 735 | 1 338 |
| Case-2383 | 2 383 | 327 | 2 056 | 2 896 | 5 420 | 4 766 | 11 866 | 33 191 | 10 186 |
| Case-2746 | 2 746 | 364 | 2 382 | 3 279 | 6 220 | 5 492 | 13 506 | 38 725 | 11 712 |

* – dotyczy rozmiaru macierzy głównej układu równań liniowych (29), co odpowiada kolumnie tabeli N_{full} , oraz (30), co odpowiada kolumnie tabeli N_{red} .

Tab. 1. Statystyki systemów testowych używanych w eksperymentach numerycznych

| Nazwa | IP_{full} | | IP_{red} | | Liczba iteracji | Wartość funkcji celu |
|-----------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | Czas obliczeń | Średni czas iteracji | Czas obliczeń | Średni czas iteracji | | |
| | t, ms | t_{it}, ms | t, ms | t_{it}, ms | | |
| Case-9 | 18 | 1,6 | 15 | 1,3 | 11 | 5 296,69 |
| Case-30 | 73 | 5,6 | 61 | 4,6 | 13 | 576,89 |
| Case-118 | 440 | 24,4 | 351 | 19,5 | 18 | 129 660,69 |
| Case-300 | 1 597 | 55,0 | 1 247 | 43,0 | 29 | 719 725,08 |
| Case-2383 | 19 407 | 485,1 | 15 387 | 384,6 | 40 | 1 862 367,03 |
| Case-2746 | 20 335 | 564,8 | 16 081 | 446,7 | 36 | 1 605 145,58 |

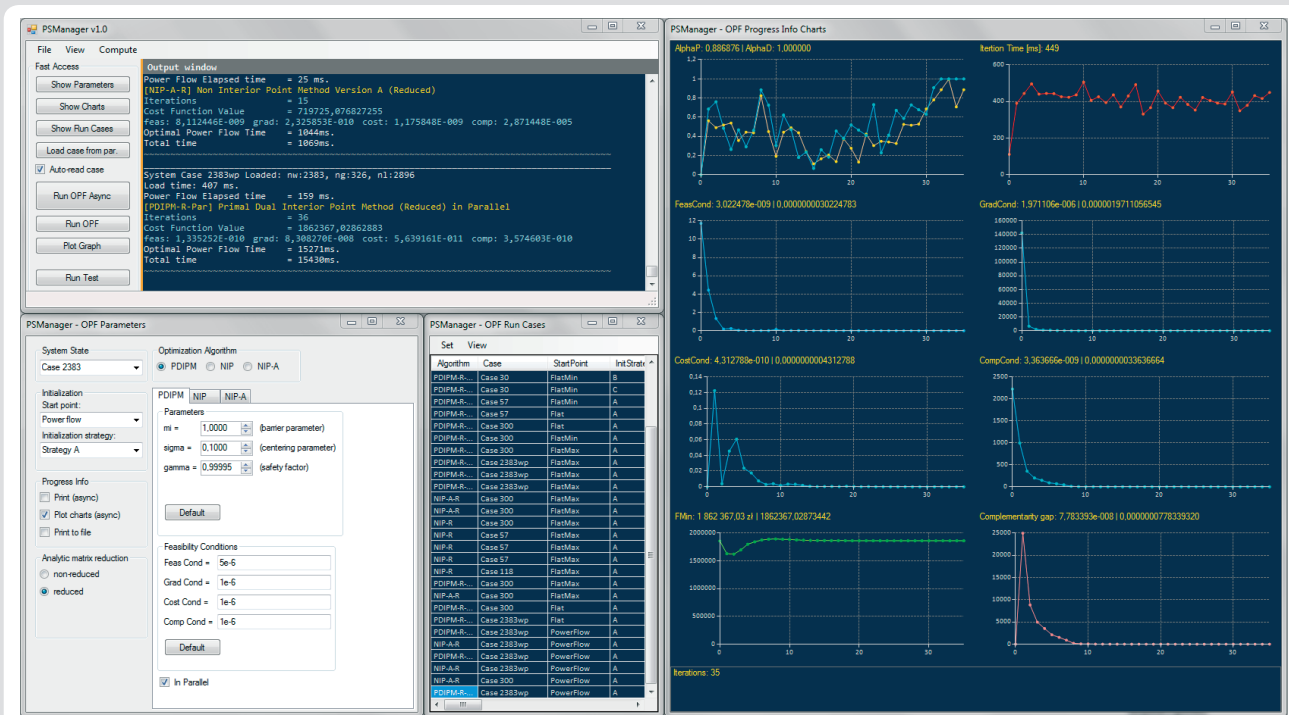
IP_{full} – odpowiada algorytmowi metody IP z zastosowaniem macierzy niezredukowanej (6) w procesie obliczeniowym, IP_{red} – odpowiada algorytmowi metody IP z zastosowaniem zredukowanego analitycznie układu równań liniowych (9)

Tab. 2. Wyniki eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z użyciem algorytmu metody *interior point*

| Nazwa | NIP_{full} | | NIP_{red} | | Liczba iteracji | Wartość funkcji celu |
|-----------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | Czas obliczeń | Średni czas iteracji | Czas obliczeń | Średni czas iteracji | | |
| | t, ms | t_{it}, ms | t, ms | t_{it}, ms | | |
| Case-9 | 12 | 1,0 | 13 | 1,1 | 12 | 5 296,69 |
| Case-30 | 101 | 5,9 | 75 | 4,4 | 17 | 576,89 |
| Case-118 | 420 | 28,0 | 303 | 20,2 | 15 | 129 660,69 |
| Case-300 | 1 058 | 62,2 | 764 | 44,9 | 17 | 719 725,08 |
| Case-2383 | 13 761 | 550,4 | 9 883 | 395,3 | 25 | 1 862 367,03 |
| Case-2746 | 15 386 | 641,1 | 10 916 | 454,8 | 24 | 1 605 145,58 |

NIP_{full} – odpowiada algorytmowi metody NIP z zastosowaniem macierzy niezredukowanej (29) w procesie obliczeniowym, NIP_{red} – odpowiada algorytmowi metody NIP z zastosowaniem zredukowanego analitycznie układu równań liniowych (30)

Tab. 3. Wyniki eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z użyciem algorytmu metody *non interior point*



Rys. 1. Interfejs użytkownika autorskiego oprogramowania PSManger

| Element wektora x | Nr węzła | Oprogramowanie autorskie (metoda NIP) | MatPower (metoda PDIPM) | $ a-b $ |
|------------------------|----------|---------------------------------------|-------------------------|------------|
| | | a | b | |
| U [p.u.] | 1 | 1,09995644 | 1,09995086 | 5,5812E-06 |
| | 2 | 1,09736195 | 1,09736288 | 9,3186E-07 |
| | 3 | 1,08662656 | 1,08662735 | 7,8967E-07 |
| | 4 | 1,09419026 | 1,09418625 | 4,0073E-06 |
| | 5 | 1,08442711 | 1,08442437 | 2,745E-06 |
| | 6 | 1,09999925 | 1,09999914 | 1,0593E-07 |
| | 7 | 1,08948873 | 1,08948862 | 1,0545E-07 |
| | 8 | 1,09999927 | 1,09999917 | 1,0038E-07 |
| | 9 | 1,07173372 | 1,07173093 | 2,7882E-06 |
| φ [°] | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 4,893169673 | 4,893109098 | 6,057E-05 |
| | 3 | 3,249065707 | 3,249004939 | 6,077E-05 |
| | 4 | -2,46308933 | -2,463110555 | 2,123E-05 |
| | 5 | -3,982309771 | -3,98235179 | 4,202E-05 |
| | 6 | 0,602425198 | 0,602365867 | 5,933E-05 |
| | 7 | -1,196731461 | -1,196790286 | 5,883E-05 |
| | 8 | 0,905181601 | 0,905123821 | 5,778E-05 |
| | 9 | -4,615577443 | -4,615620948 | 4,351E-05 |
| Pg [MW] | 1 | 89,7986243 | 89,7986138 | 1,044E-05 |
| | 2 | 134,320647 | 134,320652 | 5,572E-06 |
| | 3 | 94,1874319 | 94,1874386 | 6,706E-06 |
| Qg [MVar] | 1 | 12,94178757 | 12,93873592 | 3,051E-03 |
| | 2 | 0,045924901 | 0,047729505 | 1,805E-03 |
| | 3 | -22,6213713 | -22,6197302 | 1,641E-03 |

Tab. 4. Porównanie wyników uzyskanych dla systemu Case-9

6. Wnioski końcowe

Zastosowanie przedstawionego w artykule opracowanego wariantu algorytmu metody *non interior point* w zadaniu optymalizacji rozpyływu mocy w systemie elektroenergetycznym pozwala na zmniejszenie liczby iteracji algorytmu w stosunku do metody *interior point*, co przekłada się na skrócenie czasu obliczeń. Analityczna generacja elementów macierzy i wektorów używanych w programie pozwala na uzyskanie możliwie najwyższej wydajności obliczeń (pod względem czasu ich realizacji). Istotny wpływ na czas wykonywania obliczeń ma zastosowana analityczna redukcja układu równań liniowych, formułowanych w procesie obliczeniowym metody IP oraz NIP. Znaczący wpływ na efektywność programu ma odpowiedni dobór struktur danych oraz pracujących na nich algorytmów. Eksperymenty obliczeniowe dla rozpatrywanego zbioru danych testowych potwierdziły przydatność oprogramowania i zaimplementowanych algorytmów w zakresie wyznaczenia rozwiązania zadania optymalizacji rozpyływu mocy w SEE, w tym dla modelu systemu o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami systemu rzeczywistego.

Bibliografia

1. Carpentier J., Contribution e l'étude do Dispatching Economique, *Bull. Soc. Francaise des Electriciens*, Vol. 3, s. 431–447, August 1962.
2. Bansal R.C., Optimization Methods for Electric Power Systems: An Overview, *International Journal of Emerging Electric Power Systems* 2005, Vol. 2, No. 1.
3. Pandya K. S., Joshi S. K., A Survey of Optimal Power Flow Methods, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Vol. 4, No. 5, s. 450–458, May 2008.
4. Capitanescu F. i in., Interior-point based algorithms for the solution of optimal power flow problems, *Electric Power Systems Research* 2007, Vol. 77, No. 5–6, s. 508–517.
5. Quintana V.H., Torres G.L., Medina-Palomo J., Interior-point methods and their applications to power systems: a classification of publications and software codes, *IEEE Transactions on Power Systems* 2000, Vol. 15, No. 1, s. 170–176.

6. Benson H.Y., Shanno D.F., Vanderbei R.J., A Comparative Study of Large-Scale Nonlinear Optimization Algorithms, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, Tech. Rep. ORFE 01-04, 2001.
7. Zimmerman R.D., Murillo-Sánchez C.E., Thomas R.J., MATPOWER: Steady-State Operations, Planning and Analysis Tools for Power Systems Research and Education, *IEEE Transactions on Power Systems* 2011, Vol. 26, No. 1, s. 12–19.
8. Xie L., Chiang H., A enhanced multiple predictor-corrector interior point method for optimal power flow, *IEEE Power and Energy Society General Meeting* 2010, s. 1–8.
9. Duvvuru N., Swarup K.S.: A Hybrid Interior Point Assisted Differential Evolution Algorithm for Economic Dispatch, *IEEE Transactions on Power Systems* 2011, Vol. 26, No. 2, s. 541–549
10. Billups S.C., Murty K.G., Complementarity problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, special issue on numerical analysis 2000, Vol. IV, Optimization and nonlinear equations, Vol. 124, No. 1–2, s. 303–318.
11. Kocot H., Korab R., Żmuda K., Planowanie pracy jednostek wytwórczych na rynku energii elektrycznej – przegląd stosowanych metod, *Prace Naukowe Politechniki Śląskiej, Kwartalnik Elektryka* 2009, zeszyt 3, Vol. 211, nr 1827, s. 7–31.
12. Kremens Z., Sobierajski M., Analiza systemów elektroenergetycznych, WNT, 1996.
13. Quintana V.H., Torres G.L., Introduction to interior-point methods, IEEE PICA, Santa Clara, CA, 1999.
14. Rider M.J. i in., Towards a fast and robust interior point method for power system applications, *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution* 2004, Vol. 151, No. 5, s. 575–581.
15. Tognola G., Bacher R., Unlimited point algorithm for OPF problems, *IEEE Transactions on Power Systems* 1999, Vol. 14, s. 1046–1054.
16. De Luca T., Facchinei F., Kanzow C., A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems, *Mathematical Programming* 1996, Vol. 75, s. 407–439.
17. Torres G. L., Quintana V.H., Optimal power flow by a nonlinear complementarity method, *IEEE Transactions on Power Systems* 2000, Vol. 15, s. 1028–1033.
18. Kanzow C., Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 1996, Vol. 17, s. 851–868
19. Burke J., Xu S., A non interior predictor-corrector path following algorithm for the monotone linear complementarity problem, *Mathematical Programming* 1997, Vol. 87, s. 113–130.

Bernard Baron

prof. dr hab. inż.

Politechnika Śląska

e-mail: bernard.baron@polsl.pl

Ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej oraz studia z zakresu matematyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Autor i współautor ponad 350 publikacji, w tym wielu rozpraw i monografii, podręczników akademickich, książek naukowych opublikowanych w wydawnictwie ogólnopolskim. Twórca i współtwórca patentów. Autor prac nieopublikowanych, ekspertyz, prac projektowych i doświadczalnych. Promotor sześciu ukończonych przewodów doktorskich. Wielokrotnie nagradzany za swoją działalność naukowo-badawczą.

Zainteresowania badawcze to m.in.: analiza pola magnetycznego wokół linii elektroenergetycznych oraz torów wieloprądowych, zastosowanie programowania obiektowego w modelowaniu układów elektrycznych i elektroenergetycznych.

Marcin Połomski

dr inż.

Politechnika Śląska

e-mail: marcin.polomski@polsl.pl

Wychowanek Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Obecnie zatrudniony jest na stanowisku adiunkta w Instytucie Elektrotechniki i Informatyki, na Wydziale Elektrycznym swojej macierzystej uczelni.