



**Model wnikania pocisków uderzeniowych
w metalowe przeszkody.
Część 2. Wnikanie prętów odkształcalnych
w odkształcalne przeszkody**

Stanisław TORECKI

*Instytut Techniki Uzbrojenia, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa,
Wojskowa Akademia Techniczna
ul. Gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa*

Streszczenie. Wykorzystując przyjętą w pracy [1] ogólną koncepcję modelu działania pocisków uderzeniowych, przedstawiono sposób rozwiązania problemu w odniesieniu do wnikania pocisków (prętów) odkształcalnych w odkształcalne przeszkody. Otrzymane wyniki pokazują podstawowe prawidłowości procesu wnikania oraz zależność efektów końcowych od prędkości uderzenia i właściwości zderzających się elementów. Niektóre wyniki zilustrowano wybranymi przykładami.

Słowa kluczowe: mechanika, balistyka końcowa, pociski przeciwpancerne, wnikanie pocisków.

1. WSTĘP

Praca jest kontynuacją części pierwszej [1], w której przedstawiono ogólną koncepcję przyjętego modelu wnikania oraz rozwiązania przypadków, gdy jeden z elementów biorących udział w zderzeniu (pocisk lub przeszkoda) jest ciałem nieodkształcalnym. W rzeczywistości natomiast zarówno uderzana przeszkoda, jak i uderzający w nią pręt (pocisk) wykonane są z materiałów (metali) odkształcalnych o skończonej wytrzymałości.

W takim przypadku po uderzeniu jednocześnie odkształcane są uderzane przeszkody i uderzające w nie pociski (pręty), co ma istotny wpływ na efekty końcowe działania pocisków uderzeniowych.

W niniejszym artykule pokazano możliwość rozwiązania problemu wnikania metalowych pocisków (prętów) odkształcalnych w metalowe przeszkody odkształcalne. W odniesieniu do tej części obowiązuje przedstawiony w punkcie 2 [1] schemat przyjętego modelu fizycznego wnikania, a podstawą modelu matematycznego są równania energii, pędu i masy, sformułowane w punkcie 3 [1]. Zachowane zostaną również przyjęte w pracy [1] oznaczenia wielkości występujących w równaniach.

2. RÓWNANIA PROBLEMU

W pracy [1] sformułowane zostały podstawowe równania problemu w postaci:

$$M W dW + \frac{W^2}{2} dM = -(u_1 dm_1 + u_2 dm_2) - \frac{v^2}{2} dm \quad (1)$$

$$M W dW + W dM = -\frac{u_1 dm_1 + u_2 dm_2}{dL} dt - v dm \quad (2)$$

$$v = \frac{s_1 W_1 + s_2 W_2}{s_2 - s_1} \quad (3)$$

Wyrażają one (w kolejności) bilans energii, pędu i masy. Powyższe równania podstawowe uzupełniono równością prac statycznych

$$u_1 dm_1 = u_2 dm_2 \quad (4)$$

wynikającą z adaptacji zasady możliwych przemieszczeń [2].

3. ROZWIĄZANIE

W rozpatrywanym przypadku

$$dm = dm_1 + dm_2, \quad dM = -dm_1, \quad \frac{dL}{dt} = W$$

Z porównania równań (1) i (2) otrzymamy zatem

$$\bar{v} = \frac{v}{W} = 1 + \sqrt{\bar{m}_2} \quad (5)$$

gdzie $\bar{m}_2 = \frac{dm_2}{dm}$.

Natomiast z równania (4) wynika, że stosunki

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_1 &= \frac{dm_1}{dm} = \frac{m_1}{m}, & \bar{m}_2 &= \frac{dm_2}{dm} = \frac{m_2}{m}, \\ \bar{m}_{1,2} &= \frac{dm_1}{dm_2} = \frac{m_1}{m_2} & \text{oraz} & \quad \bar{v} = \frac{v}{W} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dla danego zestawu pocisk – przeszkoda są wielkościami stałymi.

Biorąc powyższe pod uwagę, opis problemu możemy sprowadzić do postaci

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{m}_1}{\bar{m}_1(1-\bar{m}_1)} \\ \frac{d\bar{m}_2}{\bar{m}_2 - \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2} \\ \frac{d\bar{m}}{1 - \bar{m}_1 \cdot \bar{m}} \end{aligned} \right\} = - \frac{\bar{W} d\bar{W}}{1 + B\bar{W}^2} \quad (7)$$

gdzie oznaczono:

$$\bar{m}_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{M_p}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{M_p}, \quad \bar{m} = \frac{m}{M_p},$$

$$\bar{W} = \frac{W}{\sqrt{A}}, \quad A = (u_1 - u_2)\bar{m}_1 + u_2 = \frac{2u_1 \cdot u_2}{u_1 + u_2},$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\bar{v}^{-2} - \bar{m}_1 \right) = \bar{m}_2 + \sqrt{\bar{m}_2} = \frac{u_1}{u_1 + u_2} + \sqrt{\frac{u_1}{u_1 + u_2}}.$$

Alternatywny zapis lewej strony równania (7) pokazuje możliwość niezależnego całkowania w odniesieniu do skracania pocisku (\bar{m}_1) i drażenia krateru (\bar{m}_2) oraz efektu sumarycznego ($\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$).

W wyniku całkowania (7) z uwzględnieniem warunku początkowego

$$\bar{W} = \bar{W}_u = \frac{W_u}{\sqrt{A}}, \quad \bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m} = 0$$

otrzymamy bezpośrednio

$$\left. \begin{aligned} \ln(1 - \bar{m}_1) \\ \ln\left(1 - \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_2}{m_2}\right) \\ \ln(1 - \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2) \end{aligned} \right\} = -C \ln\left(\frac{1 + B \bar{W}_u^2}{1 + B \bar{W}^2}\right) \quad (8)$$

gdzie
$$C = \frac{\bar{m}_1}{2B}$$

oraz po przekształceniach

$$\bar{m}_1 = 1 - \left(\frac{1 + B \bar{W}_u^2}{1 + B \bar{W}^2}\right)^{-C} \quad (9a)$$

$$\bar{m}_2 = \frac{\bar{m}_2}{m_1} \bar{m}_1 = \frac{u_1}{u_2} \bar{m}_1 \quad (9b)$$

$$\bar{m} = \frac{\bar{m}_1}{m_1} = \left(1 + \frac{u_1}{u_2}\right) \bar{m}_1 \quad (9c)$$

Efektom końcowym wnikania będą wartości $\bar{m}_1 = \bar{m}_{1\max}$, $\bar{m}_2 = \bar{m}_{2\max}$ i $\bar{m} = \bar{m}_{\max}$, otrzymane po podstawieniu $W = 0$ do (9). W szczególności po zakończeniu procesu wnikania w wydrążonym kanale przeszkody o głębokości

$$L_{2\max} = L_p \frac{\rho_1 \cdot s_1}{\rho_2 \cdot s_2} \bar{m}_{2\max} \quad (10)$$

powstanie część pocisku (pręta) o masie

$$M_{\min} = M_p (1 - \bar{m}_{1\max}) \quad (11)$$

gdzie

$$\bar{m}_{1\max} = 1 - \left(1 + B \bar{W}_u^2\right)^{-C}$$

$$\bar{m}_{2\max} = \frac{u_1}{u_2} \bar{m}_{1\max}$$

Przy nieskończeniu dużej prędkości uderzenia ($W_u \rightarrow \infty$) cały pocisk zostałby zużyty ($m_1 = M_p$), a głębokość wydrążonego wówczas krateru osiągnęłaby wartość graniczną

$$L_{2gr} = \frac{u_1}{u_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{s_1}{s_2} L_p \quad (12)$$

Pole s_2 przekroju poprzecznego krateru, drążonego w przeszkodzie, można wyznaczyć z równania (3), które napiszemy w postaci bezwymiarowej

$$\bar{v} = \frac{\bar{s} \bar{W}_1 + \bar{W}_2}{1 - \bar{s}} \quad (13)$$

gdzie oznaczono:

$$\bar{v} = \frac{v}{W}, \quad \bar{s} = \frac{s_1}{s_2}, \quad \bar{W}_1 = \frac{W_1}{W}, \quad \bar{W}_2 = \frac{W_2}{W}.$$

Biorąc pod uwagę to, że

$$W = W_1 + W_2 = \frac{dL}{dt} = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt}, \quad dm_1 = \rho_1 \cdot s_1 \cdot dL_1, \quad dm_2 = \rho_2 \cdot s_2 \cdot dL_2$$

otrzymamy

$$\bar{W}_1 = \frac{1}{1 + \bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{s}}, \quad \bar{W}_2 = \frac{\bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{s}}{1 + \bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{s}}$$

gdzie

$$\bar{u} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Podstawienie tak określonych \bar{W}_1 i \bar{W}_2 do (13) daje równanie kwadratowe

$$\bar{s}^{-2} + b \bar{s} - c = 0$$

gdzie oznaczono

$$c = (\bar{u} \cdot \bar{\rho})^{-1}, \quad b = \frac{1}{\bar{v}}(1 + c) - (1 - c).$$

Stąd dla $c > 0$

$$\bar{s} = \frac{s_1}{s_2} = 0,5 \left(\sqrt{b^2 + 4c} - b \right) \quad (14)$$

Na przykład dla pocisku i przeszkody, wykonanych z jednakowych materiałów $\bar{\rho} = \bar{u} = 1$ otrzymamy $\bar{s} \approx 0,573$. Oznacza to, że średnica krateru będzie tu nieco mniejsza niż w przypadku wnikania pocisków nieodkształcalnych, dla których w pracy [1] otrzymano $\bar{s} = 0,5$.

4. OCENA PORÓWNAWCZA SKUTECZNOŚCI WNIKANIA

4.1. Przedmiot analizy

Jako miarę skuteczności wnikania przyjęto maksymalną głębokość krateru $L_{2\max}$, wydrążonego w przeszkodzie po uderzeniu w nią pocisku (pręta) z prędkością W_u . Zgodnie z wynikami otrzymanymi w punkcie 3, możemy napisać

$$\bar{L}_{2\max} = \frac{L_{2\max}}{L_p} = \bar{L}_{2gr} \left[1 - \left(1 + \frac{B}{A} W_u^2 \right)^{-c} \right] \quad (15)$$

gdzie

$$\bar{L}_{2gr} = \frac{L_{2gr}}{L_p} = \bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{s}$$

$$A = \frac{2}{1+\bar{u}} u_1 = \frac{2\bar{u}}{1+\bar{u}} u_2; \quad B = \frac{\bar{u}}{1+\bar{u}} + \sqrt{\frac{\bar{u}}{1+\bar{u}}}; \quad C = \frac{0,5}{(1+\bar{u})B}$$

$$\bar{u} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\bar{s} = 0,5 \left(\sqrt{b^2 + 4c} - b \right)$$

$$c = (\bar{u} \cdot \bar{\rho})^{-1}, \quad b = \frac{1}{\bar{v}} (1+c) - (1-c), \quad \bar{v} = 1 + \sqrt{\frac{\bar{u}}{1+\bar{u}}}$$

Poniżej na wybranych przykładach pokazane zostaną wykresy zależności efektywności wnikania $\bar{L}_{2\max} = \frac{L_{2\max}}{L_p}$ od prędkości uderzenia W_u w odniesieniu do pocisków i przeszkód wykonanych z materiałów o jednakowych oraz różnych właściwościach.

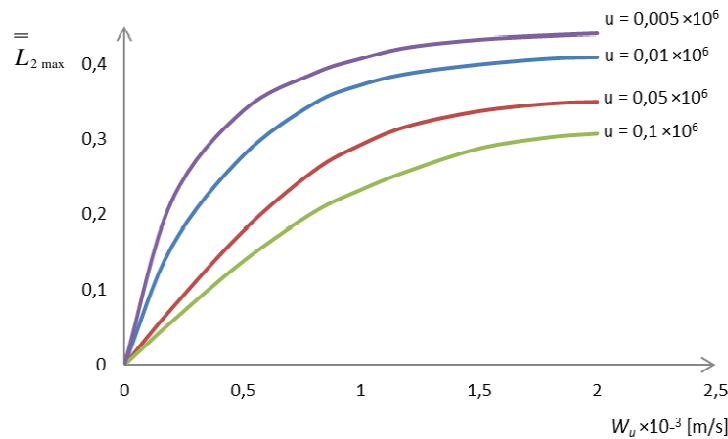
4.2. Przykład 1. Pociski i przeszkody wykonane z jednakowych materiałów

W odniesieniu do wnikania pocisku wykonanego z takiego samego materiału jak uderzana przez niego przeszkoda, będzie

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_1}{\rho_2} = 1 \quad \text{oraz} \quad \bar{u} = \frac{\bar{u}_1}{u_2} = 1.$$

i wówczas otrzymamy $\bar{s} = 0,573$, $B = 1,2071$, $C = 0,2071$, $A = u_1 = u_2 = u$.

Wykresy zależności głębokości względnej (odniesionej do długości pocisku) krateru $\bar{L}_{2\max}$ od prędkości uderzenia W_u dla wybranych wartości $u = u_1 = u_2$ przedstawiono na wykresach na rysunku 1.



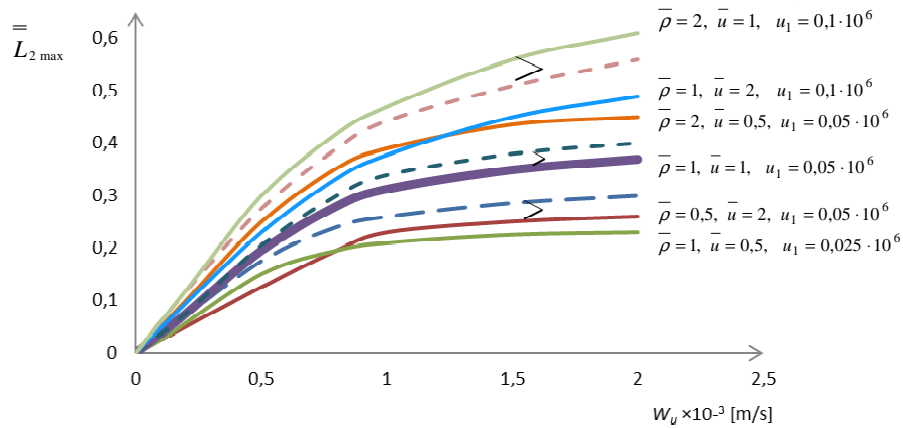
Rys. 1. Zależność $\bar{L}_{2\max}(W_u)$ dla pocisków i przeszkód wykonanych z jednakowych materiałów $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $u_1 = u_2 = u$

Fig. 1. Dependence $\bar{L}_{2\max}(W_u)$ for projectiles and barriers made of the same materials $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $u_1 = u_2 = u$

Wykresy te pokazują, że w rozpatrywanym przypadku przy jednostkowych prędkościach uderzenia $W_u < \infty$ głębokości drążonych kraterów $L_{2\max}$ są proporcjonalne do długości pocisków L_p oraz zwiększają się ze wzrostem gęstości materiałów pocisku i przeszkody, a zmniejszają się, gdy większa jest ich wytrzymałość. Jedynie przy bardzo dużych prędkościach uderzenia ($W_u \rightarrow \infty$) wszystkie wykresy (niezależnie od materiałów) będą dążyły do wspólnej asymptoty $L_{2gr} = 0,573 L_p$.

4.3. Przykład 2. Pociski i przeszkody wykonane z różnych materiałów

Rozpatrywane tu przypadki dobierano tak, aby wartości gęstości lub wytrzymałości materiałów pocisków i przeszkód były wielokrotnością dwóch. Na rysunku 2 pokazano wyniki odnoszące się do kombinacji danych wyszczególnionych w tabeli 1.



Rys. 2. Wybrane wykresy zależności $\bar{L}_{2\max}(W_u)$ dla pocisków i przeszkód wykonanych z różnych materiałów ($\rho_1 = \rho_2, \rho_1 = 2\rho_2, \rho_1 = 0,5 \rho_2; u_1 = u_2, u_1 = 2u_2, u_1 = 0,5 u_2$)
 ----- krzywe odpowiadające zmianie W_u , spowodowane zmianą gęstości (masy) pocisków, wystrzeliwanych z dział;
 ——— przypadek „odniesieniowy” ($\bar{\rho} = 1, \bar{u} = 1, u_1 = 0,05 \cdot 10^6$ J/kg)

Fig. 2. Selected charts for relationship $\bar{L}_{2\max}(W_u)$ for projectiles and barriers made of different materials ($\rho_1 = \rho_2, \rho_1 = 2\rho_2, \rho_1 = 0,5 \rho_2; u_1 = u_2, u_1 = 2u_2, u_1 = 0,5 u_2$)
 ----- curves for change W_u , due to the change in density (weight) of shooting projectiles;
 ——— relating case ($\bar{\rho} = 1, \bar{u} = 1, u_1 = 0,05 \cdot 10^6$ J/kg)

Tabela 1. Zestawienie danych dla przykładu 2

Table 1. Summary data for the case No. 2

$\bar{\rho}$	2	2	1	1	0,5	1
\bar{u}	1	0,5	2	0,5	2	1
$u_1 \cdot 10^{-6}$ [J/kg]	0,1	0,05	0,01	0,025	0,05	0,05

W odniesieniu do przypadków $\bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \neq 1$ liniami przerywanymi pokazano efekt związany ze zmniejszeniem lub zwiększeniem prędkości pocisków wystrzeliwanych z dział, spowodowany dwukrotną zmianą ich masy [3].

Natomiast linią pogrubioną zaznaczono przypadek $\bar{\rho} = \bar{u} = 1$, $u_1 = u_2 = 0,05 \cdot 10^6$ [J/kg] pokazany na rysunku 1.

5. UWAGA KOŃCOWA

Jedną z istotnych zalet prezentowanego modelu jest uzależnienie efektów wnikania od jednej tylko nie do końca sprecyzowanej (co do wartości) stałej materiałowej u , definiowanej jako stosunek naprężeń w materiałach pocisku i przeszkody do gęstości tych materiałów.

O tym, jaki wskaźnik wytrzymałościowy należałoby tu przyjmować, mogą ewentualnie zdecydować odpowiednio ukierunkowane eksperymenty lub inne (wykraczające poza ramy pracy) przesłanki teoretyczne.

LITERATURA

- [1] Torecki S., Model wnikania pocisków uderzeniowych w metalowe przeszkody. Część 1. Koncepcja modelu i przypadki szczególne, *Problemy mechatroniki. Uzbrojenie, lotnictwo, inżynieria bezpieczeństwa*, nr 3(9), 2012, s. 71-84, Warszawa, 2012.
- [2] Dinnik A.N., *Sprawocznik po techniczeskiej miechanikie*, Moskwa – Leningrad, 1949.
- [3] Torecki S., *Balistyka wewnętrzna*, WAT, Warszawa, 1980.

**Model of Penetration of the Impact Projectiles
in Metal Barriers**
**Part 2. Penetration of Deformable Rods in Deformable
Barriers**

Stanisław TORECKI

Abstract. Using the adopted in [1] general concept model of impact projectile action it is shown how to solve the problem in relation to the penetration of deformable projectiles (rods) in a deformable barrier. The obtained results show the basic regularity of process of penetration and the dependence of final effects on the speed of impact and properties of interacting elements. Some results are illustrated by selected examples.

Keywords: mechanics, terminal ballistics, anti-tank impact projectiles, penetration