



# Rozkład ciśnienia w ośrodku porowatym podczas zjawiska kolmatacji przebiegającego zgodnie z pierwszą kinetyką bez linearyzacji wyrażenia określającego porowatość rozważanego ośrodka w funkcji położenia i czasu

Wiktor FILIPEK<sup>1)</sup>, Krzysztof BRODA<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Inżynierii Łądowej i Gospodarki Zasobami; ORCID: 0000-0001-5472-8214; ResearcherID: W-5254-2018; Scopus: 36185413000; PBN: 5e70922b878c28a047391056

<sup>2)</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Inżynierii Łądowej i Gospodarki Zasobami; ORCID: 0000-0001-8218-9350; ResearcherID: D-2256-2018; Scopus: 55658644400; PBN: 5e70922b878c28a047391048

<http://doi.org/10.29227/IM-2023-02-50>

Submission date: 01-11-2023 | Review date: 23-11-2023

## Abstrakt

Zjawisko kolmatacji występuje w przyrodzie wszędzie tam, gdzie dochodzi w ośrodkach porowatych do przepływów cieczy niosących zawieszane cząstki stałe. Nawet „najczystsza” woda dopływająca do studni po pewnym czasie spowoduje jej zakolmatowanie, a tym samym spadek jej wydajności, co jest zjawiskiem negatywnym.

Badania prowadzone w naszym ośrodku od lat 60-tych ubiegłego wieku [1,4-14] doprowadziły do opracowania matematycznego opisu zjawiska kolmatacji [4-8,13,14] oraz przeprowadzenia szeregu eksperymentów ją weryfikujących [9-14]. Uzyskane wyniki wykorzystano również podczas prób uszczelnienia górotworu wokół wyrobiska górniczego [12].

W niniejszym artykule podjęto próbę określenia obszaru  $K$  w przypadku przebiegu zjawiska kolmatacji zachodzącego zgodnie z kinetyką pierwszą, oraz podania zależności opisujących rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  dla przepływu bez kolmatacji i z kolmatacją bez linearyzacji wyrażenia  $\varepsilon(x,t)^{-3}$  w otoczeniu  $\varepsilon_0$ , gdzie  $\varepsilon$  określa porowatość ośrodka w funkcji położenia i czasu.

Określenie obszaru  $K$  pozwala nam na jednoznaczne wyprowadzenie dokładnego rozkładu ciśnienia  $h(x,t)$  podczas przepływu z kolmatacją przez ośrodek porowaty bez linearyzacji, a następnie porównania rozwiązań układu równań kolmatacji metodą linearyzacji i metodą dokładną przy wykorzystaniu bezwymiarowej postaci funkcji  $\xi$ .

W trakcie prowadzenia badań eksperymentalnych próba dopasowania rzeczywistego zjawiska do opracowanego modelu matematycznego obarczona była dużą niepewnością wynikającą prawdopodobnie z zastosowania linearyzacji członu  $\varepsilon(x,t)^{-3}$ .

W artykule autorzy wyjaśniają co generuje odstępstwo metody przybliżonej od dokładnego rozwiązania oraz zwracają uwagę, że dokładne rozwiązanie bardziej oddaje sens fizyczny matematycznego modelu opisu zjawiska oraz zdefiniowanych współczynników kolmatacji a w szczególności parametru  $\alpha_0$ .

**Słowa kluczowe:** filtracja, kolmatacja, przepływ z wymianą masy i pędu

## Wstęp

Ze zjawiskiem kolmatacji w przyrodzie mamy do czynienia tam, gdzie występuje przepływ cieczy niosących zawieszane cząstki stałe przez ośrodki porowate. Zjawisko to może mieć znaczenie negatywne, jak w przypadku dopływu wody do studni, powodując zakolmatowanie, a tym samym spadek jej wydajności. Natomiast zależeć nam będzie na jak najintensywniejszym jego przebiegu wszędzie tam gdzie potrzebujemy ograniczyć albo wręcz wyeliminować wodoprzepuszczalność ośrodka porowatego, np. przy uszczelnianiu wałów przeciwpowodziowych, tam czy górotworu przy pracach podziemnych ograniczając dopływ wód do wyrobisk.

Widać więc, że znajomość mechanizmów przebiegu tego zjawiska jak i jego opisu teoretycznego i praktycznego wraz z opracowaniem metod określania parametrów odpowiedzialnych za jego przebieg ma duże znaczenie.

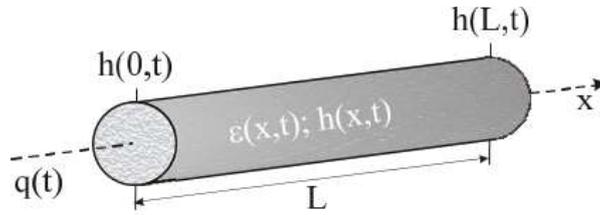
Do badań zjawiska kolmatacji [2,3] nasz ośrodek włączył się w latach 60-tych ubiegłego wieku [1,4-14]. Prowadzone w naszym ośrodku badania doprowadziły do powstania teorii kolmatacji [4-8,13,14] oraz przeprowadzenia szeregu

eksperymentów ją weryfikujących [9-14]. Zdobyte wówczas doświadczenie wykorzystano również podczas prób uszczelnienia górotworu wokół wyrobiska górniczego [12].

Zjawisko kolmatacji może według teorii kolmatacji przebiegać w różny sposób, opisany trzema kinetykami procesu kolmatacji [5,14]. Niestety w trakcie prowadzenia eksperymentu, czy badań „in situ” bardzo trudno jest określić, według której kinetyki aktualnie przebiega zjawisko kolmatacji. Konieczne więc jest posiadanie metody pozwalającej na określenie w czasie i przestrzeni obszaru  $K$  zachodzenia zjawiska dla poszczególnych kinetyk.

W niniejszym artykule autorzy skoncentrowali się na określeniu obszaru  $K$  w przypadku zjawiska kolmatacji przebiegającego zgodnie z kinetyką pierwszą, oraz podaniu zależności opisujących rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  dla przepływu bez kolmatacji i z kolmatacją bez linearyzacji wyrażenia  $\varepsilon(x,t)^{-3}$  w otoczeniu  $\varepsilon_0$ , gdzie  $\varepsilon$  określa porowatość ośrodka w funkcji położenia i czasu.

Rozważania nasze przeprowadzono dla ośrodka jednorodnego charakteryzującego się stałością powierzchni właściwej  $\alpha(x) = \alpha$  i stałością współczynnika kolmatacji  $\alpha_0(x) = \alpha_0$



Rys. 1. Model ośrodka porowatego przyjętego do rozważań przy przepływie z kolmatacją

Fig. 1. The model of the porous medium adopted for considerations in the case of flow with colmatage

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, L] \quad \alpha(x) &= \alpha - \text{powierzchnia właściwa} \\ \forall x \in [0, L] \quad \alpha_o(x) &= \alpha_o - \text{współczynnik kolmatacji} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, L] \quad \varepsilon(x, 0) = \varepsilon_o \quad (7)$$

dostając zależność (8)

$$\forall x \in [0, L] \quad \phi(x) = \alpha_o \varepsilon_o \quad (8)$$

Wielkość L opisuje maksymalny liniowy zasięg zjawiska kolmatacji zachodzącego w jednorodnym ośrodku porowatym.

Na Rys. 1 przedstawiono taki wyidealizowany ośrodek przyjęty w naszych rozważaniach gdzie:

$q(t)$  – prędkość filtracji;

$\varepsilon(x, t)$  – porowatość ośrodka;

$h(x, t)$  – rozkład ciśnienia;

$h(0, t)$  – ciśnienie na początku rozpatrywanego ośrodka;

$h(L, t)$  – ciśnienie na końcu rozpatrywanego ośrodka;

L – długość ośrodka porowatego.

która wstawiona do równania (6) po prostych przekształceniach pozwala zapisać go w poniższej postaci:

$$\forall x \in [0, L] \quad \forall t \in R^+ \quad \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial x} + \alpha_o (\varepsilon(x, t) - \varepsilon_o) = 0 \quad (9)$$

Otrzymane równanie różniczkowe rzędu pierwszego można przedstawić w postaci (10)

$$\frac{d\varepsilon(x, t)}{d(\varepsilon(x, t) - \varepsilon_o)} = -\alpha_o dx \quad (10)$$

lub (11)

$$\varepsilon(x, t) - \varepsilon_o = 0 \quad (11)$$

Rozważmy najpierw zależność (11), z której wynika, że

$$\forall x \in [0, L] \quad \forall t \in R^+ \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon_o \quad (12)$$

Natomiast z równania bilansu transportu (1) i warunku  $\alpha_o q(t) \neq 0$  otrzymujemy

$$\forall x \in [0, L] \quad \forall t \in R^+ \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon_o \Rightarrow N(x, t) = \text{const} \quad (13)$$

Ostatecznie uwzględniając równanie kinetyki procesu (2) dochodzimy do spostrzeżenia, że

$$\forall x \in [0, L] \quad \forall t \in R^+ \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon_o \Rightarrow N(x, t) = 0 \quad (14)$$

Otrzymana zależności opisuje więc proces przepływu czystej wody przez ośrodek porowaty.

Zajmiemy się teraz członem (10) przy założeniu, że  $\varepsilon(x, t) - \varepsilon_o \neq 0$ , z którego wynika, że  $t \neq 0$ . Po scałkowaniu równania (10) otrzymujemy zależność (15)

$$\ln |\varepsilon(x, t) - \varepsilon_o| = -\alpha_o x + \psi(t), \quad (15)$$

która po prostych przekształceniach i podstawieniu  $\psi(t) = e^{\psi(t)}$  doprowadza do wyniku w postaci równania (16).

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_o + \phi(t) e^{-\alpha_o x} \quad (16)$$

Musimy teraz określić zależność funkcji  $\phi$  od czasu -  $\psi(t)$ . Skorzystamy z równania kinetyki procesu (2) i rozwiążemy je dla przypadku, gdy  $x = 0$ . Mamy:

$$\begin{cases} q(t) \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} = 0 - \text{równanie bilansu transportu} & (1) \\ \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} = -\alpha_o q(t) N(x, t) - \text{równanie kinetyki procesu} & (2) \\ \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = -2a \frac{v}{g} \frac{\alpha^2}{\varepsilon^3(x, t)} q(t) - \text{równanie ruchu} & (3) \end{cases}$$

gdzie:

$N(x, t)$  – koncentracja unoszonych cząstek zawiesiny;

$a$  – współczynnik odstępstwa [7,9];

$v$  – współczynnik lepkości kinematycznej;

$g$  – przyspieszenie grawitacyjne.

### Wyprowadzenie dokładnego rozkładu ciśnienia $h(x, t)$ podczas przepływu z kolmatacją przez ośrodek porowaty – bez linearyzacji

W celu wyznaczenia rozkładu ciśnienia  $h(x, t)$ , musimy najpierw z równania (1) i (2) wyliczyć funkcję  $\varepsilon(x, t)$ . W związku z tym przekształćmy równanie kinetyki (2) procesu kolmatacji do poniższej postaci (4) zakładając oczywiście, że  $\alpha_o q(t) \neq 0$

$$N(x, t) = -\frac{1}{\alpha_o q(t)} \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} \quad (4)$$

i wprowadźmy go do równania bilansu transportu (1). Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x, t)}{\partial t \partial x} + \alpha_o \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Powyższe równanie całkujemy względem czasu  $t$  otrzymując:

$$\frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial x} + \alpha_o \varepsilon(x, t) = \phi(x) \quad (6)$$

Nieznaną funkcję  $\phi(x)$  znajdujemy w oparciu o warunek początkowy (7)

$$[\partial \varepsilon(0,t)]/\partial t = -\alpha_0 q(t)N(0,t) \quad (17)$$

Ponieważ do rozważanego obszaru wpływa zawiesina o stałej w czasie koncentracji możemy zapisać warunek brzegowy w postaci:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad N(0,t) = n \quad (18)$$

Rozwiązanie ogólne równania (17) z warunkiem brzegowym (18) opisane jest więc poniższą zależnością:

$$\varepsilon(0,t) = -n\alpha_0 \int q(t)dt + C \quad (19)$$

Z warunku początkowego (7) wynika, że  $C = \varepsilon_0$  czyli

$$\varepsilon(0,t) = \varepsilon_0 - n\alpha_0 \int q(t)dt \quad (20)$$

Stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\phi(t) = -n\alpha_0 \int q(t)dt \quad (21)$$

Ostatecznie możemy przedstawić rozwiązanie równania (16) w postaci

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ - \{0\}: \alpha_0 q(t) \neq 0 \quad \varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - n\alpha_0 e^{-\alpha_0 x} \int q(t)dt \quad (22)$$

przedstawiającej rozkład porowatości ośrodka przy przepływie z kolmatacją, realizowanym przy przyjętych założeniach.

Podstaje nam teraz tylko sprawa wyjaśnienia, co się dzieje, jeżeli  $t = 0$ . Jak widać równanie (22) przechodzi w postać (14), co jest przecież oczywiste, bo w chwili zerowej proces kolmatacji spełniający warunek początkowy (7) nie może zachodzić.

Podsumowując teraz nasze dotychczasowe rozważania, poszukiwaną funkcję  $\varepsilon(x,t)$  ostatecznie możemy przedstawić jak niżej:

$$\forall x \in [0, L] \quad \forall t \in \mathbb{R}^+: \alpha_0 q(t) \neq 0 \quad \varepsilon(x,t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{- proces bez kolmatacji} \quad (23) \\ \varepsilon_0 - n\alpha_0 e^{-\alpha_0 x} \int q(t)dt & \text{- proces z kolmatacją} \quad (24) \end{cases}$$

Zajmiemy się teraz określeniem obszaru K zachodzenia zjawiska. Z równania (23) wynika, że obszar K dla przepływów bez kolmatacji można przedstawić w postaci

$$\kappa = \{(x,t): x \in [0, L], t \in \mathbb{R}^+\}, \quad (25)$$

czyli cały obszar objęty przepływem.

Określenie obszaru K dla przepływu z kolmatacją jest zadaniem skomplikowanym z uwagi na trudność wyznaczenia

w sposób bezpośredni czasu zakończenia przebiegu zjawiska. Zatem przyjęliśmy metodę pośrednią. Proces kolmatacji zostanie zakończony jeżeli wszystkie pory ośrodka ulegną wypełnieniu, czyli  $\varepsilon(x,t) = 0$ . W oparciu o to, z równania (24) wynika, że

$$\int_0^{t_{\max}} q(t)dt \leq [\varepsilon_0 / (n\alpha_0)] \quad (26)$$

a w konsekwencji obszar K możemy przedstawić w postaci

$$\kappa = \{(x,t): x \in [0, L], t \in [0, t_{\max}], \int_0^{t_{\max}} q(t)dt \leq \varepsilon_0 / (n\alpha_0) \} \quad (27)$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia poszukiwanego rozkładu ciśnienia. Wprowadźmy oznaczenie

$$\Omega = 2a (v/g) \alpha^2 \quad (28)$$

i wstawmy je do równania ruchu (3), które w konsekwencji przyjmie postać:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = -\Omega \frac{q(t)}{\varepsilon^3(x,t)} \quad (29)$$

Scałkujmy go teraz w granicach od x do L.

$$\int_x^L \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} dx = -\Omega q(t) \int_x^L \frac{dx}{\varepsilon^3(x,t)} \quad (30)$$

W wyniku całkowania otrzymujemy poniższe równanie określające rozkład ciśnienia w ośrodku porowatym

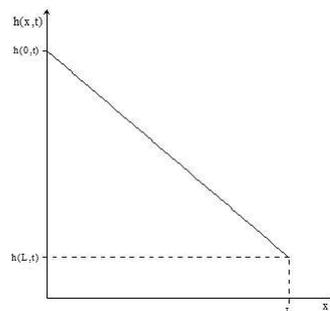
$$h(x,t) = h(L,t) + \Omega q(t) \int_x^L \frac{dx}{\varepsilon^3(x,t)} \quad (31)$$

Jako pierwszy przypadek rozważymy rozwiązanie powyższego równania dla przepływu bez kolmatacji. Z dotychczasowych naszych rozważań wynika (23), że w takim przypadku  $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0$ , a więc

$$h(x,t) = h(L,t) + \Omega q(t) \frac{1}{\varepsilon_0^2} (L-x) \quad (32)$$

Otrzymana zależność (32) opisująca rozkład ciśnienia przy przepływie bez kolmatacji została zilustrowana graficznie na rys. 2 i jest zgodna z przebiegami obserwowanymi w trakcie eksperymentów.

Drugi przypadek to ten, w którym w trakcie przepływu przez ośrodek porowaty cieczy niosącej zawieszoną cząstkę stałą dochodzi do ich wymiany z ośrodkiem ciekłym do stałego – kolmatacji. Prowadzi to w konsekwencji do uzmiennienia rozkładu porowatości co zostało wyrażone zależnością (24).



Rys. 2. Rozkład ciśnienia w ośrodku porowatym przy przepływie bez kolmatacji  
Fig. 2. Pressure distribution in a porous medium during flow without colmatage

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - n\alpha_0 e^{-\alpha_0 x} \int q(t) dt$$

Ponieważ wiadomo [14], że

$$\int q(t) dt = Q(t) \quad (33)$$

to zależność (24) możemy zapisać w postaci (34).

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x} \quad (34)$$

Po wstawieniu otrzymanego równania (34) do równania ruchu w postaci (31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h(L,t) + \Omega q(t) \int_x^L \varepsilon^{-3}(x,t) dx = \\ &= h(L,t) + \Omega q(t) \int_x^L [\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}]^{-3} dx \end{aligned} \quad (35)$$

Aby rozwiązać powyższe równanie najpierw obliczymy całkę nieoznaczoną w nim występującą. I tak

$$\begin{aligned} \int \varepsilon^{-3}(x,t) dx &= \int [\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}]^{-3} dx = \\ &= \frac{1}{2\alpha_0 \varepsilon_0^3} \left[ 2 \ln(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}) - \varepsilon_0 \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} + 2\alpha_0 x + C_1 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Przechodząc do całki oznaczonej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_x^L \varepsilon^{-3}(x,t) dx &= \int_x^L [\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}]^{-3} dx = \\ &= \frac{1}{2\alpha_0 \varepsilon_0^3} \left[ 2 \ln \frac{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}} - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L})^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} \right] + 2\alpha_0(L-x) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Wprowadzając nowe oznaczenie

$$\dot{\Omega} = \Omega \frac{1}{2\alpha_0 \varepsilon_0^3} = a \frac{v}{g} \frac{\alpha^2}{\alpha_0 \varepsilon_0^3} \quad (38)$$

możemy podać ostatecznie związek opisujący rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  dla przepływu z kolmatacją, jak niżej

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \left\{ 2 \ln \frac{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}} - \right. \\ &\left. - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L})^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} \right] + 2\alpha_0(L-x) \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

W tym miejscu warto przypomnieć dotychczasowe przybliżone równanie opisujące rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  otrzymane przy pomocy linearyzacji wyrażenia  $\varepsilon[x,t]^{-3}$  w otoczeniu  $\varepsilon_0$  [7,14]. Po drobnych przekształceniach w celu ujednoczenia zapisu, postać tego równania jest następująca

$$h(x,t) \approx h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \left[ 6Q(t) \frac{n\alpha_0}{\varepsilon_0} (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha_0 L}) + 2\alpha_0(L-x) \right] \quad (40)$$

Z dotychczasowych badań [14] wiadomo, że rozkład ciśnienia przy przepływie z kolmatacją w chwili  $t = 0$  jest taki sam jak dla przepływu bez kolmatacji (32). Czyli jest opisany funkcją liniową o równaniu

$$h(x,t) = h(L,t) + \Omega q(t) \frac{1}{\varepsilon_0^3} (L-x) = h(L,t) + 2\dot{\Omega} q(t) \alpha_0 (L-x) \quad (41)$$

Wprowadzając do równania (39) dla  $t=0$   $Q(0) = 0$  widzimy, że otrzymane rozwiązanie jest analogiczne z równaniem (41), co pokazano poniżej:

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \\ &\left\{ \frac{2 \ln \frac{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}}{2 \ln 1 = 0} - \varepsilon_0 \frac{\left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L})^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} \right]}{\varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} - \frac{2\alpha_0}{\varepsilon_0^3} \right]} + 2\alpha_0(L-x) \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

Na zakończenie tego artykułu chcielibyśmy przedstawić rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  (39) w funkcji: porowatości osrodka

$\varepsilon(x,t)$ , rozkładu koncentracji unoszonych  $N(x,t)$  oraz wyłapanych  $P(x,t)$  cząstek kolmatanta.

Dla rozkładu porowatości opisanego równaniem (24) i z uwzględnieniem równań (33) i (34) rozkład ciśnienia można przedstawić zależnością (43)

$$h(x,t) = h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \left\{ 2 \ln \frac{\varepsilon(L,t)}{\varepsilon(x,t)} - \varepsilon_0 \left[ \frac{\varepsilon_0 + 2\varepsilon(L,t)}{\varepsilon^2(L,t)} - \frac{\varepsilon_0 + 2\varepsilon(x,t)}{\varepsilon^2(x,t)} \right] + 2\alpha_0(L-x) \right\} \quad (43)$$

Z kolei rozkład zatrzymanej masy w osrodku  $P(x,t)$  opisany jest poniższą zależnością [14]:

$$P(x,t) = n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x} \quad (44)$$

W konsekwencji więc rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  możemy przedstawić następująco:

$$h(x,t) = h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \left\{ 2 \ln \frac{\varepsilon_0 - P(L,t)}{\varepsilon_0 - P(x,t)} - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2P(L,t)}{(\varepsilon_0 - P(L,t))^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2P(x,t)}{(\varepsilon_0 - P(x,t))^2} \right] + 2\alpha_0(L-x) \right\} \quad (45)$$

Ponieważ funkcję  $N(x,t)$  określającą rozkład koncentracji unoszonych cząstek opisuje zależność (46) [14]

$$N(x,t) = n e^{-\alpha_0 x} \quad (46)$$

to rozkład ciśnienia  $h(x,t)$  przybierze postać równania (47)

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \left\{ 2 \ln \frac{\varepsilon_0 - \alpha_0 Q(t) N(L,t)}{\varepsilon_0 - \alpha_0 Q(t) N(x,t)} - \right. \\ &\left. - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2\alpha_0 Q(t) N(L,t)}{(\varepsilon_0 - \alpha_0 Q(t) N(L,t))^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2\alpha_0 Q(t) N(x,t)}{(\varepsilon_0 - \alpha_0 Q(t) N(x,t))^2} \right] + 2\alpha_0(L-x) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

Porównanie rozwiązań układu równań kolmatacji metodą linearyzacji i metodą dokładną

Porównując równania (39) i (40) można zauważyć, że różnią się tylko jednym członem. Jeżeli przedstawimy zależność (40) w formie

$$\begin{aligned} A(x,t) &= 2 \ln \frac{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}} - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L})^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} \right] + 2\alpha_0(L-x) \\ &= h(x,t) + \dot{\Omega} q(t) \cdot A(x,t) \end{aligned} \quad (48)$$

natomiast równanie (39) w postaci

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h(L,t) + \dot{\Omega} q(t) \cdot B(x,t) \\ B(x,t) &= 6Q(t) \frac{n\alpha_0}{\varepsilon_0} (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha_0 L}) + 2\alpha_0(L-x) \end{aligned} \quad (49)$$

to o odchyłce decyduje wtedy różnica między członami  $A(x,t)$  i  $B(x,t)$ . Najprościej odchyłkę tą możemy zdefiniować w postaci współczynnika  $\xi(x,t)$  będącego stosunkiem  $A(x,t)$  do

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \frac{A(x,t)}{B(x,t)} \\ &= \frac{2 \ln \frac{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}} - \varepsilon_0 \left[ \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 L})^2} - \frac{3\varepsilon_0 - 2n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x}}{(\varepsilon_0 - n\alpha_0 Q(t) e^{-\alpha_0 x})^2} \right] + 2\alpha_0(L-x)}{6Q(t) \frac{n\alpha_0}{\varepsilon_0} (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha_0 L}) + 2\alpha_0(L-x)} \end{aligned} \quad (50)$$

Z uwagi na nieokreśloność w czasie zakończenia procesu kolmatacji powyższa postać tego równania (50) jest trudna do analizy i sformułowania jakiś ogólnych wniosków. W związku z tym należy je przekształcić do innej postaci, która by odzwierciedlała dowolny fizyczny proces kolmatacji. Wprowadzając bezwymiarową zmienną  $y$

$$\forall x \in [0, L] \quad y = x/L; \quad y \in [0, 1] \quad (51)$$

Oraz bezwymiarową zmienną  $z$

$$\forall z \in [0,1] \quad z = [\alpha_0 Q(t)] / \varepsilon_0 \quad (52)$$

otrzymujemy uniwersalne równanie (53).

$$\xi(y,z) = \frac{2 \ln \frac{1 - ze^{-\alpha_0 y}}{1 - ze^{-\alpha_0}} - \varepsilon_0 \left[ \frac{3 - 2ze^{-\alpha_0}}{(1 - ze^{-\alpha_0})^2} - \frac{3 - 2ze^{-\alpha_0 y}}{(1 - ze^{-\alpha_0 y})^2} \right] + 2\alpha_0(1-y)}{6z(e^{-\alpha_0 y} - e^{-\alpha_0}) + 2\alpha_0(1-y)} \quad (53)$$

Ze względu na charakter jednostek wielkości  $x$  i  $L$  bezwymiarowość współczynnika  $y$  jest oczywista. Wątpliwości może wzbudzać bezwymiarowość parametru  $z$ , a może powinniśmy zapisać go w postaci funkcji zależnej od czasu  $z(t)$ . Bezwymiarowość parametru  $z$  wynika z warunku (26) określającego czas  $t$  zakończenia przebiegu zjawiska kolmatacji i zależności (27) określającej jego obszar. Jeżeli  $z=0$  oznacza to, że proces kolmatacji dopiero rozpoczął się i czas  $t=0$ . Natomiast w przypadku gdy  $z=1$  proces kolmatacji zakończył się. Nie posiadamy jednak informacji o czasie jego trwania. Parametr  $z$  jest więc bezwymiarowy i informuje nas o stopniu zaawansowaniu procesu bez wnikania w czas jego przebiegu. Tak zdefiniowana funkcja  $\xi(y,z)$  (53) daje narzędzie do bezwymiarowego porównania dwóch zależności (39) i (40). Oczywiście w równaniach tych występują parametry takie jak  $\alpha_0$  oraz  $\varepsilon_0$ , ale są to wartości stałe.

Na wykresie rys. 3 przedstawiono liniami ciągłymi zależność bezwymiarowego współczynnika  $\xi(y,z)$  od parametru  $y$  dla jedenastu wartości  $z$  będącymi informacją o stopniu zaawansowania procesu kolmatacji. Tak jak to widać w opisie po prawej stronie wykresu, każda krzywa odpowiada innej wartości  $z$  zaczynając od 0 a kończąc na wartości 1, przy przyjętych parametrach  $\alpha_0$  oraz  $\varepsilon_0$  wynoszących odpowiednio 0.5 i 0.7. Ponadto dla  $z=0,6$  co odpowiada stopniu zaawansowania procesu kolmatacji w 60%, naniesiono dwie krzywe oznaczone pogrubionym kropkowaniem w celu zilustrowania, jaki wpływ ma zmiana parametru  $\varepsilon_0$  na rozkład  $\xi(y,z)$ . Przyrost wartości został zobrazowany kierunkiem zwrotu strzałki. Krzywe zostały wykreślone dla wartości  $\varepsilon_0=0.4$  oraz  $\varepsilon_0=0.6$  przy wartości  $\alpha_0=0.5$ . Podobnie zilustrowano (krzywe kropkowane) wpływ zmiany parametru  $\alpha_0$  dla  $z=0,8$  na rozkład  $\xi(y,z)$ . Tak jak w poprzednim przypadku, przyrost wartości został zobrazowany kierunkiem zwrotu strzałki. W tym przypadku krzywe zostały wykreślone dla wartości  $\alpha_0=0.6$  oraz

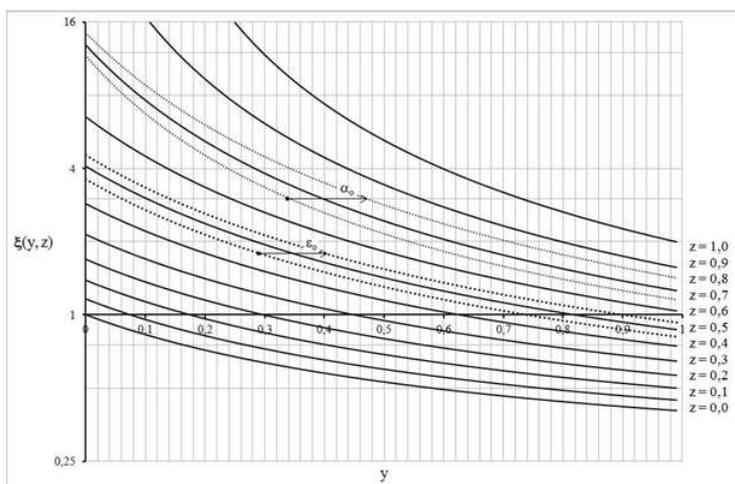
$\alpha_0=0.8$  przy wartości  $\varepsilon_0=0.7$ .

Oś argumentów  $y$  została celowa przesunięta do wartości  $\xi(y,z)=1$ . Ta wartość informuje nas, że bez względu na to, którą zależnością będziemy liczyć, (39) czy (40), otrzymamy takie same wartości. Jest to jedyny przypadek, w którym wynik otrzymany metodą przybliżoną pokrywa się z metodą dokładną. Pamiętajmy, że równanie (39) jest równaniem otrzymanym wprost z rozwiązania układu równań (1), (2) i (3), a wersja (40) to tylko forma przybliżona, ale dotychczas była stosowana do analizowania procesu kolmatacji. Stosując zależność przybliżoną (40) dla zakresu  $\xi(y,z)<1$  otrzymane wyniki opisują zawyżony stopień zaawansowania procesu kolmatacji, a współczynnik  $\xi(y,z)$  informuje o ile. W przeciwnym przypadku gdy  $\xi(y,z)>1$  otrzymane wyniki opisują zaniżony stopień zaawansowania procesu kolmatacji i w tym przypadku również współczynnik  $\xi(y,z)$  informuje nas o ile.

### Wnioski

Przedstawiony tok rozumowania pozwala na dokładniejszy pod względem matematycznym opis przebiegu zjawiska kolmatacji – w oparciu o założenia teorii kolmatacji proponowane przez Profesora Alfreda Trzaskę [14] z uwzględnieniem pierwszej kinetyki procesu kolmatacji. Według dotychczasowej metody, z uwagi na skomplikowaną pod względem matematycznym postać równań różniczkowych opisujących zachodzące zjawisko kolmatacji, przyjmowało się uproszczoną postać funkcji  $\varepsilon(x,t)^{-3}$  linearyzując tą funkcję w otoczeniu  $\varepsilon_0$  [5,14]. Współczesne narzędzia obliczeniowe pozwoliły nam rozwiązać układ równań opisujących pierwszą kinetykę (1),(2),(3) w sposób bezpośredni bez stosowania przybliżeń w postaci linearyzacji. Potrzeba dokładniejszego rozwiązania wynika z rozbieżności pomiędzy otrzymanymi rozkładami podczas badań laboratoryjnych a przebiegami wynikającymi z symulacji komputerowej opartej o linearyzację członu  $\varepsilon(x,t)^{-3}$ .

Analizując krzywe na Rys. 3 można wysunąć wniosek, że dotychczasowe stosowanie formy przybliżonej opisu procesu kolmatacji obarczone było znaczącym błędem, tym większym im proces zbliżał się do końca. Ponadto formuła ta (40) nie miała mechanizmu, który informował by nas, że proces kolmatacji już zmierza ku końcowi lub się zakończył. Wynika to z faktu, że postać zależności (40) nie uwzględnia warunków



Rys. 3. Graficzna ilustracja zmienności parametru  $\xi$

Fig. 3. Graphical illustration of the variability of the  $\xi$  parameter

(24), (26) przez co funkcja nie zmierza asymptotycznie do określonej wartości. Jest to jedna z przyczyn rozbieżności pomiędzy metodą przybliżoną i dokładną co generuje odchyłkę. Drugą przyczyną generowania odchyłki jest związana z tym, że zgodnie z zależnością (49) źle wyznaczona wartość współczynnika  $B(x,t)$  ma wpływ na błędną wartość  $q(t)$ , a to ma wpływ na niewłaściwy rozkład ciśnienia  $h(x,t)$ . W przypadku przepływu z kolmatacją realizowanego przy stałej różnicy ciśnień, wymuszona różnica ciśnień narzuca jakie wartości może przyjąć iloczyn  $q(t) B(x,t)$ . Jest to mechanizm samoregulacji procesu i z matematycznego punktu widzenia proces nadal trwa, chociaż fizycznie już się zakończył.

W przypadku funkcji (39) dąży ona do asymptoty zgodnie ze zdefiniowanymi warunkami (24) i (26). Bardzo ważną cechą zależności (39) jest zobrazowanie sensu fizycznego współczynnika kolmatacji  $\alpha_0$ . Z postaci tej wynika jasno, że może ona przybierać jedynie wartości z przedziału  $[0,1]$ . Wartości

0 odpowiada brak wychwytu przepływających cząstek kolmatanta lub przepływ czystej cieczy, a wartości 1 odpowiada sytuacja, w której ośrodek wychwytuje wszystkie przepływające cząstki kolmatanta, czyli wypływa czysta woda, co z fizycznego punktu widzenia jest prawie niemożliwe. Dotychczas stosując metodę przybliżoną przyjmowano ten współczynnik jako parametr empiryczny o wartości umożliwiającej dopasowanie rzeczywistych pomiarów laboratoryjnych do symulacji komputerowej. W ten sposób jego interpretacja fizyczna wzbudzała wiele kontrowersji i była niejasna.

W trakcie prowadzenia badań eksperymentalnych określenie według jakiej kinetyki przebiega proces obarczone jest dużą niepewnością wynikającą prawdopodobnie z zastosowania linearyzacji członu  $\varepsilon(x,t)^{-3}$  również w pozostałych kinetykach. Autorzy obecnie pracują nad znalezieniem bezpośredniego rozwiązania również dla kinetyki drugiej i trzeciej.

## Literatura – References

1. Broda, K., 2001. Badania eksperymentalne zjawiska kolmatacji jako procesu doprowadzającego do likwidacji wodoprzepuszczalności ośrodków porowatych. Zabezpieczenie i Rewitalizacja podziemnych obiektów zabytkowych – Konferencja Naukowo-techniczna. Kraków-Bochnia 21-22 września 2001, 89-99, ISBN 83-912116-4-9
2. Herzig, J.P.; Leclerc, D.M.; Le Goff, P., 1970. Flow of Suspensions through Porous Media – Application to Deep Filtration. Industrial and Engineering Chemistry, 62,5,8-35
3. Ives, K.J., 1962. Filtration Using Radioactive Algae. Trans. ASCE, 127, part 3, 372-389
4. Litwiniszyn J., 1963. Colmatage Considered as a Certain Stochastic Process. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. techn., 3
5. Trzaska, A., 1972. New Kinetics Equations of the Colmatage Process and Their Application. Archiwum Górnictwa, 17,4,361-384
6. Trzaska, A., 1983. The Effect of Colmatage on the Porosity of Heterogeneous Porous Media. Archiwum Górnictwa, 28,1,3-11
7. Trzaska, A., 1986. The Distribution of Pressure During the Flow with Colmatage Through Heterogeneous Porous Media. Archiwum Górnictwa, 31,1,175-183
8. Trzaska, A., 1989. On Researches of the Colmatage. Archiwum Górnictwa, 34,3,529-541
9. Trzaska, A., Broda, K., 1991. Comparison of The Actual Course of Colmatage with Its Theoretical Description. Archiwum Górnictwa, 36,4,325-332.
10. Trzaska, A., Broda, K., Filek, K., 1999. Experimental Research of the Influence of the Colmatage Process on Pressure Distribution and Variability of Flow Discharge and Flow with Free Surfaces. Archives of Mining Sciences, 44,4,531-532.
11. Trzaska A., Broda K., 2000. Possibility of Determining Colmatage Parameters and Functions Basing on the Theory of Colmatage and Experiment. Archives of Mining Sciences, 45, 4, 527-542
12. Trzaska, A.; Broda, K.; Rapacz, R., 2001. O możliwości ograniczenia dopływu wód do wyrobisk górniczych. Górnictwo, 25,2,41-48
13. Trzaska A., Broda K., Filipek W., Sobowska K., 2005. The Phenomenon of Colmatage and Its Effect on the Environment. Archives of Mining Sciences, 50, Special Issue, 43-56
14. Trzaska, A.; Sobowska, K.; 2007. Kolmatacja przepływu z wymianą masy i zmianą pędu. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków

### *Pressure Distribution in a Porous Medium During the Colmatage Phenomenon Occurring According to the First Kinetics without Linearization of the Expression Defining the Porosity of the Considered Medium as a Function of Position and Time*

*The phenomenon of colmatage occurs in nature wherever there is a flow of fluid carrying suspended solid particles through porous media. Even the "cleanest" water flowing into the well after some period of time will become clogged and therefore its efficiency will decrease, which is a negative phenomenon. Research conducted in our center, since the 1960s [1,4-14], has led to: a theoretical description of the phenomenon of colmatage [4-8,13,14] and a number of experiments verifying it [9-14]. The obtained results were used during tests to seal the rock mass around a mining excavation [12].*

*This article attempts to determine the area  $K$  in the case of the colmatage phenomenon occurring in accordance with the first kinetics, and to identify/formulate relationships describing the pressure distribution  $h(x,t)$  for the flow without colmatage and with colmatage without linearization of the expression  $\varepsilon(x,t)^3$  in the surroundings  $\varepsilon_p$ , where  $\varepsilon$  determines the porosity of the medium as a function of position and time. Determining the area  $K$  allows us to clearly derive the exact pressure distribution  $h(x,t)$  during flow with colmatage through a porous medium without linearization, and then compare the solutions of the system of colmatage equations using the linearization method and the exact method using the dimensionless form of the  $\xi$  function. During the experimental research, the attempt to match the actual phenomenon with the developed mathematical model was burdened with high uncertainty, probably resulting from the use of linearization of the  $\varepsilon(x,t)^3$  term. In the article, the authors explain what generates the deviation of the approximate method from the exact solution and point out that the exact solution better reflects the physical meaning of the mathematical model for describing the phenomenon and the defined colmatation coefficients, the parameter  $\varepsilon_p$  in particular.*

**Keywords:** filtration, colmatage, flow with mass and momentum exchange