

Nieliniowe modele zniszczenia belek drewnianych przy zginaniu

Dr hab. inż. Piotr Rapp, prof. uczelni, Sieć Badawcza Łukasiewicz
– Instytut Technologii Drewna w Poznaniu

1. Wprowadzenie

Celem tego artykułu jest przedstawienie trzech modeli zniszczenia belki drewnianej przy zginaniu. Drewno jako materiał anizotropowy ma różne właściwości sprężyste oraz w różny sposób ulega zniszczeniu przy ściskaniu oraz rozciąganiu, stąd modele zniszczenia belek zginanych mają charakter nieliniowy. Wielkościami umożliwiającymi zbudowanie modeli są wytrzymałość doraźna drewna przy ściskaniu σ_s oraz wytrzymałość doraźna drewna przy rozciąganiu σ_r . Kształt funkcji opisującej rozkład naprężeń w przekroju belki jest wzorowany na rozkładzie naprężeń zgodnym z doświadczeniem. W najprostszym przypadku funkcja opisująca rozkład naprężeń musi zawierać trzy parametry, które wyznacza się z warunków brzegowych oraz z warunku równowagi. Warunki brzegowe formułuje się dla włókien skrajnych ściskanych, w których naprężenie normalne ma wartość σ_s oraz dla włókien skrajnych rozciąganych, w których naprężenie normalne ma wartość σ_r . Warunek równowagi dotyczy wypadkowej naprężeń normalnych w całym przekroju, która musi być równa zero.

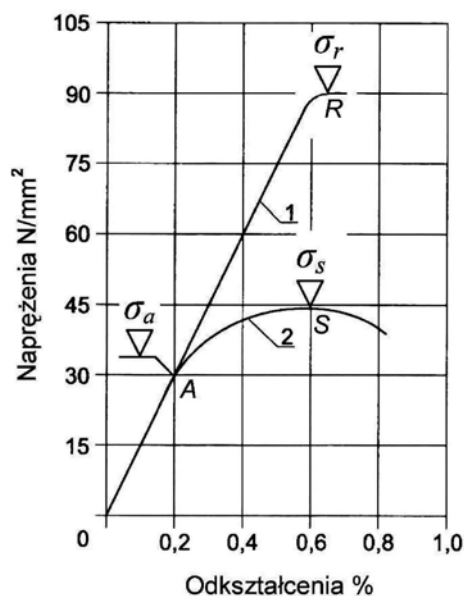
W artykule rozważa się proste modele, które można opisać w sposób analityczny wygodny w obliczeniach praktycznych. Artykuł ma charakter popularyzatorski.

2. Wytrzymałość belki drewnianej na zginanie

Rozważa się belkę drewnianą o przekroju prostokątnym o wymiarach $b \times h$, gdzie b i h oznaczają odpowiednio szerokość i wysokość przekroju belki. Zakłada się, że rozkład naprężeń normalnych w przekroju belki podczas zginania jest stały na szerokości przekroju.

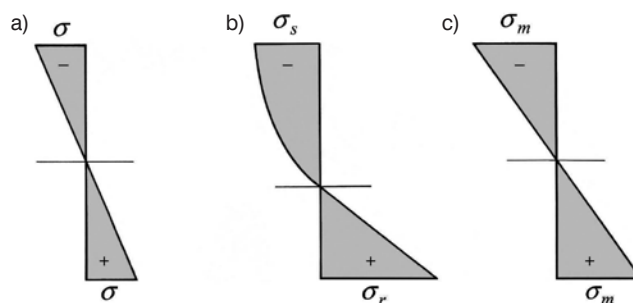
Przyczyną nieliniowej pracy belki przy zginaniu jest anizotropia drewna, a w szczególności jego budowa włóknista. W próbie bez wad zniszczenie drewna przy rozciąganiu wzdłuż włókien następuje przez zerwanie włókien, a zniszczenie przy ściskaniu następuje w wyniku lokalnej utraty stateczności włókien. Wytrzymałość na rozciąganie jest średnio ok. 2-krotnie większa od wytrzymałości na ściskanie, co ilustruje rysunek 1.

Z rysunku 1 wynikają dwie różne fazy pracy przekroju belki podczas zginania w zależności od wielkości momentu zginającego. Krzywa 1 na rysunku 1 odnosi się do włókien



Rys. 1. Wykres zależności naprężenie-odkształcenie dla drewna iglastego przy rozciąganiu i ściskaniu wzdłuż włókien: 1 – rozciąganie, 2 – ściskanie; [1] według Möhlera

belki w strefie rozciąganej, a krzywa 2 odnosi się do włókien w strefie ściskanej. Na odcinku OA wykresy ściskania i rozciągania pokrywają się i są prostoliniowe. To oznacza, że na odcinku OA moduł sprężystości jest stały i ma tę samą wartość przy rozciąganiu i ściskaniu. W tej fazie drewno zachowuje się w sposób liniowo-sprężysty, obowiązuje zasada



Rys. 2. Fazy pracy przekroju w belce zginanej: a) zakres liniowo-sprężysty dla $0 \leq \sigma \leq \sigma_a$, b) nieliniowy rozkład naprężeń w przekroju obciążonym momentem niszczącym M , c) zastępczy liniowy rozkład naprężeń w przekroju obciążonym momentem niszczącym M

płaskich przekrojów, naprężenia normalne w przekroju belki mają rozkład liniowy i oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju (rys. 2a). Maksymalne naprężenie σ_a wspólne dla rozciągania i ściskania występuje w punkcie A i osiąga wartość 65 do 85% wytrzymałości doraźnej na ściskanie σ_s . Po przekroczeniu przez naprężenia wartości σ_a wykresy rozdzielają się. W strefie rozciąganej drewno nadal zachowuje się w sposób liniowo-sprężysty zgodnie z wykresem AR, a w strefie ściskanej drewno zachowuje się w sposób nieliniowy zgodnie z wykresem AS. W chwili zniszczenia naprężenia w przekroju mają rozkład nieliniowy. Naprężenia w strefie rozciąganej osiągają wytrzymałość doraźną na rozciąganie σ_r , a w strefie ściskanej wytrzymałość doraźną na ściskanie σ_s (rys. 2b).

Niech M oznacza nośność doraźną przekroju na zginanie, tj. moment zginający powodujący złamanie belki. Jeśli przekrój jest obciążony tylko momentem zginającym M , to z warunków równowagi wynika, że moment statyczny naprężeń normalnych w przekroju względem dowolnego punktu musi być równy momentowi M . Ponadto wypadkowa naprężeń normalnych w przekroju musi być równa zero, co oznacza, że wypadkowe naprężeń ściskających oraz rozciągających są równe co do wartości i przeciwnie skierowane. Stąd, wobec nierówności $\sigma_s < \sigma_r$, wynika, że oś obojętna w przekroju na rysunku 2b leży poniżej środka ciężkości przekroju. Wielkość momentu niszczącego M zależy od wytrzymałości doraźnych σ_r i σ_s oraz od rozkładu naprężeń normalnych w przekroju.

W początkowym okresie badań belek zginanych (początek XX w.) nie brano pod uwagę różnych właściwości drewna przy ściskaniu i rozciąganiu. W całym zakresie obciążenia posługiwano się liniowym rozkładem naprężeń w przekroju belki. Wprowadzono wtedy pojęcie: wytrzymałość drewna na zginanie σ_m określone wzorem:

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \quad (1)$$

gdzie:

M jest momentem niszczącym belkę przy zginaniu, a W jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju prostokątnego określonym wzorem:

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad (2)$$

Wskaźnik wytrzymałości W określony wzorem (2) obowiązuje dla zginania belek z materiału jednorodnego izotropowego w zakresie liniowo-sprężystym. Stąd wytrzymałość na zginanie σ_m jest takim naprężeniem w włóknach skrajnych belki prostokątnej w przekroju obciążonym momentem M , jakie wystąpiłoby, gdyby rozkład naprężeń był liniowy. W ten sposób otrzymuje się schemat zastępczy przedstawiony na rysunku 2c. W schemacie tym jest niekonsekwencja polegająca na tym, że moment niszczący M występuje w nieliniowej fazie pracy materiału, a wskaźnik wytrzymałości

W dotyczy fazy liniowo-sprężystej. Schemat pokazany na rysunku 2c ma zatem charakter umowny (fikcyjny) i w rzeczywistej belce nie występuje.

Mimo tej niekonsekwencji pojęcie wytrzymałości drewna na zginanie utrzymało się i jest nadal stosowane, gdyż jest użyteczne w praktyce, pozwala bowiem operować prostymi wzorami znanymi z wytrzymałości materiałów. Wytrzymałość na zginanie określona wzorem (1) ma charakter wytrzymałości doraźnej, gdyż jest określona dla obciążenia niszczącego.

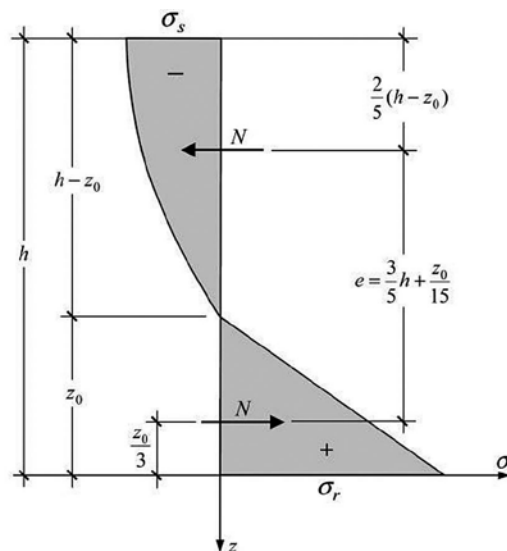
Na bazie tego pojęcia powstało określenie: wytrzymałość charakterystyczna drewna na zginanie, które jest podstawą klasyfikacji wytrzymałościowej drewna stosowanej w obliczeniach konstrukcji drewnianych.

Wielkości σ_r , σ_s , σ_m oraz M są z sobą związane przez warunki równowagi i sposób rozłożenia naprężeń normalnych w przekroju belki. W zależności od kształtu rozkładu naprężeń normalnych otrzymuje się różne nieliniowe modele zginania belki w chwili zniszczenia.

Omówione zostaną dwa podstawowe modele opisane w literaturze oraz model zaproponowany przez autora tej publikacji. We wszystkich omawianych modelach naprężenia normalne w rozciąganej części przekroju mają rozkład liniowy, a w części ściskanej rozkłady naprężeń są opisane wielomianami lub linią łamaną.

3. Model nieliniowy 2 stopnia Suensona

Pierwszy dobrze uzasadniony doświadczalnie nieliniowy model zginania belki drewnianej w chwili poprzedzającej zniszczenie został opracowany przez Suensona [2, 3] przy założeniu, że rozkład naprężeń normalnych w strefie ściskanej jest opisany parabolą, a rozkład naprężeń w strefie rozciąganej jest liniowy. Schemat obliczeniowy jest przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3. Model nieliniowy 2 stopnia Suensona

Przyjmuje się, że rozkład naprężeń normalnych w ściskanej części przekroju jest opisany równaniem 2 stopnia:

$$\sigma_s(z) = \frac{\sigma_s}{(h - z_0)^2} (z + h)^2 - \sigma_s \quad (3)$$

a rozkład naprężeń w strefie rozciąganej jest opisany funkcją liniową:

$$\sigma_r(z) = \frac{\sigma_r}{z_0} z + \sigma_r \quad (4)$$

Funkcje (3) i (4) spełniają warunki brzegowe dla naprężeń. Wielkość z_0 określającą położenie osi obojętnej wyznacza się z warunku równowagi.

W przekroju obciążonym tylko momentem zginającym siła normalna jest równa zero, zatem w przekroju o stałej szerokości pole wykresu naprężeń w strefie ściskanej musi być równe polu wykresu naprężeń w strefie rozciąganej. Stąd:

$$\frac{2}{3} \sigma_s (h - z_0) = \frac{1}{2} \sigma_r z_0 \quad (5)$$

Z równania (5) wyznacza się położenie osi obojętnej z_0 :

$$z_0 = \frac{4\sigma_s h}{3\sigma_r + 4\sigma_s} \quad (6)$$

Wypadkowa N naprężeń normalnych w strefie rozciąganej przekroju jest równa:

$$N = \frac{1}{2} b \sigma_r z_0 = \frac{2\sigma_r \sigma_s h b}{3\sigma_r + 4\sigma_s} \quad (7)$$

Tę samą wartość ma wypadkowa N naprężeń normalnych w strefie ściskanej przekroju. Ramię e pary sił N jest równe (rys. 3):

$$e = \frac{3}{5} h + \frac{z_0}{15} = \frac{40\sigma_s + 27\sigma_r}{15(3\sigma_r + 4\sigma_s)} h \quad (8)$$

Moment zginający M przenoszony przez przekrój jest równy $M = Ne$, zatem:

$$M = \frac{4\sigma_s \sigma_r (40\sigma_s + 27\sigma_r)}{5(3\sigma_r + 4\sigma_s)^2} \times \frac{b h^2}{6} \quad (9)$$

Stąd, na podstawie wzorów (1) i (2), wytrzymałość na zginanie S_m jest równa:

$$\sigma_{ml} = \frac{4\sigma_s \sigma_r (40\sigma_s + 27\sigma_r)}{5(3\sigma_r + 4\sigma_s)^2} \quad (10)$$

4. Model nieliniowy 4 stopnia

W modelu Suensona na osi obojętnej występuje załamanie krzywej aproksymującej rozkład naprężeń przy przejściu ze strefy ściskanej w strefę rozciąganą. Załamanie to nie jest zgodne z rzeczywistym rozkładem naprężeń, gdyż w pobliżu osi obojętnej naprężenia mają małe wartości i zgodnie z rysunkami 1 i 2 powinny się zmieniać lokalnie liniowo. Tę

niezgodność można w znacznym stopniu wyeliminować, przyjmując bardziej wypukłą funkcję opisującą rozkład naprężeń w strefie ściskanej. Przyjmuje się zatem, że rozkład naprężeń w strefie ściskanej jest opisany funkcją 4 stopnia:

$$\sigma_s(z) = \frac{\sigma_s}{(h - z_0)^4} (z + h)^4 - \sigma_s \quad (11)$$

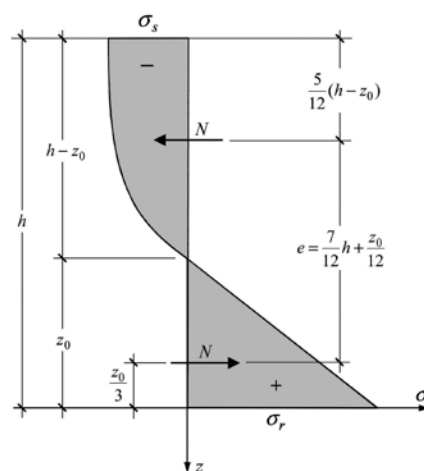
Rozkład naprężeń w strefie rozciąganej nadal jest opisany wzorem (2). Dla modelu nieliniowego 4 stopnia opisane go wzorami (11) i (2) rozkład naprężeń normalnych w przekroju bezpośrednio przed zniszczeniem jest przedstawiony na rysunku 4.

Pola wykresów krzywoliniowego w strefie ściskanej oraz trójkątnego w strefie rozciąganej są równe odpowiednio $\frac{4}{5} \sigma_s (h - z_0)$ oraz $\frac{1}{2} z_0 \sigma_r$. Pola te muszą być równe, zatem otrzymuje się równanie:

$$\frac{4}{5} \sigma_s (h - z_0) = \frac{1}{2} z_0 \sigma_r \quad (12)$$

Z tego równania oblicza się położenie osi obojętnej z_0 :

$$z_0 = \frac{8\sigma_s h}{5\sigma_r + 8\sigma_s} \quad (13)$$



Rys. 4. Model nieliniowy 4 stopnia

Siły wypadkowe naprężeń w strefach ściskanej i rozciąganej są równe:

$$N = \frac{1}{2} b z_0 \sigma_r = \frac{4}{5} b \sigma_s (h - z_0) \quad (14)$$

Środek ciężkości pola krzywoliniowego jest oddalony od włókien skrajnych ściskanych na odległość $\frac{5}{12}(h - z_0)$, zatem, zgodnie z rysunkiem 4, ramię e pary sił N jest równe:

$$e = \frac{7}{12} h + \frac{z_0}{12} \quad (15)$$

Moment zginający M w przekroju belki jest równy momentowi pary sił Ne , zatem:

$$M = Ne = \frac{1}{2}bz_0\sigma_r \left(\frac{7}{12}h + \frac{z_0}{12} \right) \quad (16)$$

Po wstawieniu do wzoru (16) wielkości z_0 określonej wzorem (13) i wykonaniu rachunków otrzymuje się:

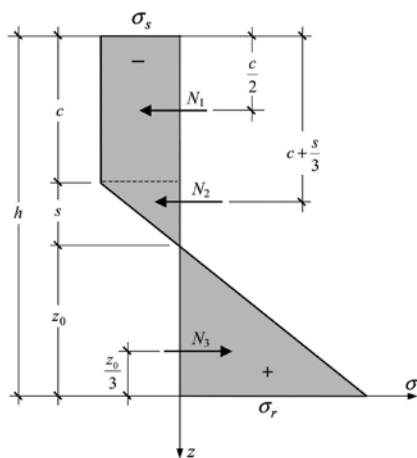
$$M = \frac{2\sigma_r\sigma_s(35\sigma_r + 64\sigma_s)}{(5\sigma_r + 8\sigma_s)^2} \times \frac{bh^2}{6} \quad (17)$$

oraz:

$$\sigma_{m2} = \frac{2\sigma_r\sigma_s(35\sigma_r + 64\sigma_s)}{(5\sigma_r + 8\sigma_s)^2} \quad (18)$$

5. Model odcinkowo-liniowy Thunella

W modelu Thunella [3] rozkład naprężeń normalnych w przekroju jest opisany linią łamaną przedstawioną na rysunku 5. Wypadkowa naprężeń normalnych w przekroju jest równa zeru, zatem pole wykresu naprężeń w strefie ściskanej jest równe polu wykresu naprężeń w strefie rozciąganej. Stąd wynika równanie (rys. 5):



Rys. 5. Model odcinkowo-liniowy Thunella

$$c\sigma_s + \frac{1}{2}s\sigma_s = \frac{1}{2}z_0\sigma_r \quad (19)$$

Z rysunku 5 wynikają następujące zależności geometryczne:

$$\frac{s}{\sigma_s} = \frac{z_0}{\sigma_r} \quad (20)$$

$$h = c + s + z_0 \quad (21)$$

Po rozwiązaniu układu równań (19)–(21) względem c , s , z_0 otrzymuje się:

$$c = \frac{\sigma_r - \sigma_s}{\sigma_r + \sigma_s} h \quad (22)$$

$$s = \frac{2\sigma_s^2}{(\sigma_r + \sigma_s)^2} h \quad (23)$$

$$z_0 = \frac{2\sigma_s\sigma_r}{(\sigma_r + \sigma_s)^2} h \quad (24)$$

Wypadkowe siły N_1 , N_2 , N_3 poszczególnych części bryły naprężeń normalnych, zgodnie z rysunkiem 5, są równe:

$$N_1 = bc\sigma_s \quad N_2 = \frac{1}{2}bs\sigma_s \quad N_3 = \frac{1}{2}bz_0\sigma_r \quad (25)$$

Moment M w przekroju belki obliczony jako moment statyczny sił N_1 , N_2 , N_3 względem punktu na osi obojętnej jest równy:

$$M = \left(s + \frac{c}{2} \right) N_1 + \frac{2}{3}sN_2 + \frac{2}{3}z_0N_3 \quad (26)$$

Stąd, po uwzględnieniu wzorów (22)–(25) i wykonaniu rachunków otrzymuje się:

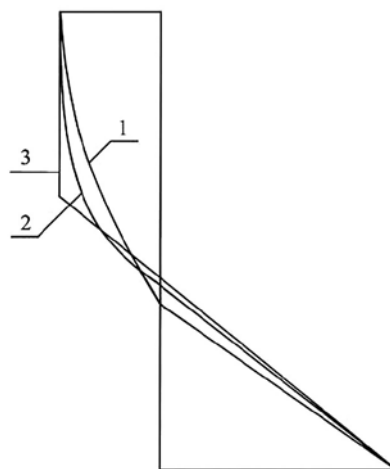
$$M = \frac{(3\sigma_r - \sigma_s)\sigma_s}{\sigma_r + \sigma_s} \times \frac{bh^2}{6} \quad (27)$$

Z tego wzoru od razu wynika, że wytrzymałość na zginanie jest określona wzorem:

$$\sigma_{m3} = \frac{(3\sigma_r - \sigma_s)\sigma_s}{\sigma_r + \sigma_s} \quad (28)$$

6. Obliczenia testowe i porównanie modeli

Do obliczeń testowych przyjęto wartości wytrzymałości dołączonych σ_s , σ_r , σ_m uzyskane z badań doświadczalnych drewna sosnowego o wilgotności 12% pochodzącego z różnych siedlisk Europy. Przyjęte dane podane są w tabl. 3–6 zamieszczonych w monografii [4]. Dane te uznaje się za reprezentatywne dla drewna sosnowego.



Rys. 6. Graficzne porównanie modeli: 1 – model nieliniowy 2 stopnia Suensona, 2 – model nieliniowy 4 stopnia, 3 – model odcinkowo-liniowy Thunella

Tabela 1. Obliczenia testowe

Źródło danych	Wartości pobrane z [4], tabl. 3–6 (MPa)			Wartości obliczone			$\Delta_i = \frac{\sigma_{mi} - \sigma_m}{\sigma_m} \times 100\%$			α we wzorze $z_0 = \alpha \times h$		
				(9)	(18)	(28)						
	σ_s	σ_r	σ_m	σ_{m1}	σ_{m2}	σ_{m3}	Δ_1	Δ_2	Δ_3	(6)	(13)	(24)
ITB	42,2	129,3	79,6	72,9	81,4	85,1	-8,4	2,3	6,9	0,30	0,34	0,37
Krzysik	43,5	104,0	78,0	69,7	77,1	79,2	-10,6	1,2	1,5	0,36	0,40	0,42
Kollmann	46,8	104,0	90,0	73,1	80,7	82,3	-18,8	-10,3	-8,6	0,38	0,42	0,43
Bałdin	40,0	100,0	75,0	65,0	72,1	74,3	-13,3	-3,9	-0,9	0,35	0,39	0,41
Dieriewo	43,0	108,6	83,0	70,1	77,8	80,2	-14,3	-6,3	-3,4	0,35	0,39	0,41
Średnia z wartości $ \Delta_i $ oraz α							13,1	4,8	4,3	0,348	0,388	0,408

(6), (9) – wzory dla modelu nieliniowego 2 stopnia Suensona

(13), (18) – wzory dla modelu nieliniowego 4 stopnia

(24), (28) – wzory dla modelu odcinkowo-liniowego Thunella

Dieriewo – radziecki poradnik techniczny

Dane oraz wyniki obliczeń są zawarte w tabeli 1.

Wielkości Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 określają procentowe różnice między wartościami σ_{mi} obliczonymi dla modeli oraz wartościami σ_m uzyskanymi z badań doświadczalnych. Dla modelu Suensona wszystkie wartości Δ_1 są mniejsze, średnio o 13,1%, od wartości z badań doświadczalnych. Stąd moment zginający przenoszony przez przekrój belki oszacowany na podstawie modelu Suensona jest zaniżony średnio o 13,1%.

Dla modelu nieliniowego 4 stopnia oraz modelu odcinkowo-liniowego Thunella odchyłki wartości obliczonych σ_{mi} od wartości doświadczalnych σ_m są dodatnie oraz ujemne i średnio nie przekraczają odpowiednio $\Delta_2 = 4,8\%$ oraz $\Delta_3 = 4,3\%$. To oznacza, że modele te mają charakter uniwersalny, gdyż dla dużej populacji prób dają wyniki wypośredkowane o zadowalającej dokładności.

W tabeli 1 można zauważyć, że wszystkie wartości liczbowe dla modelu nieliniowego 4 stopnia znajdują się między wartościami dla modelu Suensona oraz modelu odcinkowo-liniowego Thunella. To samo widać na graficznym porównaniu modeli przedstawionym na rysunku 6.

Modele nieliniowy 4 stopnia oraz odcinkowo-liniowy Thunella można uznać za równoważne i zarekomendować je jako modele przydatne do obliczeń praktycznych.

7. Podsumowanie

Drewno jest materiałem anizotropowym i ma różne właściwości sprężyste oraz różne wytrzymałości doraźne przy ścisaniu i rozciąganiu. Stąd wynika, że modele zniszczenia

belek drewnianych przy zginaniu mają charakter nieliniowy. Kształt funkcji opisującej rozkład naprężeń w przekroju belki w chwili zniszczenia można wzorować na rozkładzie naprężeń zgodnym z doświadczeniem. Na tej podstawie, stosując warunki równowagi naprężeń w przekroju belki, można budować różne modele zniszczenia belki drewnianej przy zginaniu. Jednym z najstarszych jest model Suensona, w którym naprężenia ściskające w przekroju belki aproksymuje się za pomocą parabol, a naprężenia rozciągające mają rozkład liniowy. Drugi – to model Thunella, w którym rozkład naprężeń w całym przekroju belki aproksymuje się za pomocą linii łamanej złożonej z odcinków prostych. Na tle tych modeli przedstawiono model autorski, w którym naprężenia w strefie ściskanej aproksymuje się za pomocą wielomianu 4 stopnia. W ramach tych modeli sformułowano związki między wytrzymałościami doraźnymi drewna bez wad na ścisanie, rozciąganie i zginanie oraz oszacowano moment zginający w belce w chwili zniszczenia. Na przykładach wykazano, że model Thunella oraz zaproponowany model nieliniowy 4 stopnia dobrze pasują do danych doświadczalnych i mogą być stosowane w obliczeniach praktycznych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Neuhaus H., Budownictwo drewniane, Polskie Wydawnictwo Techniczne, Rzeszów, 2004
- [2] Suenson E., Die Lange der Nulllinie in gebogenen Holzbalken, Holz als Roh- und Werkstoff, September 1941, Heft 9, str. 305–314
- [3] Kollmann F., Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe, Erster Band, Springer Verlag, 1951
- [4] Michniewicz W., Konstrukcje drewniane, Wydawnictwo Arkady, 1958

**Serdecznie zapraszamy autorów
do publikowania w „Przeglądzie Budowlanym”**

Za publikację w miesięczniku „Przegląd Budowlany” uzyskuje się 5 punktów