

Mykhaylo DOROZHOVETSPOLITECHNIKA RZESZOWSKA, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW DIAGNOSTYCZNYCH,
ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów**Opracowanie wyników obserwacji
bazujące na przybliżonej metodzie statystyk pozycyjnych**

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Absolwent (1975) Katedry Techniki Informacyjno – Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie zatrudniony na stanowisku profesora zwyczajnego w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych PRz. Zajmuje się analizą i oceną niepewności wyników pomiarów, zagadnieniami pomiarów tomograficznych oraz problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych. Opublikował ponad 240 prac naukowych w tym 6 podręczników.



e-mail: michdor@prz.edu.pl

Streszczenie

W pracy zaproponowano przybliżoną metodę statystyk pozycyjnych wykorzystaną do opracowania losowych obserwacji o nieznanym a priori rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa. Wyjaśniono problemy zastosowania metody dokładnej związane ze złożonymi obliczeniami całek podwójnych przy wyznaczaniu macierzy kowariancji. Metoda przybliżona bazuje na prostych asymptotycznych zależnościach wariancji i współczynnika korelacji statystyk pozycyjnych od ich liczby i numerów oraz rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Z tego powodu macierz kowariancji jest wyznaczana przy użyciu prostych operacji arytmetycznych. Przedstawiono wyniki badań metody przybliżonej i wykazano jej skuteczność na podstawie ich porównania z wynikami otrzymywanymi dla metody dokładnej.

Słowa kluczowe: obserwacje losowe, statystyki pozycyjne niepewność.

**The influence correction method of
observation autocorrelation to standard
uncertainty of mean value****Abstract**

In the present paper the approximate method of order statistics used to processing of the random observations of unknown a priori probability density distribution is proposed. The problems of precise method of determination of the covariance matrix of order statistics based on complex calculations of double integrals of two-dimensional density distribution of order statistics (4) are discussed. The approximate method is based on asymptotical dependencies of variance (11) and correlation coefficient (12) of order statistics from their number and density distribution function. The proposed method does not require the calculation of complex integrals because the covariance matrix is determined by performing ordinary arithmetic operations (13). In addition, the proposed method provides an increase of the accuracy of the calculations if the size of the matrix increases, i.e. if the number of observations increases (Fig. 3). The results of Monte Carlo simulations of the approximate method are presented. On the basis of a comparison of the characteristics of errors and standard uncertainties (16), (17), (18) and (19) of the exact and approximate methods effectiveness of the proposed method has been analyzed (Tab. 1).

Keywords: random observations, order statistics, uncertainty.

1. Metoda statystyk pozycyjnych

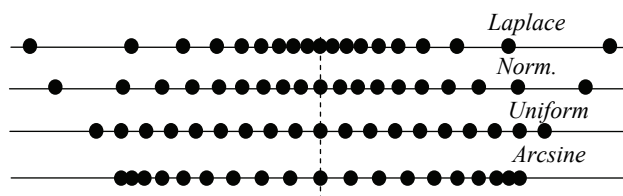
Standardowa metoda opracowania serii nieskorelowanych obserwacji x_1, x_2, \dots, x_n , (n jest liczebnością zarejestrowanych obserwacji) zapewnia minimalną wartość standardowej niepewności typu A estymatora wyniku (wartości średniej) tylko w przypadku normalnego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa populacji $p(x)$ lub odpowiednio bliskiego mu rozkładu. W przypadku istotnie różniących się rozkładów istnieją parametry położenia obserwacji inne niż wartość średnia, których standardowa niepewność jest mniejsza niż standardowa niepewność wartości średniej. W pracach [1], [2], [3] przedstawiono metodę bazującą na statystykach pozycyjnych, w której bezpośrednio wykorzystuje się informację

o rozkładzie $p(x)$. W [3] udowodniono, że w tej metodzie, dla wariancji $\text{var}(\hat{\mu})$ i wariancji średniej $\text{var}(\bar{x})$, zachodzi nierówność:

$$\text{var}(\hat{\mu}) \leq \frac{\sigma^2}{n} = \text{var}(\bar{x}), \quad (1)$$

przy czym równość $\hat{\mu} = \bar{x}$ zachodzi tylko dla rozkładu normalnego.

Jednak niezbędnym warunkiem wyznaczania wyniku najlepszego ze względu na niepewność standardową jest dokładna znajomość rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji $p(x)$. Jeśli rozkład ten nie jest znany, lecz jest wiadome, że może być on jednym ze zbioru modeli możliwych do zastosowania, to można się posłużyć metodą opisaną w pracach [4]-[6]. Zgodnie z tą metodą uporządkowane wejściowe obserwacje $\mathbf{X}_s = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})^T$ porównywane są z zestawem J szeregów o tej samej liczebności, czyli tak zwanych obserwacji referencyjnych $\mathbf{X}_{ref_1} = (x_{ref_{1,1}}, x_{ref_{1,2}}, \dots, x_{ref_{1,n}})^T$, $\mathbf{X}_{ref_2} = (x_{ref_{2,1}}, x_{ref_{2,2}}, \dots, x_{ref_{2,n}})^T$, ..., $\mathbf{X}_{ref_J} = (x_{ref_{J,1}}, x_{ref_{J,2}}, \dots, x_{ref_{J,n}})^T$, odpowiadających wybranym funkcjom rozkładów prawdopodobieństwa $f_1(x), f_2(x), \dots, f_J(x)$, jak to pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Przykładowe zestawy wartości przeciętnych statystyk pozycyjnych – obserwacji referencyjnych ($n=19$)

Fig. 1. The exemplary sets of expected values of order statistics - reference observations ($n=19$)

Obserwacje referencyjne są obliczane jako wartości przeciętne $E(s_{j,k})$ statystyk pozycyjnych x_k ($k=1,2,\dots,n$), które zależne są tylko od rozkładu $p_j(x)$ i dystrybuanty $F_j(x)$ zgodnie z zależnością:

$$x_{ref_{j,k}} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{j,k}(x) dx, \quad (2)$$

gdzie $p_{j,k}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F_j(x)]^{k-1} [1-F_j(x)]^{n-k} p_j(x)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa k -tej statystyki pozycyjnej [7].

Obliczone według (2) wartości przeciętne statystyk pozycyjnych są liczbami dokładnymi dla rozkładu $p_j(x)$ i dlatego są one nazywane obserwacjami referencyjnymi.

Zasada wyznaczania najlepszych estymatorów położenia μ i szerokości σ próby badanej przy użyciu tej metody polega na wstępnym uporządkowaniu obserwacji $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, a następnie na minimalizacji sumy kwadratów odchyłek

$$v_k = \mu + E[s_k] \cdot \sigma - x_{(k)} = x_{ref'_k} - x_{(k)},$$

gdzie: $x_{ref'_k} = \mu + x_{ref_k} \cdot \sigma$ (rys. 2a).

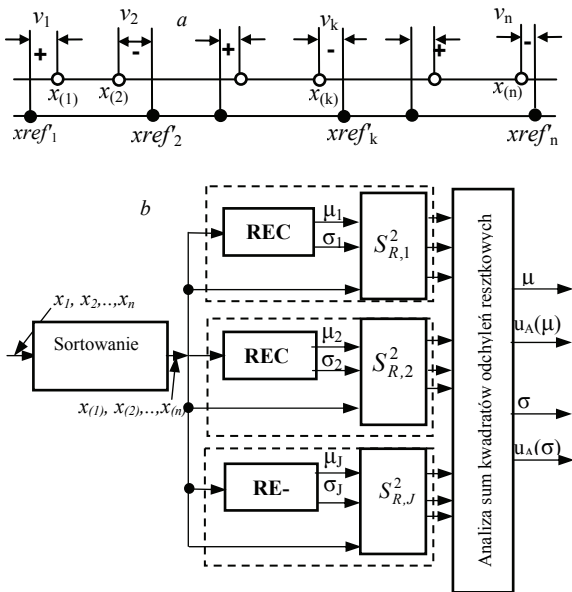
Uproszczony schemat blokowy algorytmu opracowania wyników obserwacji przedstawiono na rys. 2b. Dla każdego modelu $p_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, J$) rozkładu prawdopodobieństwa, parametry μ_j i σ_j próby wyznaczane są metodą ważonych najmniejszych kwadratów, która w zapisie macierzowym ma postać [3]:

$$(\mu_j, \sigma_j)^T = (\mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{A}_j)^{-1} \mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{X}_s = \mathbf{REC}_j \cdot \mathbf{X}_s, \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{REC}_j = (\mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{A}_j)^{-1} \mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j$ jest tzw. macierzą rekonstrukcyjną; $\mathbf{A}_j^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ xref_{j,1} & xref_{j,2} & \dots & xref_{j,n} \end{pmatrix}$, $\mathbf{W}_j = \mathbf{COV}_j^{-1}$ - jest odwrotnością macierzy kowariancji statystyk pozycyjnych, której elementy wyznaczone są z obliczania dwuwymiarowych całek od łącznego rozkładu prawdopodobieństwa k -tej i l -tej statystyk pozycyjnych $p_{2_j}(x_k, x_l) = C_2 \cdot [F_j(x_k)]^{k-1} [F_j(x_l)]^{l-k-1} [1 - F_j(x_l)]^{n-l} p_j(x_k) p_j(x_l)$ o postaci:

$$Cov_{j;k,l} = \iint_{x_l > x_k} x_k \cdot x_l \cdot p_{2_j}(x_k, x_l) dx_k dx_l - xref_{j,k} xref_{j,l}, \quad (4)$$

gdzie $C_2 = n! / [(n-l)! \cdot (l-k-1)! \cdot (k-1)!]$.



Rys. 2. Zasada wyznaczania parametrów μ i σ w metodzie bazującej na statystykach pozycyjnych (a), schemat blokowy opracowania obserwacji według metody statystyk pozycyjnych (b)

Fig. 2. Principle of the determination of location μ and width σ parameters using order statistics method (a), block-scheme of the observations processing by order statistics method (b)

Następnie dla każdej pary obliczonych parametrów (μ_j, σ_j) obliczane są wartości nieobciążonych estymatorów sum kwadratów odchyleń reszkowych (SKR), jako:

$$S_{R,j}^2 = \frac{(\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j \cdot (\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j)^T)^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{X}_s - \mathbf{A}_j \cdot (\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j)^T)}{n-2} \quad (5)$$

Na podstawie analizy wartości $S_{R,1}^2, S_{R,2}^2, \dots, S_{R,j}^2, \dots, S_{R,J}^2$ (rys. 2b), przykładowo na drodze wyznaczenia minimalnej wartości $S_{R,j}^2$, obliczane są wartości parametru położenia i szerokości próby wejściowej $(\hat{\mu}; \hat{\sigma})$, dla których próba wejściowa w najlepszy sposób (z minimalną SKR (5)) zostaje dopasowana do odpowiedniej próby referencyjnej. Standardowe niepewności wartości parametrów położenia i szerokości obliczonych w taki sposób określane są zgodnie z zależnościami:

$$u_A(\hat{\mu}) = d_{j;0,0} \sqrt{S_{R,j}^2}; \quad u_A(\hat{\sigma}) = d_{j;1,1} \sqrt{S_{R,j}^2} \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_j = (\mathbf{A}_j^T \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{A}_j)^{-1} = \begin{pmatrix} d_{j;0,0} & 0 \\ 0 & d_{j;1,1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

jest macierzą kowariancji o wymiarach 2×2 , która w przypadku symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa jest diagonalną.

W pracach [4] - [6] pokazano, że przy braku znajomości rozkładu gęstości prawdopodobieństwa populacji $p(x)$ przedstawiona metoda opracowania wyników obserwacji zapewnia wyznaczenie wyniku pomiaru ze standardowym odchyleniem mniejszym niż odchylenie standardowe wartości średniej przy liczbie obserwacji $n \gg 15$, a jej skuteczność rośnie przy zwiększeniu tej liczby.

2. Problemy praktycznej realizacji opisanej metody

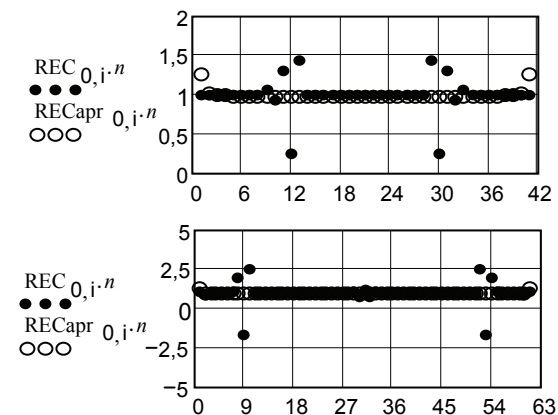
Podstawowym problemem praktycznej realizacji przedstawionej wyżej metody jest złożoność obliczania macierzy kowariancji COV. Chociaż dla niektórych rozkładów, na przykład dla jednostajnego, są gotowe proste wzory na obliczanie macierzy autokowariancji, to jednak w przypadku innych funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $p(x)$ obliczanie tej macierzy według wzoru (4), to jest obliczanie podwójnych całek dwumiarowych łącznych rozkładów prawdopodobieństwa statystyk pozycyjnych, jest bardzo skomplikowane.

Oprócz tego dokładność obliczeń macierzy kowariancji, a następnie jej odwrotności, zmniejsza się ze zwiększeniem liczby obserwacji n . Dotyczy to też macierzy rekonstrukcyjnej REC we wzorze (3), która jest macierzą dwuwierszową o postaci:

$$\mathbf{REC}_j = \begin{pmatrix} g_{1,j} & g_{2,j} & \dots & g_{[(n+1)/2],j} & \dots & g_{2,j} & g_{1,j} \\ -\gamma_{1,j} & -\gamma_{2,j} & \dots & 0 & \dots & \gamma_{2,j} & \gamma_{1,j} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

w której, w przypadku symetrycznych rozkładów $f(x)$, elementy $g_{k,j}$ pierwszego wiersza charakteryzują się symetrią parzystą, natomiast elementy drugiego wiersza $\gamma_{k,j}$ mają symetrię nieparzystą.

Dla rozkładu normalnego wartości wszystkich współczynników pierwszego wiersza macierzy REC powinny być teoretycznie jednakowe i równe $1/n$. Jednak przy obliczeniach w środowisku Mathcad13 z dokładnością 10^{-13} przy liczbie obserwacji $n = 41$ i 61 , wartości części współczynników w dużym stopniu różnią się od $1/n$, tym bardziej, im większe jest n (rys. 3). Podobna sytuacja zachodzi w przypadku innych rozkładów. Z kolei niedokładność macierzy REC przekłada się na niedokładność wyznaczania poszukiwanych parametrów próby wejściowej.



Rys. 3. Wartości współczynników pierwszego wiersza „dokładnej” macierzy REC (●) oraz przybliżonej RECapr (○) dla rozkładu normalnego przy liczbie obserwacji $n=41$ oraz $n=61$

Fig. 3. Values of the first row coefficients of the “precise” matrix REC and approximate RECapr (○) for the normal distribution for number of observations $n=41$ and $n=61$

3. Przybliżona metoda statystyk pozycyjnych

W celu uzyskania istotnego uproszczenia obliczeń macierzy kowariancji zaproponowano wykorzystanie asymptotycznego przybliżenia dla wariancji i współczynników korelacji pomiędzy dwoma statystykami pozycyjnymi dla dużych $n \rightarrow \infty$. Do wyprowadzenia tych wzorów wykorzystano właściwości parametrów statystyk pozycyjnych.

Wiadomo jest [7], że kwantyle $x_{(k)}$, i $x_{(l)}$ z próby prostej, pobranej z populacji o rozkładzie $p(x)$, przy $n \rightarrow \infty$ mają rozkład asymptotycznie normalny o wartościach oczekiwanych $m_k = x_{(\lambda,k)}$, $m_l = x_{(\lambda,l)}$, oraz wariancjach i współczynniku korelacji wzajemnej:

$$\sigma_k^2 \approx \frac{\lambda_k(1-\lambda_k)}{n(p(x_{(\lambda,k)}))^2}, \quad \sigma_l^2 \approx \frac{\lambda_l(1-\lambda_l)}{n(p(x_{(\lambda,l)}))^2}, \quad \rho_{k,l} \approx \sqrt{\frac{\lambda_k(1-\lambda_l)}{\lambda_l(1-\lambda_k)}}, \quad (9)$$

gdzie $k = [n\lambda_k] + 1$, $l = [n\lambda_l] + 1$, $0 < \lambda_k < \lambda_l < 1$.

Dla ciągłego rozkładu $p(x)$ kwantyl rzędu λ , oznaczony jako $x_{(\lambda)}$, spełnia równość $\lambda = F(x_{(\lambda)})$, to jest $x_{(\lambda)}$ wyznaczany jest przez odwrotną dystrybuantę $x_{(\lambda)} = F^{-1}(\lambda) = qF(\lambda)$.

Określając wartości kwantyli dla $1 \leq k \leq n$ jako $\lambda_k = k/(n+1)$, przybliżone wartości oczekiwane statystyk pozycyjnych (obserwacje referencyjne) można obliczyć według wzorów:

$$xref_k \approx qF(\lambda_k) = F^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right), \quad (10)$$

a wartości wariancji i współczynnika korelacji jako:

$$\sigma_k^2 \approx \frac{k(n+1-k)}{n(n+1)^2(p_j(xref_k))^2}, \quad \sigma_l^2 \approx \frac{l(n+1-l)}{n(n+1)^2(p_j(xref_l))^2}, \quad (11)$$

$$\rho_{k,l} \approx \sqrt{\frac{k(n+1-l)}{l(n+1-k)}}, \quad 1 \leq k < l \leq n. \quad (12)$$

Na podstawie tych zależności przybliżone wartości współczynników macierzy kowariancji mogą być obliczone zgodnie z zależnościami:

$$\text{Cov}_{j;k,l} \approx \frac{k \cdot (n+1-l)}{n(n+1)^2} \cdot \frac{1}{p_j(xref_{j;k}) \cdot p_j(xref_{j;l})}, \quad 1 \leq k < l \leq n. \quad (13)$$

Należy zauważyć, że otrzymany przybliżony wzór (13) na obliczenie macierzy kowariancji statystyk pozycyjnych po pomnożeniu przez stały współczynnik $n/(n+2)$ jest dokładny dla jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa. Z tego powodu proponowana metoda nie została zbadana dla obserwacji o rozkładzie jednostajnym.

Ze wzrostem liczby obserwacji dokładność przybliżonych zależności (11) i (12) rośnie, co powoduje zwiększenie dokładności obliczeń macierzy kowariancji według wzoru przybliżonego (13). Charakterystyki liczbowe dotyczące dokładności zarówno tych obliczeń, jak i wyznaczania poszukiwanych parametrów przedstawiono w kolejnej części pracy.

4. Badanie metody przybliżonej

Badania zostały przeprowadzone w dwóch etapach. W pierwszym porównano wartości oczekiwane statystyk pozycyjnych i wartości elementów macierzy autokowariancji obliczone na podstawie dokładnych i przybliżonych zależności, a także wartości współczynników dokładnej i przybliżonej dwuwierszowej macierzy rekonstrukcyjnej REC. Badania zostały wykonane dla liczby obserwacji $n = 21, 41$ i 61 i dla wybranych rozkładów prawdopodobieństwa: Laplace'a, normalnego oraz typu arcsinus.

Okazało się, że wartości współczynników macierzy REC obliczonej na podstawie metody przybliżonej (13) mniej się różnią od wartości teoretycznych niż współczynniki macierzy obliczonej na podstawie „dokładnej” macierzy kowariancji (4) (rys. 3). Porównano także wartości współczynników macierzy \mathbf{M}_j o postaci:

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{W}_j \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}_j \cdot \text{REC}_j), \quad (14)$$

wykorzystywanej we wzorze (5) do wyznaczania nieobciążonego estymatora wariancji odchyleń resztkowych zgodnie z zależnością:

$$S_{R,j}^2 = \frac{\mathbf{X}_s^T \cdot \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{X}_s}{n-2}. \quad (15)$$

Współczynniki macierzy \mathbf{M}_j oraz \mathbf{D}_j decydują o dokładności wyznaczania standardowych niepewności obliczanych na podstawie parametrów próby badanej, zgodnie ze wzorem (6). Maksymalna różnica pomiędzy „dokładną” i przybliżoną macierzą jest rzędu kilku procent, co oznacza, że metoda przybliżona w małym stopniu wpływa na obliczane wartości standardowych niepewności rozpatrywanych parametrów.

W drugim etapie skuteczność przybliżonej metody została zbadana metodą Monte-Carlo przy liczbie symulacji $M = 10^5$. Przedstawione poniżej wyniki badań dotyczą wartości parametrów położenia $\mu_0 = 5,000$ i szerokości $\sigma = 0,200$. Skuteczność obydwu metod porównano na podstawie analizy statystycznej wartości błędów $\Delta_j^{(n)} = \hat{\mu}_j^{(n)} - \mu_0$ parametru położenia i jego standardowej niepewności $u_{A,j}^{(n)}(\hat{\mu})$. Wartości średnie parametrów błędów i standardowych niepewności wyników metody dokładnej i przybliżonej obliczono na podstawie zależności:

$$\bar{\Delta}_{\hat{\mu}}^{(n)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Delta_j^{(n)}; \quad u(\hat{\mu}^{(n)}) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M u_{A,j}(\hat{\mu}^{(n)}), \quad (16)$$

a odchylenia standardowe jako:

$$s_{\Delta}(\hat{\mu}^{(n)}) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\Delta_j^{(n)} - \bar{\Delta}_{\hat{\mu}}^{(n)})^2}, \quad (17a)$$

$$s_u(\hat{\mu}^{(n)}) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (u_{A,j}(\hat{\mu}^{(n)}) - u(\hat{\mu}^{(n)}))^2}. \quad (17b)$$

W celu porównania charakterystyk błędów i niepewności parametru położenia zostały one unormowane do teoretycznej wartości standardowego odchylenia $\sigma_{\mu} = \sigma / \sqrt{n}$ wartości średniej, zgodnie z zależnościami:

$$E_{\bar{\Delta}_{\hat{\mu}}/\sigma_{\mu}} = \frac{\bar{\Delta}_{\hat{\mu}}^{(n)}}{\sigma} \cdot \sqrt{n}, \quad E_{u(\hat{\mu})/\sigma_{\mu}} = \frac{u(\hat{\mu}^{(n)})}{\sigma} \cdot \sqrt{n}; \quad (18)$$

$$E_{s_{\Delta}(\hat{\mu})/\sigma_{\mu}} = \frac{s_{\Delta}(\hat{\mu}^{(n)})}{\sigma} \cdot \sqrt{n}, \quad E_{s_u(\hat{\mu})/\sigma_{\mu}} = \frac{s_u(\hat{\mu}^{(n)})}{\sigma} \cdot \sqrt{n}. \quad (19)$$

5. Wyniki badań i podsumowanie

Wartości parametrów błędów i standardowych niepewności wyznaczone zgodnie z zależnościami (18) i (19) dla obydwu metod w zależności od liczby obserwacji przedstawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Charakterystyki błędów i niepewności metody dokładnej i przybliżonej
 Tab. 1. The characteristics of errors and standard uncertainties of the exact and approximate methods

n	Charakterystyki błędów (Laplace)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	$3,43 \cdot 10^{-3}$	0,886	$3,73 \cdot 10^{-3}$	0,922
41	$-2,96 \cdot 10^{-3}$	0,842	$-5,05 \cdot 10^{-3}$	0,863
61	$6,77 \cdot 10^{-3}$	0,831	$8,59 \cdot 10^{-3}$	0,845
n	Charakterystyki niepewności (Laplace)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	0,782	0,247	0,817	0,303
41	0,799	0,193	0,820	0,210
61	0,800	0,168	0,802	0,180
n	Charakterystyki błędów (Normalny)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	$4,71 \cdot 10^{-3}$	1,079	$5,14 \cdot 10^{-3}$	1,077
41	$3,25 \cdot 10^{-3}$	1,030	$3,62 \cdot 10^{-3}$	1,033
61	$10,9 \cdot 10^{-3}$	1,019	$11,0 \cdot 10^{-3}$	1,019
n	Charakterystyki niepewności (Normalny)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	0,822	0,266	0,860	0,285
41	0,937	0,203	0,962	0,211
61	0,976	0,158	0,993	0,162
n	Charakterystyki błędów (Arcsin)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{\Delta\hat{\mu}}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{\Delta(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	$-8,79 \cdot 10^{-3}$	0,470	$-8,10 \cdot 10^{-3}$	0,423
41	$-2,54 \cdot 10^{-3}$	0,459	$-2,85 \cdot 10^{-3}$	0,476
61	$-0,10 \cdot 10^{-3}$	0,099	$-0,41 \cdot 10^{-3}$	0,100
n	Charakterystyki niepewności (Arcsin)			
	Metoda dokładna		Metoda przybliżona	
	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$	$E_{u(\hat{\mu})}^-/\sigma_{\mu}^-$	$E_{s_{u(\hat{\mu})}}/\sigma_{\mu}^-$
21	0,269	0,204	0,235	0,259
41	0,168	0,152	0,176	0,175
61	0,134	0,127	0,150	0,141

Jak wynika to z danych przedstawionych w tabeli 1, przy odchyleniu rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji od normalnego obydwie metody zapewniają mniejsze standardowe wartości

błędów $s_{\Delta(\hat{\mu})}$ (podczas opracowania rzeczywistych obserwacji błędy nie są znane) oraz standardowe niepewności $u(\hat{\mu})$ wyniku (parametru położenia) w porównaniu do standardowej wartości błędu σ_{μ}^- i standardowej niepewności $u(\bar{\mu})$ wartości średniej $\bar{\mu}$.

Ze zwiększeniem liczby obserwacji skuteczność metody przybliżonej zwiększa się, przy czym jest ona tym większa, im bardziej rozkład prawdopodobieństwa różni się od normalnego.

Różnica pomiędzy wartościami średnimi standardowych odchylen błędów wyznaczania parametru położenia w obydwu metodach nie przekracza kilku procent (dla rozkładu normalnego ta różnica jest praktycznie nieistotna). Dla $n = 21$, $n = 41$ i $n = 61$ wynosi ona odpowiednio:

- dla rozkładu Laplace'a: 4,0%, 2,5% i 1,7%;
- dla normalnego: 0,26%, 0,25% i 0,02%;
- a dla typu arcsinus: 9,9%, 3,4% i 0,4%.

Różnica między średnimi wartościami standardowych niepewności parametru położenia w obydwu metodach jest nieco większa, a mianowicie wynosi odpowiednio:

- dla rozkładu Laplace'a: 4,5%, 2,6% i 0,3%;
- dla normalnego: 4,6%, 2,7% i 1,7%;
- dla typu arcsinus: 12,5%, 4,9% i 11,7%.

Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć wniosek, że przybliżona metoda wyznaczania podstawowych macierzy, wykorzystywanych do opracowania obserwacji metodą statystyk pozycyjnych, z obliczeniowego punktu widzenia jest stosunkowo prosta i zarazem istotnie nie pogarsza dokładności wyznaczania parametru położenia. Wykorzystanie zaproponowanego przybliżenia w metodzie statystyk pozycyjnych stwarza szerokie możliwości jej praktycznego zastosowania do opracowania wyników losowych obserwacji przy dowolnej ich liczności i nieznanym a priori rozkładach prawdopodobieństwa.

6. Literatura

- [1] Lloyd E.H.: Least-squares estimation on location and scale parameters using order statistics. *Biometrika*, 39 (1952).
- [2] Downton F.: A note of ordered least-squares estimation. *Biometrika*, 40 (1953).
- [3] Kendall M. G. and Stuart A.: *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2. Charles Griffin and Co Ltd, London, 3-d edition, 1973.
- [4] Dorozhovets M.: Investigation of the Test Samples Method, Used for the Evaluation of Measurement Result and its Uncertainty. *Proc. of Int. Conf. on Precision Measurement*. TU Ilmenau. 08–12 Sept. 2008, 91-92.
- [5] Dorozhovets M.: Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na ich porównaniu z próbami referencyjnymi. *Pomiary. Automatyka. Kontrola*. 55 (2009), N9, 754-757.
- [6] Dorozhovets M., Kochan O.: Estimation of the best measurement result and its standard uncertainty by input observations processing using the method of reference samples based on order statistics. *Proc. of the 5-th IEEE International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications*. 21-23 September 2009, Rende (Cosenza), Italy, 351-354.
- [7] Fisz M.: *Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, London, 1963.

otrzymano / received: 14.03.2014

przyjęto do druku / accepted: 02.05.2014

artykuł recenzowany / revised paper