

Adam OWCZARKOWSKI
Paweł BACHMAN
Jarosław GOŚLIŃSKI
Piotr OWCZAREK
Roman REGULSKI

STEROWANIE NIELINIOWE BACKSTEPPING WAHADŁA ODWRÓCONEGO Z NAPĘDEM INERCYJNYM

STRESZCZENIE *W artykule przedstawiono działanie nieliniowego algorytmu sterowania backstepping użytego do stabilizacji wahadła odwróconego IWP (Inertia Wheel Pendulum). Analizowanym obiektem jest konstrukcja umocowana na dwóch kołach i posiadająca silnik napędzający koło zamachowe. To czyni z niej nieliniowy układ o dwóch stopniach swobody (kąt odchylenia od pionu i kąt obrotu koła) i jednym wymuszeniu (moment siły na wale silnika). Jako punkt pracy obrano niestabilną pozycję pionową. W oparciu o teorię stabilności Lapunowa, analitycznie wyznaczono prawo sterowania. Dla porównania wyznaczono również sterowanie liniowo-kwadratowe LQR (Linear Quadratic Regulator). Wykonano testy symulacyjne obu algorytmów wykazując, że w wielu sytuacjach sterowanie backstepping pozwala uzyskać lepsze rezultaty niż sterowanie LQR.*

Słowa kluczowe: *sterowanie nieliniowe, backstepping, LQR, IWP*

mgr inż. Adam OWCZARKOWSKI, mgr inż. Jarosław GOŚLIŃSKI
mgr inż. Roman REGULSKI

e-mail: [Adam.J.Owczarkowski, Jarosław.A.Goslinski, Roman.Regulski]@doctorate.put.poznan.pl

mgr inż. Piotr OWCZAREK

e-mail: Piotr.Owczarek@put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
pl. Marii Skłodowskiej-Curie 5, 60-965 Poznań

dr inż. Paweł BACHMAN

e-mail: P.Bachman@eti.uz.zgora.pl

Uniwersytet Zielonogórski
ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra

1. WSTĘP

Istnieje wiele metod sterowania nieliniowego. Są to między innymi: sliding mode control, Lyapunov redesign, nonlinear damping czy backstepping. Niniejszy



Rys. 1. Wahadło odwrócone z napędem inercyjnym – obiekt laboratoryjny

artykuł ukazuje zalety i wady nieliniowego sterowania typu backstepping. W roku 1990 metodę tę przedstawił Petar V. Kokotovic [3]. Jako testowany obiekt wybrano wahadło odwrócone z napędem inercyjnym (IWP – *Inertia Wheel Pendulum*). Zadaniem systemu sterującego jest stabilizowanie układu w pozycji pionowej. Wielkością sterującą jest prąd w uzwojeniu silnika prądu stałego przekładający się bezpośrednio na przyspieszenie wirującej masy umieszczonej w niezzerowej odległości od podłoża. Regulator dwupołożeniowy z histerezą zapewnia poprawne działanie układu nadążnego prądu. Układ ma dwa stopnie swobody: kąt odchylenia konstrukcji od pionu oraz kąt obrotu wału silnika. Stosunek liczby stopni swobody (dwa) do liczby wymu-

szeń (jedno) sprawia, iż układ ten jest z rodzaju underactuated. Do celów badawczych zbudowano taki układ pokazany na rysunku 1.

Celem artykułu było ukazanie zalet i wad sterowania backstepping. Dodatkowo porównano je z sterowaniem liniowo kwadratowym LQR (*Linear Quadratic Regulator*) i ukazano kilka aspektów stanowiących wyższość metody pozbawionej linearyzacji równań różniczkowych. Badania zostały zrealizowane w postaci symulacyjnej.

2. MODEL MATEMATYCZNY

Równania (1) i (2) stanowią różniczkowy model matematyczny IWP [1].

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\psi}_1 + \psi_2 \dot{\alpha} + \psi_3 \sin(\alpha), \quad (1)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{k_s i - b_\phi \dot{\phi}}{I_k}, \quad (2)$$

gdzie:

- α – kąt odchylenia konstrukcji od pionu,
- ϕ – kąt obrotu wału silnika,

k_s – stała silnika,

b_k – współczynnik tarcia na wale silnika,

i – prąd płynący przez uzwojenia silnika,

I_k – moment bezwładności koła zamachowego,

ψ_1, ψ_2 i ψ_3 – stałe współczynniki.

Współczynniki te przyjmują następującą postać:

$$\psi_1 = \frac{I_k}{I_k + I_r}, \quad (3)$$

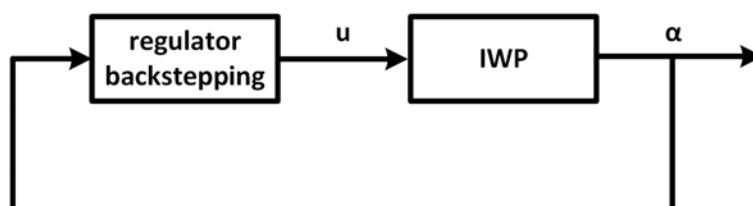
$$\psi_1 = \frac{I_k}{I_k + I_r}, \quad (4)$$

$$\psi_3 = \frac{gl_p m_c}{I_k + I_r}, \quad (5)$$

gdzie I_r jest momentem bezwładności całej konstrukcji, b_α określa współczynnik tarcia wahadła względem podłoża, g oznacza przyspieszenie ziemskie, l_p jest wysokością wahadła, zaś m_c określa masę wahadła. Wielkości te przyjmują następujące wartości: $I_r = 0,1036 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $b_\alpha = 0,001 [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2]$, $g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, $l_p = 0,14 [\text{m}]$, $m_c = 3,962 [\text{kg}]$, $I_k = 0,0094 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $k_s = 0,421 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right]$, $b_\phi = 0,001 [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}]$.

3. STEROWANIE BACKSTEPPING

Sterowanie backstepping zrealizowano zgodnie z schematem blokowym przedstawionym na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat blokowy układu sterowania opartego o regulację backstepping

Przyjęto następujące zmienne stanu:

$$x_1 = \alpha, \quad (6)$$

$$x_2 = \dot{\alpha}. \quad (7)$$

W trakcie wyznaczania sterowania backstepping wzięto po uwagę jedynie podsystem scharakteryzowany równaniem (1) i jako sterowanie potraktowano przyspieszenie kątowe koła zamachowego $\ddot{\phi}$:

$$u = \ddot{\phi}. \quad (8)$$

Pochodne zmiennych stanu wyglądają następująco:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = \psi_1 \ddot{\phi} + \psi_2 \dot{\alpha} + \psi_3 \sin(\alpha), \quad (10)$$

Dzięki temu możliwe było zapisanie równań różniczkowych podsystemu, korzystając ze zmiennych stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \psi_2 x_2 + \psi_3 \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} u. \quad (11)$$

Na początek należy rozważyć podsystem z_1 , gdzie można wyróżnić kilka etapów. Sterowanie backstepping można wyznaczyć, postępując zgodnie z poniższymi krokami.

1) Podstawienie z_1 i \dot{z}_1 :

$$z_1 = x_1, \quad (12)$$

$$\dot{z}_1 = x_2. \quad (13)$$

2) Konstruowanie funkcji Lapunowa:

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2, \quad (14)$$

a więc:

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1. \quad (15)$$

3) Wprowadzenie ρ_1 :

$$\rho_1(x_1) = -k_1 z_1, \quad (16)$$

$$k_1 > 0, \quad (17)$$

gdzie k_1 i k_2 są stałymi konfiguracyjnymi.

4) Przedstawienie z_2 :

$$z_2 = x_2 - \rho_1(x_1), \quad (18)$$

a więc:

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2. \quad (19)$$

5) Przedstawienie rozwiniętej funkcji Lapunowa:

$$\dot{V}(z_1) = z_1 \dot{z}_2 = z_1(-k_1 z_1 + z_2) = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2. \quad (20)$$

Jeśli $z_2 \rightarrow 0$, wtedy:

$$V_1(z_1) = -k_1 z_1^2 \leq 0. \quad (21)$$

Tym samym podsystem z_1 jest ustabilizowany. Teraz można zapisać równanie w postaci:

$$\dot{z}_2 = \psi_2 x_2 + \psi_3 \sin x_1 + \psi_1 u + k_1 x_2. \quad (22)$$

6) Konstruowanie funkcji Lapunowa:

$$V_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (23)$$

i jej pochodnej:

$$\dot{V}_1(z_1, z_2) = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2 (z_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 \sin x_1 + \psi_1 u + k_1 x_2). \quad (24)$$

7) Wyznaczenie prawa sterowania:

$$z_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 \sin x_1 + \psi_1 u + k_1 x_2 = -k_2 z_2, \quad (25)$$

$$\dot{V}_1(z_1, z_2) = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \leq 0, \quad (26)$$

dla $k_2 > 0$. Na podstawie równania (26) uzyskano sterowanie:

$$u = \frac{1}{\psi_1} (-z_1 - \psi_2 x_2 - \psi_3 \sin x_1 - k_1 x_2 - k_2 z_2). \quad (27)$$

Wyznaczone sterowanie zapewnia stabilność z_1 i z_2 z punktu widzenia Lapunowa, czyli sprawia, że: $z_1 \rightarrow 0$ i $z_2 \rightarrow 0$.

System (11) stabilizowany jest dzięki sterowaniu (27). Teraz należy wyeliminować zmienne pomocnicze z_1 i z_2 podstawiając odpowiednio:

$$z_1 = x_1 \quad (28)$$

oraz

$$z_2 = x_2 - \rho(x_1) = x_2 + k_1 x_1 \quad (30)$$

do równania (27), w wyniku czego uzyskano sterowanie:

$$u = \frac{1}{\psi_1} (-k_2(x_2 + k_1 x_1) - x_1 - \psi_2 x_2 - \psi_3 \sin x_1 - k_1 x_2). \quad (30)$$

Parametry k_1 i k_2 przyjęto na podstawie wzoru zaczerpniętego z [4]:

$$k_1 + k_2 = 100 \quad (31)$$

i przyjęto je następująco:

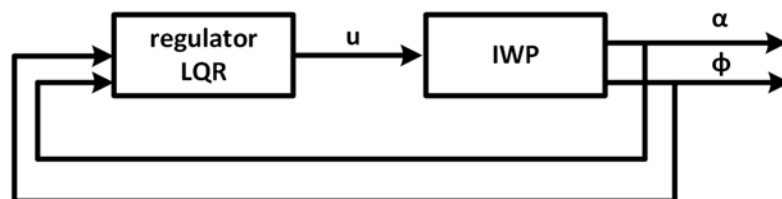
$$k_1 = 50, \quad (32)$$

$$k_2 = 50. \quad (33)$$

4. STEROWANIE LQR

Działanie algorytmu backstepping porównano z algorytmem LQR (*Linear Quadratic Regulator*) [2]. Metoda LQR była stworzona do stabilizowania układów liniowych, jednak dzięki linearyzacji w zadanym punkcie można ją stosować do układów nieliniowych. W przypadku rozważanego obiektu przybliżenie linearyzujące układ w położeniu pionowym jest dosyć korzystne, ponieważ dotyczy ono linearyzacji funkcji sinus dla argumentów zbliżonych do zera. Zakłada się, że wahadło głównie ma przebywać w pozycji pionowej lub maksymalne odchylenie od tej pozycji jest mniejsze od dwudziestu stopni.

Na rysunku 3 ukazano schemat blokowy regulacji LQR.



Rys. 3. Schemat blokowy układu sterowania opartego o regulację LQR

Jak widać, sprzężenie zwrotne zostało zrealizowane, korzystając z α , jak w przypadku przedstawionego sterowania backstepping, ale również z ϕ .

Prawo sterowania LQR wyraża się wzorem:

$$u_{LQR} = -Kx_{LQR}, \quad (34)$$

gdzie K jest wektorem wzmocnień, zaś x_{LQR} jest stanem układu. Celem sterowania jest minimalizacja funkcji kosztu:

$$J = \sum_{i=0}^n [x_{LQR}^T Q x_{LQR} + R u_{LQR}^2] \quad (35)$$

gdzie Q to macierz wag stanu, R to waga sygnału sterującego. Dla modelu zlinearyzowanego na potrzeby sterowania za stan przyjęto:

$$x_{LQR} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Chcąc otrzymać sterowanie optymalne należy wyznaczyć równanie Riccatiego:

$$P_{k-1} = Q + A_d^T (P_k - P_k B_d (R + B_d^T P_k B_d)^{-1} B_d^T P_k) A_d, \quad (37)$$

gdzie A_d i B_d są macierzami dyskretnego równania stanu. Zastosowano równanie iteracyjne i stąd numer iteracji k .

Wzór do obliczenia wektora wzmocnień wygląda następująco:

$$K = (R + B_d^T P_k B_d)^{-1} B_d^T P_k A_d. \quad (38)$$

Po obliczeniach wyniósł on wartość:

$$K = [43,04 \quad 6,20 \quad -0,13]. \quad (39)$$

Jako wagi przyjęto następujące wartości [2]:

$$R = 100, \quad (40)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

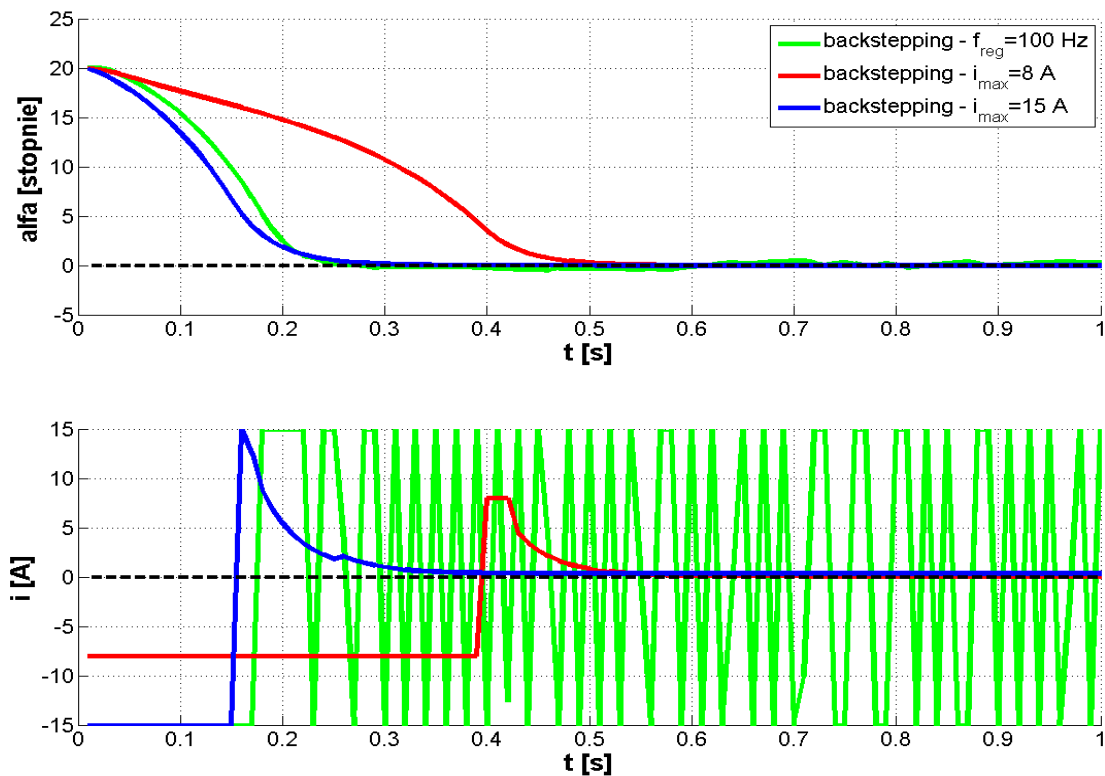
5. WYNIKI SYMULACYJNE

Przed wykonaniem eksperymentu symulacyjnego ustalono określony stan początkowy układu x_0 . Przyjął on następującą postać:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 20 [^\circ] \\ 0 \\ \begin{bmatrix} \circ \\ s \end{bmatrix} \\ 0 \\ \begin{bmatrix} \circ \\ s \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Jako wartość startową przyjęto odchylenie wahadła od pionu o dwadzieścia stopni, a wszystkie pozostałe zmienne stanu wyzerowano. W trakcie symulacji komputerowych do obliczeń równań różniczkowych zastosowano numeryczną metodę całkowania Eulera w przód. W niniejszym artykule głównym kryterium jakości regulacji przyjęto czas regulacji. Dodatkowo oceniano stabilność układu na podstawie wyników eksperymentu.

Na rysunku 4 przedstawiono rezultat symulacji zachowania się IWP ze sterowaniem backstepping.

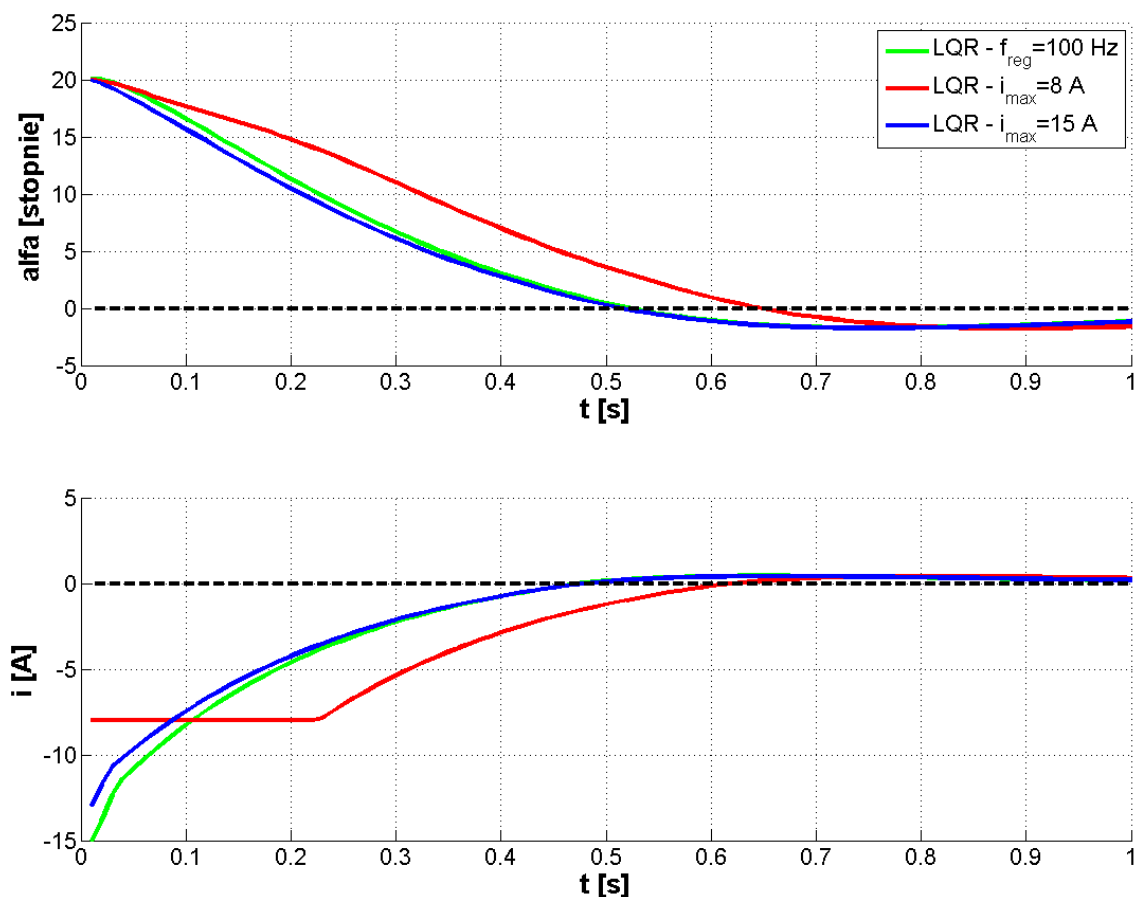


Rys. 4. Wykres zmian kąta α i prądu i w czasie dla sterowania typu backstepping dla różnych ograniczeń

Sprawdzono i porównano działanie metody dla różnych ograniczeń, a były to:

- ograniczenie sygnału sterującego do 15 A,
- ograniczenie sygnału sterującego do 8 A,
- ograniczenie częstotliwości aktualizacji sterowania do 100 Hz.

Nażono takie ograniczenia, ponieważ brano pod uwagę realną aplikację urządzenia. W rzeczywistych urządzeniach zawsze występują graniczne prądy w uzwojeniu silnika, a co za tym idzie, generowane momenty. To samo dotyczy częstotliwości zamykania pętli regulacji, która jest determinowana albo możliwościami obliczeniowymi jednostki komputerowej, albo maksymalną częstotliwością odczytu z IMU (Inertial Measurement Unit). Żadne z tych ograniczeń nie wprowadziło niestabilności. Przy zmniejszeniu ograniczenia prądu silnika czas regulacji uległ wydłużeniu. Nałożenie ograniczenia częstotliwości wywoływało powstanie małych, ledwo zauważalnych oscylacji w okolicach punktu równowagi. Jeśli chodzi o wielkość sterującą (prąd), można wyraźnie dostrzec pracę regulatora w nasyceniu w znaczących odcinkach czasowych. Jedynie dla zmniejszonej częstotliwości do 100 Hz skutkuje częstymi i gwałtownymi zmianami sygnału wyjściowego. W realnych aplikacjach jest to sytuacja niedopuszczalna, która mogłaby doprowadzić do zniszczenia jednostki wykonawczej.

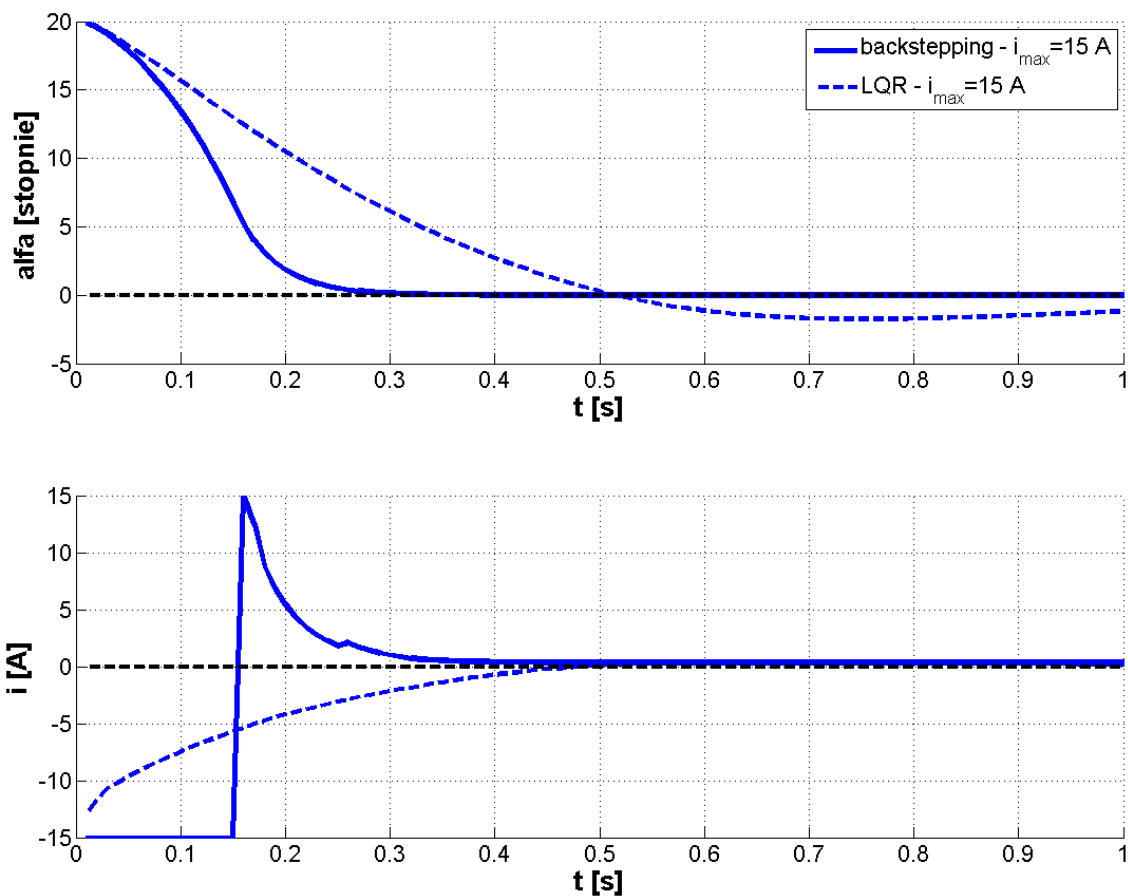


Rys. 5. Wykres zmian kąta α i prądu i w czasie dla sterowania typu LQR dla różnych ograniczeń

Na rysunku 5 przedstawiono analogiczny eksperyment do tego wcześniej opisanego z rysunku 4, lecz tym razem dotyczącego sterowania LQR.

Można stwierdzić, że ta metoda jest konkurencyjna do metody backstepping. Również żadne z nałożonych ograniczeń nie wprowadziło niestabilności. Widać też, że dla zmniejszonej częstotliwości aktualizacji sygnału sterującego nadal się on zmienia łagodnie, co przemawia za wyższością LQR nad backstepping w tym aspekcie.

Na rysunku 6 przedstawiono wyniki działania obu metod dla tego samego ograniczenia – ograniczenie sygnału sterującego do 15 A.



Rys. 6. Wykres zmian kąta α i prądu i w czasie dla sterowania typu backstepping i LQR – porównanie obu metod

Widać doskonale, iż backstepping gwarantuje krótszy czas regulacji. Dodatkowo widać, że metoda ta jest bardziej agresywna, pojawia się praca w nasyceniu, kiedy w przypadku LQR tego typu sytuacja nie wystąpiła. Z pewnością różnice jakości regulacji byłyby jeszcze wyraźniej widoczne, kiedy punkt pracy zostałby przesunięty dalej od punktu linearyzacji równań obiektu, sterując regulatorem LQR.

6. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono i porównano dwie metody sterowania wahadła odwróconego z napędem inercyjnym. Pierwsza z nich to sterowanie nieliniowe backstepping, a druga to sterowanie LQR. Wnioski oparto o wyniki symulacyjne.

Algorytm backstepping oparty o funkcję Lapunowa daje obiecujące możliwości implementacyjne. Po wykonaniu testów z nałożeniem różnych ograniczeń, metoda zapewnia stabilność IWP w nieskończonym horyzoncie czasowym. Zaletą backstepping nad LQR jest krótszy czas regulacji. Wadą zaś są niebezpiecznie gwałtowne zmiany sygnału sterującego dla małych częstotliwości zamykania pętli sprzężenia zwrotnego. Ta uwaga jest istotna przy projektowaniu rzeczywistych systemów sterowania.

Warto przeanalizować działanie algorytmu, kiedy ograniczenia zostałyby zaimplementowane jeszcze w fazie projektowania regulatora. Można by sprawdzić takie rozwiązanie, gdyż daje to szansę na poprawne działanie systemu.

LITERATURA

1. Drapikowski P., Gośliński J., Owczarkowski A.: Control and model parameters identification of inertia wheel pendulum. ICINCO 9th International Conference on Informatics in Control, Rome, 2012.
2. Gośliński J., Owczarkowski A.: Stabilizacja wahadła odwróconego z napędem inercyjnym przy pomocy regulatora LQR. Informatyka Automatyka Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska, 4a, 10/2012, s.7-10.
3. Kanellakopoulos I., Krstic M., Kokotović P.: Non-linear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sons, New York, 1995.
4. Lixia D., Shengxiang G.: The Design For The Controller of The Linear Inverted Pendulum Based On Backstepping. IEEE International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology, 2011.

Rękopis dostarczono dnia 27.05.2013 r.

NON-LINEAR BACKSTEPPING CONTROL FOR AN INERTIA WHEEL PENDULUM

Adam OWCZARKOWSKI
Paweł BACHMAN, Jarosław GOŚLIŃSKI
Piotr OWCZAREK, Roman REGULSKI

ABSTRACT *This article describes the non-linear backstepping control algorithm used to stabilize the inverted pendulum IWP (Inertia Wheel Pendulum). The analysed object is a construction mounted on two wheels*

with an electric motor accelerating the flywheel. This is the non-linear system with two degrees of freedom (the angle of inclination and rotation of the wheel) and one actuator (torque on the motor shaft). The vertical position is the unstable operating point. The Lyapunov stability theory allowed to formulate the control law analytically. The result is compared with the linear-quadratic control LQR (Linear Quadratic Regulator). The simulation tests showed differences of both algorithms and benefits of using backstepping.

Keywords: *nonlinear control, backstepping, LQR, IWP*



Mgr inż. Adam OWCZARKOWSKI – w 2011 roku ukończył studia o kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Od tego czasu jest studentem studiów doktorskich na tej samej uczelni. Jego praca głównie skupia się na teorii sterowania nieliniowego i implementacji jej w rzeczywistych układach robotycznych.

Dr inż. Paweł BACHMAN – adiunkt na Wydziale Mechanicznym Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zainteresowania: mechatronika i sterowanie napędami za pomocą interfejsów haptic.



Mgr inż. Jarosław GOŚLIŃSKI – w 2011 roku ukończył studia na kierunku Automatyka i Robotyka. Podjął pracę w korporacji, gdzie zajmował się wdrażaniem systemów pomiarowych, uzyskał certyfikat CLAD (Certified LabVIEW Associate Developer). Powrócił na Politechnikę Poznańską, gdzie zaczął studia doktoranckie. Zajmuje się estymacją stanu przy wykorzystaniu bezśladowych filtrów Kalmana. Pracuje nad robotami latającymi, modelowaniem dynamiki oraz identyfikacją parametrów modeli matematycznych.

Mgr inż. Piotr OWZAREK – doktorant i asystent na Wydziale Budowy Maszyn i Zarządzania w Zakładzie Urządzeń Mechatronicznych Politechniki Poznańskiej. W 2011 roku ukończył Automatykę i Robotykę na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Jego zainteresowania skupiają się wokół przetwarzania obrazów, sztucznej inteligencji, projektowania urządzeń elektronicznych i mechatronicznych oraz na robotach mobilnych, jak i sterownikach przemysłowych.



Mgr inż. Roman REGULSKI – doktorant w Zakładzie Urządzeń Mechatronicznych Wydziału Budowy Maszyn i Zarządzania Politechniki Poznańskiej. Zainteresowania naukowe: mechatronika, sterowniki mikroprocesorowe, automatyczne systemy rozpoznawania mowy, sterowanie głosowe.

