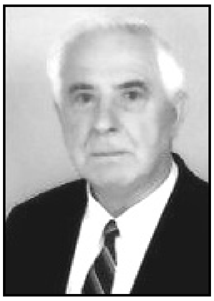
Tadeusz KACZOREK, Kamil BORAWSKI
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Realizacje dodatnie stabilne liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu z macierzą systemową symetryczną Metzlera

Prof. dr hab. inż. Tadeusz KACZOREK



Tytuł naukowy profesora zwyczajnego otrzymał w roku 1974. Jest członkiem rzeczywistym PAN i członkiem honorowym Węgierskiej Akademii Nauk. Otrzymał doktoraty honoris causa 10 polskich uczelni. Główne kierunki badań naukowych to analiza i synteza układów wielowymiarowych, układów dodatnich i układów niecałkowitego rzędu. Opublikował 24 książki, w tym 7 w języku angielskim oraz ponad 1000 prac naukowych. Wypromował ponad 70 doktorów.

e-mail: kaczorek@isep.pw.edu.pl

Inż. Kamil BORAWSKI

Urodził się w 1991 roku w Augustowie. Studiował na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej na kierunku Elektrotechnika (specjalność: Automatyka Przemysłowa i Technika Mikroprocesorowa). Dyplom inżyniera elektryka uzyskał w 2014 roku. W tym samym roku podjął studia magisterskie na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Główny obszar jego zainteresowań naukowych to analiza i synteza układów dodatnich oraz układów niecałkowitego rzędu.

e-mail: kbaug91@gmail.com

Streszczenie

Podano warunki dodatniości i stabilności liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu. Sformułowano problem realizacji dodatnich stabilnych liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu z macierzą systemową symetryczną Metzlera. Zaproponowano metodę sprowadzania macierzy stanu w postaci kanonicznej Frobeniusa do postaci symetrycznej stabilnej Metzlera. Metodę zobrazowano przykładem numerycznym.

Słowa kluczowe: liniowy układ ciągły niecałkowitego rzędu, realizacja dodatnia stabilna, macierz symetryczna, macierz Metzlera.

Positive stable realization problem for linear continuous-time fractional-order systems with symmetric system Metzler matrix

Abstract

A dynamical system is called a fractional-order system if its state equations are given by fractional-order derivative of the state vector. Using that theory, more precise mathematical models of systems can be obtained. A dynamical system is called positive if its all inputs, outputs, state variables and initial conditions are nonnegative. Variety of models having positive behavior can be found in engineering, biology, economics etc. Conditions for positivity and stability of linear continuous-time fractional-order systems are presented in the paper. A positive stable realization problem for linear continuous-time fractional-order systems with symmetric system Metzler matrix is formulated. The method for finding the realization is given. The problem is solved and conditions for the existence of the realization are established. The paper is organized as follows. In Section 2 the conditions for internal positivity and stability of linear continuous-time fractional-order systems are given. This section also contains the formulation of the positive stable realization problem for linear continuous-time fractional-order systems with symmetric system Metzler matrix. In Section 3 the procedure for computation of the realization is given. An example illustrating the method proposed is presented in Section 4. Section 5 contains the concluding remarks.

Keywords: linear continuous-time fractional-order system, positive stable realization, symmetric matrix, Metzler matrix.

1. Wstęp

W układach niecałkowitego rzędu równania stanu zapisane są przy wykorzystaniu pochodnej niecałkowitego rzędu wektora stanu. Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu był rozwijany głownie w XIX wieku, kiedy to Liouville i Riemann przedstawili pierwszą definicję różniczko-całki niecałkowitego rzędu. Teoria ta pozwala konstruować dokładniejsze modele matematyczne różnorodnych zjawisk. Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu znajduje również szerokie zastosowanie w automatyce i robotyce. Dotychczas ukazało się wiele prac z zakresu rachunku niecałkowitego rzędu i jego zastosowań, m.in. monografie [6, 14-16]. Zagadnienie stabilności tej klasy układów zostało poruszone w pracach [1-3]. Problem realizacji dodatnich i dodatnich stabilnych układów niecałkowitego rzędu rozpatrywany był np. w monografii [5], a także w pracach [8, 17-19]. Zagadnienia sterowalności układów niecałkowitego rzędu omówiono w [13].

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanu, odpowiedzi i warunki początkowe przyjmują tylko wartości nieujemne. Taka sytuacja ma swoje odzwierciedlenie w wielu dziedzinach życia, między innymi w technice, biologii, ekonomii itp. Przykładem mogą być wymienniki ciepła, procesy w reaktorach chemicznych, modele populacji. Teoria układów dodatnich opiera się na przestrzeniach stożków, a nie na przestrzeniach liniowych tak jak w przypadku układów standardowych, przez co jest trudniejsza. Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [4, 7]. Problem realizacji układów dodatnich i dodatnich stabilnych rozpatrywany był m.in. w monografii [5] oraz pracach [9-12].

Głównym celem tej pracy jest podanie metody wyznaczania realizacji dodatnich stabilnych liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu z macierzą systemową symetryczną Metzlera. Rozpatrzone zostaną przypadki szczególne dla $n=2$ i $n=3$ oraz przypadek ogólny dla dowolnego n, gdzie n jest wymiarem macierzy stanu. Dla układu rzędu drugiego zostanie zaprezentowany przykład numeryczny.

Praca ma następującą strukturę. W rozdziale 2 podane są definicje oraz warunki dodatniości i stabilności liniowego układu ciągłego niecałkowitego rzędu. Rozdział ten zawiera również sformułowanie problemu realizacji dodatnich stabilnych liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu z macierzą systemową symetryczną Metzlera. W rozdziale 3 podana jest metoda wyznaczania pożądanej realizacji. Rozdział 4 zawiera przykład numeryczny, natomiast uwagom końcowym poświęcony jest rozdział 5.

Wykorzystany zostanie następujący zapis: $\Re$ - zbiór liczb rzeczywistych, $\Re^{n\times m}$ - zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, $\Re_+^{n\times m}$ - zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ i elementach nieujemnych, M_n - zbiór macierzy Metzlera o wymiarach $n\times n$, I_n - macierz jednostkowa o wymiarach $n\times n$, $L[i+j\times c]$ - dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza, pomnożonego przez liczbę $c\neq 0$, $R[i+j\times c]$ - dodanie do i-tej kolumny j-tej kolumny, pomnożonej przez liczbę $c\neq 0$.

2. Podstawowe definicje oraz sformułowanie problemu realizacji

Rozpatrzymy liniowy układ ciągły niecałkowitego rzędu opisany równaniami

$$ {}_0D_t^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Bu(t)\,,\quad 0<\alpha\leq 1\,, \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)\,, \tag{1b}$$

gdzie $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^m$, $y(t) \in \Re^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{p\times n}$, $D \in \Re^{p\times m}$. ${}_0D_t^\alpha$ jest operatorem pochodno-całki niecałkowitego rzędu α na przedziale $[0,t]$.

Definicja 1. [5, 6] Układ (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim, jeżeli $x(t) \in \Re_+^n$, $y(t) \in \Re_+^p$, $t \ge 0$ dla każdego warunku początkowego $x(0) = x_0 \in \Re_+^n$ i każdego wymuszenia $u(t) \in \Re_+^m$, $t \ge 0$.

Twierdzenie 1. [5, 6] Układ (1) nazywamy dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A \in M_n\,,\; B \in \Re_+^{n\times m}\,,\; C \in \Re_+^{p\times n}\,,\; D \in \Re_+^{p\times m}\,. \tag{2}$$

Macierz transmitancji operatorowych układu (1) ma postać

$$T(s) = C\left[I_n s^\alpha - A\right]^{-1} B + D\,. \tag{3}$$

Macierz transmitancji operatorowych nazywamy właściwą, jeżeli

$$\lim_{s\to\infty} T(s) = K \in \Re^{p\times m} \tag{4}$$

oraz ściśle właściwą, jeżeli $K = 0$.

Definicja 2. [5, 6] Macierze (2) nazywamy dodatnią realizacją macierzy transmitancji $T(s)$, jeżeli spełniają równanie (3).
Realizację nazywamy (asymptotycznie) stabilną, jeżeli macierz A jest (asymptotycznie) stabilną macierzą Metzlera.

Twierdzenie 2. [5, 6] Dodatnia realizacja (2) jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki wielomianu

$$p_A(s) = \det\left[I_n s^\alpha - A\right] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{5}$$

są dodatnie, tj. $a_i > 0$ dla $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Zadanie wyznaczenia realizacji możemy sformułować następująco: znając wielomian charakterystyczny (5) i zakładając, że posiada on rzeczywiste i stabilne bieguny s_1, s_2,…, s_n, znajdujemy macierz $\overline{A}$ w postaci kanonicznej Frobeniusa

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

a następnie wyznaczamy macierz przekształcenia przez podobieństwo P tak, że

$$A = A^T = P^{-1}\overline{A}P\,. \tag{7}$$

3. Rozwiązanie problemu realizacji

W pierwszej kolejności rozpatrzmy układ o transmitancji operatorowej

$$T(s) = \frac{b_2(s^\alpha)^2 + b_1 s^\alpha + b_0}{(s^\alpha)^2 + a_1 s + a_0}\,. \tag{8}$$

Macierz D możemy wyznaczyć ze wzoru

$$D = \lim_{s\to\infty} T(s) = b_2\,. \tag{9}$$

Transmitancja ściśle właściwa ma postać

$$T_{sp}(s) = \frac{\overline{b}_1 s^\alpha + \overline{b}_0}{(s^\alpha)^2 + a_1 s + a_0}\,, \tag{10}$$

gdzie: $\overline{b}_i = b_i - a_i b_2$, $i = 0,1$.

Zakładamy, że transmitancja (8) spełnia warunek

$$a_1^2 - 4a_0 \ge 0 \tag{11}$$

oraz ma dwa ujemne bieguny

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}\,. \tag{12}$$

Realizacja transmitancji (10) ma postać

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix},\quad \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{b}_0 \\ \overline{b}_1 \end{bmatrix},\quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D = b_2\,. \tag{13}$$

Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach, przekształcamy macierz $\overline{A}$ do postaci symetrycznej Metzlera

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[2+1\times(c)]} \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & c-a_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2\times(-c)]} \begin{bmatrix} -c & -c^2 + ca_1 - a_0 \\ 1 & c - a_1 \end{bmatrix} = A\,, \tag{14}$$

przy czym dobieramy c tak, aby $A = A^T$, tzn. musi być spełniony warunek

$$-c^2 + ca_1 - a_0 = 1\,. \tag{15}$$

Stosując powyższe działania na macierzy jednostkowej, znajdujemy macierze P i P^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2\times(-c)]} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}\,, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[2+1\times(c)]} \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P\,. \tag{17}$$

Rozwiązanie równania (15) ma postać

$$c = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 - 4}}{2}\,. \tag{18}$$

Aby $c \in \Re$, musi być spełniony warunek

$$-4 - 4a_0 + a_1^2 \ge 0\,. \tag{19}$$

Pożądana dodatnia stabilna realizacja z macierzą systemową symetryczną Metzlera ma postać

$$A = P^{-1}\overline{A}P = \begin{bmatrix} -c & 1 \\ 1 & c - a_1 \end{bmatrix},\quad B = P^{-1}\overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{b}_0 - c\overline{b}_1 \\ \overline{b}_1 \end{bmatrix},$$

$$C = \overline{C}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D = b_2\,. \tag{20}$$

Twierdzenie 3. Dla układu drugiego rzędu ($n = 2$) istnieje dodatnia stabilna realizacja z macierzą systemową symetryczną Metzlera, jeżeli spełnione są następujące warunki:
1) (11), (15) i (19),
2) $\overline{b}_0 - c\overline{b}_1 \geq 0$ oraz $\overline{b}_1 \geq 0$,
3) $T(\infty) = b_2 \in \Re_+$.

Rozpatrzmy kolejno układ o transmitancji operatorowej

$$T(s) = \frac{b_3(s^\alpha)^3 + b_2(s^\alpha)^2 + b_1 s^\alpha + b_0}{(s^\alpha)^3 + a_2(s^\alpha)^2 + a_1 s^\alpha + a_0} . \tag{21}$$

Macierz D możemy wyznaczyć ze wzoru

$$D = \lim_{s\to\infty} T(s) = b_3 . \tag{22}$$

Transmitancja ściśle właściwa ma postać

$$T_{sp}(s) = \frac{\overline{b}_2(s^\alpha)^2 + \overline{b}_1 s^\alpha + \overline{b}_0}{(s^\alpha)^3 + a_2(s^\alpha)^2 + a_1 s^\alpha + a_0} . \tag{23}$$

gdzie: $\overline{b}_i = b_i - a_i b_3$, $i = 0,1,2$.

Realizacja transmitancji (23) ma postać

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = b_3 . \tag{24}$$

Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach, przekształcamy macierz $\overline{A}$ do postaci symetrycznej Metzlera

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[2+1\times(c_1)]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & c_1 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2\times(-c_1)]}$$

$$\begin{bmatrix} -c_1 & -c_1^2 & c_1 a_1 - a_0 \\ 1 & c_1 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[3+1\times(-c_2)]} \begin{bmatrix} -c_1 & -c_1^2 & c_1 c_2 + c_1 a_1 - a_0 \\ 1 & c_1 & -c_2 - a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+3\times(c_2)]}$$

$$\begin{bmatrix} -c_1 & -c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 - c_2 a_2 + c_1 a_1 - a_0 \\ 1 & c_1 & -c_2 - a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} = A . \tag{25}$$

przy czym, aby $A = A^T$ musi być spełniony układ równań

$$-c_1^2 + c_2 = 1 , \tag{26a}$$

$$c_1 c_2 - c_2 a_2 + c_1 a_1 - a_0 = 0 . \tag{26b}$$

Warto zauważyć, że wraz ze wzrostem wymiaru macierzy A rośnie liczba równań oraz liczba współczynników c_1 , c_2 ,…, c_{n-1} niezbędnych do ich rozwiązania.

Rozwiązując układ równań (26), możemy obliczyć współczynnik c_1 , który dany jest wzorem

$$c_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{a_1 a_2}{6} + \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a_2^2}{9} + \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}\right)^3} - \frac{a_1 a_2}{6} + \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{3}} +$$
$$\sqrt[3]{-\sqrt{\left(-\frac{a_1 a_2}{6} + \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a_2^2}{9} + \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}\right)^3} - \frac{a_1 a_2}{6} + \frac{a_2^3}{27} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{3}} + \frac{a_2}{3} . \tag{27}$$

Współczynnik c_2 możemy obliczyć, podstawiając c_1 do równania (26a). Ostatecznie otrzymamy macierz

$$A = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 \\ 1 & c_1 & -c_2 - a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} . \tag{28}$$

Doprowadzając podmacierz

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 - a_1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix} . \tag{29}$$

do postaci symetrycznej, zgodnie z (14), otrzymamy symetryczną macierz Metzlera o wymiarach 3×3 .

Twierdzenie 4. Dla układu trzeciego rzędu ($n = 3$) istnieje dodatnia stabilna realizacja z macierzą systemową symetryczną Metzlera, jeżeli spełnione są następujące warunki:
1) istnieją rzeczywiste c_1 i c_2 dla danych a_0 , a_1 , a_2 oraz macierz (29) dla wyznaczonych c_1 i c_2 jest sprowadzalna do postaci symetrycznej,
2) $B = P^{-1}\overline{B} \in \Re_+^{n\times m}$,
3) $T(\infty) = b_3 \in \Re_+$.

Przedstawimy teraz rozważania dla dowolnego n .

Twierdzenie 5. Jeżeli $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ są dodatnią stabilną realizacją macierzy transmitancji $T(s)$, to możemy znaleźć macierz $P \in \Re_+^{n\times n}$ taką, że $P^T = P^{-1}$ (jest macierzą ortogonalną) i stosując przekształcenie przez kongruencję, sprowadzić macierz stanu do postaci symetrycznej Metzlera, otrzymując realizację w postaci

$$A = P^T \overline{A} P , \; B = P^T \overline{B} , \; C = \overline{C} P , \; D = \overline{D} . \tag{30}$$

Dowód. Przekształcenie przez kongruencję nie zmienia dodatniej określoności macierzy ani jej wielomianu charakterystycznego. Jeżeli $\overline{A} \in M_n$ to także $A \in M_n$ oraz $B \in \Re_+^{n\times m}$, $C \in \Re_+^{p\times n}$, $D \in \Re_+^{p\times m}$ wtedy, gdy $\overline{B} \in \Re_+^{n\times m}$, $\overline{C} \in \Re_+^{p\times n}$, $\overline{D} \in \Re_+^{p\times m}$. Ponadto, jeżeli $P^T = P^{-1}$, to

$$\left(P^T A P\right)^T = P^T A P , \tag{31a}$$

$$\left(P^{-1} A P\right)^T = P^T A \left(P^{-1}\right)^T = P^{-1} A P . \tag{31b}$$

Twierdzenie 6. Jeżeli macierz $T(s)$ ma pierwiastki rzeczywiste ujemne oraz zera macierzy $T_{sp}(s)$ leżą pomiędzy jej biegunami [5], to istnieje realizacja taka, że A jest macierzą diagonalną Metzlera oraz $B \in \Re_+^{n\times m}$, $C \in \Re_+^{p\times n}$, $D \in \Re_+^{p\times m}$.

Dowód. Dowód wynika wprost z metody Gilberta wyznaczania realizacji dodatniej stabilnej [5].

4. Przykład numeryczny

Wyznaczyć dodatnią stabilną realizację z macierzą systemową symetryczną Metzlera układu o transmitancji operatorowej

$$T(s) = \frac{2(s^\alpha)^2 + 10 s^\alpha + 10}{(s^\alpha)^2 + 4 s^\alpha + 3} . \tag{32}$$

Bieguny układu $s_1 = -1$, $s_2 = -3$, zatem jest on asymptotycznie stabilny. Obliczamy macierz D oraz transmitancję ściśle właściwą $T_{sp}(s)$:

$$D = \lim_{s\to\infty} T(s) = 2\,, \tag{33}$$

$$T_{sp}(s) = \frac{2s^{\alpha}+4}{(s^{\alpha})^2 + 4s^{\alpha} + 3}\,. \tag{34}$$

Realizacja transmitancji (34) ma postać

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ \overline{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},\ \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 2\,. \tag{35}$$

Korzystając ze wzoru (18), wyznaczamy c:

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3 - 4}}{2} = 2\,. \tag{36}$$

Następnie przekształcamy macierz $\overline{A}$ do postaci symetrycznej Metzlera, zgodnie z (14):

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[2+1\times(2)]} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2\times(-2)]} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A\,. \tag{37}$$

Stosując powyższe działania na macierzy jednostkowej, znajdujemy macierze P i P^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L[1+2\times(-2)]} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}\,. \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R[2+1\times(2)]} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P\,. \tag{39}$$

Pożądana dodatnia stabilna realizacja z macierzą systemową symetryczną Metzlera transmitancji (34) ma postać

$$A = P^{-1}\overline{A}P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = P^{-1}\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \overline{C}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 2\,. \tag{40}$$

5. Podsumowanie

Przedstawiono metodę wyznaczania realizacji dodatnich stabilnych liniowych układów ciągłych niecałkowitego rzędu z macierzą systemową symetryczną Metzlera. Rozpatrzono przypadki szczególne dla $n = 2$ i $n = 3$, podano również warunki wystarczające istnienia pożądanej realizacji. Metodę zobrazowano przykładem numerycznym.

W ogólnym przypadku otrzymujemy układ $n-1$ równań nieliniowych o poszukiwanych współczynnikach c_1, $c_2,\ldots,$ c_{n-1}. Złożoność obliczeniowa powyższej metody rośnie wraz ze wzrostem wymiaru macierzy A, co sprawia trudności już dla $n = 3$.

Warto zauważyć, że pierwsze $n-2$ równania wiążą ze sobą jedynie współczynniki c_1, $c_2,\ldots,$ c_{n-1}, natomiast tylko ostatnie równanie ($n-1$) wiąże powyższe współczynniki ze współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy stanu. Można zatem sprowadzić problem przekształcenia pierwszego wiersza i pierwszej kolumny do jednego równania, wyznaczając rekurencyjnie współczynniki c_1, $c_2,\ldots,$ c_{n-1} i podstawiając je do ostatniego równania. Istotnym problemem pozostaje jednak ocena wpływu tych współczynników na podmacierze uzyskiwane poprzez wykreślanie kolejnych wierszy i kolumn.

Wyznaczenia pożądanej realizacji możemy dokonać, wykorzystując przekształcenie przez kongruencję (30) lub metodę Gilberta przy założeniu, że macierz transmitancji operatorowych ma pierwiastki rzeczywiste ujemne oraz zera macierzy transmitancji ściśle właściwych leżą pomiędzy jej biegunami [5].

Przedstawione rozważania można przenieść na układy o wielu wejściach i wielu wyjściach.

6. Literatura

[1] Busłowicz M.: Stability of state-space models of linear continuous-time fractional order systems. Acta Mechanica et Automatica, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 15-12.

[2] Busłowicz M., Kaczorek. T.: Simple conditions for practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2009, vol. 19, no. 2, pp. 263-269.

[3] Busłowicz M.: Simple analytic conditions for stability of fractional discrete-time linear systems with diagonal state matrix. Bull. Pol. Acad. of Sci., Techn. Sci., 2012, vol. 60, no. 4, pp. 809-814.

[4] Farina L., Rinaldi S.: Positive Linear Systems, Theory and Applications. J. Wiley, New York 2000.

[5] Kaczorek T., Sajewski Ł.: Realization Problem for Positive and Fractional Systems. Printing House of Bialystok University of Technology, Białystok 2013.

[6] Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.

[7] Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London 2002.

[8] Kaczorek T.: Positive stable realizations of fractional continuous-time linear systems. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2011, vol. 21, no. 4, pp. 697-702.

[9] Kaczorek T.: Positive stable realizations with system Metzler matrices. Archives of Control Sciences, 2011, vol. 21, no. 2, pp. 167-188.

[10] Kaczorek T.: Computation of positive stable realizations for linear continuous-time systems. Proc. 20th European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD), 2011, pp. 517-520.

[11] Kaczorek T.: Determination of positive stable realizations for discrete-time linear systems. Pomiary Automatyka Robotyka, 2/2012, 317-322.

[12] Kaczorek T.: Positive stable realizations of discrete-time linear systems. Bull. Pol. Acad. of Sci., Techn. Sci., 2012, vol. 60, no. 3, pp. 605-616.

[13] Klamka J.: Controllability of dynamical systems. A survey. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol. 61, no. 2, 2013, pp. 221-229.

[14] Oldham K. B., Spanier J.: The Fractional Calculus. Academic Press, New York and London 1974.

[15] Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.

[16] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.

[17] Sajewski Ł.: Positive realization of linear discrete-time fractional-order systems based on impulse response. Measurements Automation and Monitoring, 2010, vol. 56, no. 5, pp. 404-408.

[18] Sajewski Ł.: Positive realization of fractional continuous-time linear systems with delays. Measurements Automation and Monitoring, 2012, vol. 58, no. 5, pp. 413-417.

[19] Sajewski Ł.: Positive realization of fractional discrete-time linear systems with delays. Measurements Automation and Monitoring, 2012, vol. 16, no. 2, pp. 323-327.

otrzymano / received: 15.07.2014

przyjęto do druku / accepted: 02.09.2014 *artykuł recenzowany / revised paper*