

Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami

Zygmunt Lech Warszawa

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elekoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: W pracy podano zależności wektorowe umożliwiające estymację bezwzględnych i względnych niepewności pomiarowych składowych multimenzurandu mierzonych pośrednio, tj. wyznaczanych z zależności z wielkościami mierzonymi bezpośrednio i z ich niepewności. Wyznaczone zostaną macierze kowariancji dla trzech przykładów pomiarów pośrednich: przyrostu i temperatury średniej, trzech rodzajów mocy prądu elektrycznego oraz trzech składowych i modułu pola magnetycznego w dwu jego punktach. Określono niepewności złożone dla parametrów wyznaczanych z tych pomiarów, czyli mierzonych pośrednio.

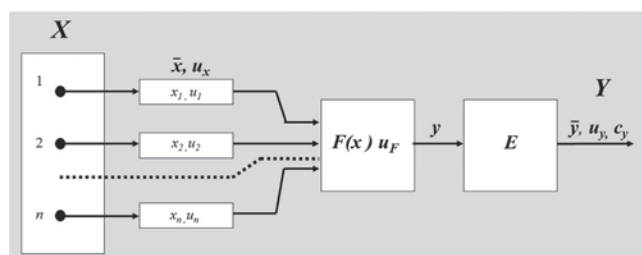
Słowa kluczowe: pomiary pośrednie, multimenzurand, macierz kowariancji, niepewność pomiaru

1. Wprowadzenie

Dla wielu wielkości fizycznych i parametrów charakteryzujących obiekt badany nie istnieją techniczne możliwości pomiarów bezpośrednich pomiarów. Wówczas należy stosować metody pośrednich, tj. mierzyć bezpośrednio inne wielkości, nazywane tu wejściowymi, od których zależą wielkości badane i oszacować ich niepewności. Następnie na podstawie znanych zależności wyznacza się wartości badanych wielkości badanych pośrednio, nazywanych tu wyjściowymi (ang. *observables*) i ich niepewności. Schemat takiego systemu pomiarowego przedstawiono na rysunku 1.

Schemat ten dotyczy ogólnego przypadku pośrednich badań multimenzurandu $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ o m wielkościach wyjściowych jako składowych, na podstawie multimenzurandu $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ o n wielkościach wejściowych mierzonych bezpośrednio jako składowych. Pomiary takie opisuje funkcjonal $F(\mathbf{X})$. Może on być zarówno liniowy jak i nieliniowy, w ogólności obciążony niepewnościami przetwarzania sygnałów w postaci wektora \mathbf{u}_F . Błędy losowe i niepewności pomiarowe \mathbf{u}_x sygnałów

\mathbf{x} o wielkościach wejściowych \mathbf{X} mogą być, lub też nie, ze sobą skojarzone statystycznie, czyli skorelowane. Człon \mathbf{E} wyraża przetwarzanie sygnałów wielkości wyjściowych \mathbf{y} i niepewności \mathbf{u}_x i \mathbf{u}_F i ich macierzy kowariancji w celu wyznaczenia wartości składowych menzurandu wyjściowego \mathbf{Y} , np. ich wartości średnich $\bar{\mathbf{y}}$ oraz niepewności \mathbf{u}_y wraz z macierzą kowariancji \mathbf{c}_y , gdyż zwykle są one skorelowane.



Rys. 1. Przetwarzanie sygnałów w wieloparametrowych pomiarach pośrednich $\mathbf{Y} = F(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$
 Fig. 1. Signal processing in indirect multi-parametrical measurements
 $\mathbf{Y} = F(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$

Wybór metody estymacji parametrów składowych menzurandu \mathbf{Y} zależy od tego, czy wyniki pomiarów pośrednich tych składowych będą używane osobno dla każdej z nich, czy też wspólnie, czyli jak dla wielkości skojarzonych. W pierwszym z przypadków korelacja między niepewnościami składowych menzurandu \mathbf{Y} nie ma znaczenia. Wówczas do opisu

Autor korespondujący:

Zygmunt L. Warszawa, zlw@op.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 28.03.2018 r., przyjęty do druku 22.06.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

propagacji błędów i niepewności pomiarowych dla każdej z składowych wystarczy stosować prostszą metodę opartą na różniczkę zupełnej. Natomiast w przypadku dalszego łącznego wykorzystywania wszystkich, lub kilku z wielkości wyjściowych, obok wartości składowych wektora \mathbf{Y} opisującego multimenzurand wyjściowy, trzeba uwzględnić także nie tylko same niepewności \mathbf{u}_y , ale i korelację między nimi, czyli operować macierzą kowariancji \mathbf{c}_Y . Ujmuje to macierzowa metoda wyznaczania niepewności pomiarowych.

Do stosowania w praktyce zalecane jest międzynarodowo ujednolicone szacowanie wyników pomiaru i jego dokładności, które zawiera Przewodnik Wyznaczania Niepewności Pomiarów GUM i jego Suplementy. Operuje się w nich wartościami średnimi wielkości mierzonej, czyli menzurandu i ich bezwzględny niepewnościami pomiarowymi. Macierzowa metoda wyznaczania estymatorów niepewności wyników pośrednich pomiarów składowych multimenzurandu opisana jest w Suplemencie 2 do przewodnika GUM [1], który opublikowano w 2011 r. Mimo że metoda ta była znana wcześniej [2], to nie jest jeszcze szerzej stosowana w praktyce metrologicznej i to nie tylko w Polsce. W praktyce mierzy się parametry wielu obiektów wieloparametrowych, dla których należy stosować ten opis jako najbardziej właściwy.

W większości przypadków pośrednie pomiary m składowych multimenzurandu można już zrealizować automatycznie za pomocą odpowiedniego sprzętu i oprogramowania. Jeśli jednak nie jest to możliwe, to bezpośrednio mierzy się zbiór \mathbf{X} indywidualnych wielkości x_i i z niego oblicza się zarówno wektor estymatorów n wartości poszczególnych składowych \mathbf{Y} , jak i elementy macierzy kowariancji \mathbf{c}_Y dla oceny ich niepewności \mathbf{u}_y .

Zalecenia Suplementu 2 nie obejmują takich przypadków, gdy operacje dalszego przetwarzania sygnałów wielkości bezpośrednio mierzonych na wejściu systemu pomiarowego są przybliżone lub obciążone niepewnościami. W instrumentalnych realizacjach operacji opisanych funkcjonalnym \mathbf{F} , mogą być one obciążone niepewnościami \mathbf{u}_F ze względu na stosowanie różnych przetworników pomiarowych, sumatorów i mnożników sygnałów, przetworników AC i innych członów funkcjonalnych niezbędnych w danych pomiarach. Przy najdokładniejszych pomiarach, nawet przy przetwarzaniu cyfrowym istotne stają się też zaokrąglanie wyników, w tym wyniki z precyzji układów cyfrowych [3–6].

Właściwości metrologiczne przyrządów i systemów pomiarowych opisuje się dla całego zakresu pomiarów. Wartości bezwzględne błędów granicznych i niepewności przyrządów i przetworników pomiarowych przedstawia się w postaci dwuskładnikowej: jako wartość stałą oraz zmienną, zwykle w uproszczeniu jako przedział o granicach proporcjonalnych do wielkości mierzonej [7]. Proces wykonywania badań eksperymentalnych i instrumentalne systemy pomiarowe projektuje się jednak tak, aby użyte przyrządy i przetworniki nie pracowały na początku zakresu. Wówczas można w wielu przypadkach, szczególnie przy stosowaniu przyrządów cyfrowych, założyć, że składnik stały jest pomijalny, a względny błąd graniczny i niepewność względna są niezależne od wartości wielkości mierzonej. Do opisu dokładności przyrządów

względne wartości tych miar dokładności są bardziej przydatne, jako uniwersalne dla wielu wartości wielkości mierzonej. Dotyczy to też opisu dokładności każdego pomiarów wieloparametrowych (nD), dla których można stosować opis wektorowy z Suplementu 2 do GUM [1].

Pomiary wielu wielkości skojarzonych (pomiary wieloparametrowe nD) opisuje się ogólnie jako

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{X} i \mathbf{Y} – wektory n wielkości mierzonych bezpośrednio i m wielkości monitorowanych pośrednio na podstawie tych pomiarów, czyli wartości obserwowanych, \mathbf{F} – wielowymiarowy funkcjonal lub funkcja pomiaru.

Jeśli opisane funkcją \mathbf{F} zależności przetwarzania sygnałów są liniowe, to liczba wyznaczanych pośrednio wielkości wyjściowych $m \leq n$. Przy występowaniu zależności nieliniowych liczba m jest taka, jak łączna liczba równań, która może być większa niż n . Przy wyznaczaniu propagacji błędów i niepewności pomiarowych można założyć występowanie małych przyrostów i wówczas zależności nieliniowe linearyzuje się wokół punktów pracy. W pracy tej będą omawiane przypadki, gdy przy przetwarzaniu danych według funkcji \mathbf{F} błędy $\delta_F = \mathbf{0}$, a więc i jej niepewności $\mathbf{u}_F = \mathbf{0}$ są pomijalne. Uwzględnienie niepewności funkcjonału \mathbf{F} omawiają autorzy w publikacji [7].

2. Błędy pomiarów pośrednich multimenzurandu

Wyznamy zależności błędów dla $m = 3$ wielkości wyjściowych opisanych wektorem $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3]^T$, które otrzymano z bezpośrednich pomiarów $n = 3$ wielkości wejściowych opisanych wektorem $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$. Bieżące błędy bezwzględne wielkości wyjściowych i ich współczynniki wrażliwości można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \quad \text{czyli } \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{S} \cdot \Delta \mathbf{X}$$

oraz

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2a, b)$$

gdzie: \mathbf{S} – macierz współczynników wrażliwości dla błędów bezwzględnych.

W postaci rozwiniętej otrzymuje się zapis macierzowy:

$$\Delta \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \Delta x_3 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \Delta x_3 \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \Delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{y_1 x_1} & W_{y_1 x_2} & W_{y_1 x_3} \\ W_{y_2 x_1} & W_{y_2 x_2} & W_{y_2 x_3} \\ W_{y_3 x_1} & W_{y_3 x_2} & W_{y_3 x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Macierz \mathbf{A}_Y można też zapisać z uwzględnieniem błędów względnych $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}$ wielkości wejściowych

$$\mathbf{A}_Y = \mathbf{S} \cdot [\mathbf{A}_{x_1}, \mathbf{A}_{x_2}, \mathbf{A}_{x_3}]^T = \mathbf{S} \cdot [x_1 \delta_{x_1}, x_2 \delta_{x_2}, x_3 \delta_{x_3}]^T \quad (4)$$

Dla błędów względnych wielkości wyjściowych otrzymuje się zależność macierzową:

$$\begin{bmatrix} \delta_{y_1} \\ \delta_{y_2} \\ \delta_{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \delta_{x_1} + \frac{x_2}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \frac{x_3}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \delta_{x_3} \\ \frac{x_1}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \delta_{x_1} + \frac{x_2}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \frac{x_3}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \delta_{x_3} \\ \frac{x_1}{y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \delta_{x_1} + \frac{x_2}{y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \frac{x_3}{y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \delta_{x_3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} W_{y_1 x_1} & W_{y_1 x_2} & W_{y_1 x_3} \\ W_{y_2 x_1} & W_{y_2 x_2} & W_{y_2 x_3} \\ W_{y_3 x_1} & W_{y_3 x_2} & W_{y_3 x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{x_3} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{S}_\delta \cdot \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{x_3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wprowadzona w (5) macierz \mathbf{S}_δ zawiera współczynniki wrażliwości dla błędów względnych. Przy oznaczeniach $\delta_X \equiv [\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}]^T$ i $\delta_Y \equiv [\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \delta_{y_3}]^T$ wzór (5) przyjmuje zwartą postać macierzową

$$\delta_Y = \mathbf{S}_\delta \cdot \delta_X \quad (6)$$

Dla najgorszego przypadku (ang. *worst case*) błędów granicznych $|\delta_X| \equiv [|\delta_{x_1}|, |\delta_{x_2}|, |\delta_{x_3}|]^T$ i $|\delta_Y| \equiv [|\delta_{y_1}|, |\delta_{y_2}|, |\delta_{y_3}|]^T$ otrzymuje się zależność (7), w której symbol $|\mathbf{S}_\delta|$ oznacza macierz wartości bezwzględnych elementów macierzy \mathbf{S}_δ :

$$|\delta_Y| = |\mathbf{S}_\delta| \cdot |\delta_X| \quad (7)$$

W przypadku szczególnym, gdy zbiory błędów losowych δ_X wielkości mierzonych bezpośrednio, lub odchylenia obserwacji w próbkach wielkości wejściowych nie są ze sobą skorelowane, czyli są niezależne statystycznie, to z prawa propagacji wariancji wynikają proste zależności dla standardowych niepewności względnych wielkości wyjściowych

$$u_Y^2 = \mathbf{S}_\delta^2 \cdot u_X^2 \quad (8)$$

gdzie u_Y^2 , u_X^2 są wektorami kwadratów niepewności względnych u_Y , u_X odpowiednio na wyjściu i wejściu układu pomiarowego, a wyrazy macierzy \mathbf{S}_δ^2 są kwadratami wyrazów macierzy \mathbf{S}_δ . Niepewności wyjściowe u_Y są już zwykle ze sobą skorelowane. Trzeba to uwzględnić przy wspólnym stosowaniu wyznaczonych pośrednio z pomiarów wartości \bar{y} i niepewności u_Y wielkości wyjściowych.

3. Pomiar wielkości skorelowanych

Dokument JCGM 102:2011 Międzynarodowego Biura Miar i Wag BIPM o nazwie *Supplement 2 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities* [1] omawia wyznaczanie niepewności pomiarów wieloparametrowych. Wartości bezwzględnych niepewności standardowych dla wielkości wejściowych \mathbf{X} i wyjściowych \mathbf{Y} są w nim opisywane przez macierze kowariancji, oznaczone odpowiednio jako \mathbf{c}_X i \mathbf{c}_Y oraz przez macierz współczynników wrażliwości \mathbf{S} jako zlinearyzowany funkcjonal przetwarzania \mathbf{F} . Macierze te powiązane są równaniem:

$$\mathbf{c}_Y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{c}_X \cdot \mathbf{S}^T \quad (9)$$

Podobną zależność można też podać dla macierzy kowariancji $\mathbf{c}_{\delta Y}$, $\mathbf{c}_{\delta X}$ niepewności względnych $\bar{\delta}_{y_i}$, $\bar{\delta}_{x_j}$

$$\mathbf{c}_{\delta Y} = \mathbf{S}_\delta \cdot \mathbf{c}_{\delta X} \cdot \mathbf{S}_\delta^T \quad (10)$$

Po zastosowaniu dla macierzy $\mathbf{S} = [W_{y_i x_j}]$ oraz $\mathbf{S}_\delta = \left[\frac{x_j}{y_j} W_{y_i x_j} \right] \equiv [w_{y_i x_j}]$ oznaczeń ich elementów odpowiednimi indeksami $i = 1, 2, 3$ dla wierszy oraz $j = 1, 2, 3$ dla kolumn, otrzymuje się wzory

$$\mathbf{c}_Y = \begin{bmatrix} W_{y_1 x_1} & W_{y_1 x_2} & W_{y_1 x_3} \\ W_{y_2 x_1} & W_{y_2 x_2} & W_{y_2 x_3} \\ W_{y_3 x_1} & W_{y_3 x_2} & W_{y_3 x_3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_X \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{c}_{\delta Y} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} W_{y_1 x_1} & \frac{x_2}{y_1} W_{y_1 x_2} & \frac{x_3}{y_1} W_{y_1 x_3} \\ \frac{x_1}{y_2} W_{y_2 x_1} & \frac{x_2}{y_2} W_{y_2 x_2} & \frac{x_3}{y_2} W_{y_2 x_3} \\ \frac{x_1}{y_3} W_{y_3 x_1} & \frac{x_2}{y_3} W_{y_3 x_2} & \frac{x_3}{y_3} W_{y_3 x_3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{\delta X} \mathbf{S}_\delta^T \quad (11a, b)$$

Ze wzorów (11a, b) otrzymuje się macierze kowariancji \mathbf{c}_Y , $\mathbf{c}_{\mathbf{d}Y}$ z podobnymi postaciami wzorów. W macierzy \mathbf{c}_Y elementy są funkcjami niepewności Δ_X i współczynników $W_{y_i x_j}$. Zaś elementy diagonalne macierzy $\mathbf{c}_{\mathbf{d}Y}$ są następujące

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{y_i}^2 = & w_{y_i x_1}^2 \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_i x_2}^2 \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_i x_3}^2 \bar{\delta}_{x_3}^2 + \\ & + 2(w_{y_i x_1} w_{y_i x_2} \rho_{x_1 x_2} \bar{\delta}_{x_1} \bar{\delta}_{x_2} + w_{y_i x_1} w_{y_i x_3} \rho_{x_1 x_3} \bar{\delta}_{x_1} \bar{\delta}_{x_3} + w_{y_i x_2} w_{y_i x_3} \rho_{x_2 x_3} \bar{\delta}_{x_2} \bar{\delta}_{x_3}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

lub zapisane w sposób zwarty jako suma

$$\bar{\delta}_{y_i}^2 = \sum_{j=1, k=2}^3 (w_{y_i x_j}^2 \bar{\delta}_{x_j}^2 + 2w_{y_i x_j} w_{y_i x_k} \rho_{x_j x_k} \bar{\delta}_{x_j} \bar{\delta}_{x_k}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

Pozostałe elementy macierzy kowariancji wyjściowej mają postacie $\rho_{y_i y_j} \bar{\delta}_{y_i} \bar{\delta}_{y_j}$. Przy czym współczynniki korelacji $\rho_{y_i y_j} = \rho_{y_j y_i}$ oraz indeksy $i, j = 1, 2$ lub $1, 3$ lub $2, 3$:

$$\begin{aligned} \rho_{y_i y_j} = & \frac{w_{y_i x_1} w_{y_j x_1} \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_i x_2} w_{y_j x_2} \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_i x_3} w_{y_j x_3} \bar{\delta}_{x_3}^2 + (w_{y_i x_2} w_{y_j x_3} + w_{y_i x_3} w_{y_j x_2}) \rho_{x_2 x_3} \bar{\delta}_{x_2} \bar{\delta}_{x_3}}{\bar{\delta}_{y_i} \bar{\delta}_{y_j}} + \\ & + \frac{(w_{y_i x_3} w_{y_j x_3} + w_{y_i x_1} w_{y_j x_1}) \rho_{x_1 x_3} \bar{\delta}_{x_1} \bar{\delta}_{x_3} + (w_{y_i x_2} w_{y_j x_1} + w_{y_i x_1} w_{y_j x_2}) \rho_{x_1 x_2} \bar{\delta}_{x_1} \bar{\delta}_{x_2}}{\bar{\delta}_{y_i} \bar{\delta}_{y_j}} \end{aligned} \quad (14)$$

Gdy macierz $\mathbf{S}_{\mathbf{d}}$ ma wszystkie współczynniki wrażliwości równe 1, to niepewności względne wejściowe są transformowane w niepewności względne wyjściowe, identycznie jak bezwzględne. Funkcje tworzące funkcjonal są wówczas multiplikatywne. W szczególnym przypadku, gdy wielkości wejściowe nie są ze sobą skorelowane, czyli $\rho_{x_1 x_2} = \rho_{x_1 x_3} = \rho_{x_2 x_3} = 0$, to wzory (12)–(14) przyjmują prostsze postaci (tabela 1).

Oba sposoby oceny dokładności przez niepewności względne i bezwzględne przedstawimy na przykładach.

4. Niepewności łącznego pomiaru różnicy i wartości średniej temperatury

Należy oszacować dokładność temperatury średniej T_{av} i różnicy temperatury $T_1 - T_2$ wyznaczanych pośrednio z wyników

pomiaru dwu temperatur T_1, T_2 niezależnie zmiennych w określonym przedziale T_{min}, T_{max} i mierzonych dwoma niezależnymi czujnikami platynowymi. W układzie pomiarowym każdy z sygnałów jest próbkowany regularnie, nie za gęsto, tj. tak, że wartości poszczególnych obserwacji są od siebie niezależne statystycznie, czyli ich autokorelacja jest pomijalna. Liczba obserwacji pomiarowych N jest wystarczająco duża i są one uśredniane w zadanym określonym odcinku czasu. Zmiany temperatur są na tyle powolne w stosunku do czasu ustalania się wskazań, iż wpływ błędów dynamicznych czujników i ich przetworników jest pomijalny. Znane z norm i z wzorcowania stałe błędy systematyczne czujników [8] skorygowano przez adjustację układów pomiarowych ich przetworników. Wyjściowe sygnały przetworników obciążone są niepewnością standardową będącą sumą geometryczną niepewności typu A wynikającej z rozrzutu obserwacji pomiarowych oraz niepewnością typu B obejmującą błędy systematyczne nieznanne w danym cyklu pomiarów. Wyznaczone z pomiarów pośrednich wyniki obu wielkości wyjściowych mogą następnie być wykorzystywane łącznie. Ich niepewności trzeba traktować jako skojarzone. Należy wyznaczyć niepewności bezwzględne i względne obu wielkości wyjściowych oraz ich współczynnik korelacji. Przetwarzanie wyników jest cyfrowe o pomijalnych błędach.

Są więc to pomiary pośrednie dwuparametrowe o wektorze wejściowym $\mathbf{X} = [T_1, T_2]^T$ i wyjściowym $\mathbf{Y} = [T_{av}, T_1 - T_2]^T$. Na wyjściu należy wyznaczyć dwie wartości mierzaru $\mathbf{Y} = [T_1 - T_2, (T_1 + T_2)/2]^T \equiv [y_1, y_2]^T$ oraz oszacować ich niepewności i macierz kowariancji. Pomiaru te opisane są więc dwoma równaniami:

$$y_1 = T_1 - T_2 \quad (15a)$$

$$y_2 = 0,5(T_1 + T_2) \quad (15b)$$

Są to operacje addytywne i łatwiej jest użyć wzorów dla niepewności bezwzględnych. Macierz \mathbf{S} ich funkcjonału

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Czyli współczynniki wrażliwości macierzy \mathbf{S} wynoszą:

$$W_{y_1 T_1} = 1; W_{y_1 T_2} = -1; W_{y_2 T_1} = 1/2; W_{y_2 T_2} = 1/2.$$

Tabela 1. Niepewności i ich współczynniki korelacji wielkości wyjściowych dla nieskorelowanych wielkości wejściowych
Table 1. The uncertainties and their correlations coefficients of output quantities for non-correlated input quantities

Lp.	Niepewności wyjściowe – wartości diagonalne	Współczynniki korelacji
1	$\bar{\delta}_{y_1}^2 = w_{y_1 x_1}^2 \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_1 x_2}^2 \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_1 x_3}^2 \bar{\delta}_{x_3}^2$	$\rho_{y_1 y_2} = \frac{w_{y_1 x_1} w_{y_2 x_1} \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_1 x_2} w_{y_2 x_2} \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_1 x_3} w_{y_2 x_3} \bar{\delta}_{x_3}^2}{\bar{\delta}_{y_1} \bar{\delta}_{y_2}}$
2	$\bar{\delta}_{y_2}^2 = w_{y_2 x_1}^2 \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_2 x_2}^2 \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_2 x_3}^2 \bar{\delta}_{x_3}^2$	$\rho_{y_1 y_3} = \frac{w_{y_1 x_1} w_{y_3 x_1} \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_1 x_2} w_{y_3 x_2} \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_1 x_3} w_{y_3 x_3} \bar{\delta}_{x_3}^2}{\bar{\delta}_{y_1} \bar{\delta}_{y_3}}$
3	$\bar{\delta}_{y_3}^2 = w_{y_3 x_1}^2 \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_3 x_2}^2 \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_3 x_3}^2 \bar{\delta}_{x_3}^2$	$\rho_{y_2 y_3} = \frac{w_{y_2 x_1} w_{y_3 x_1} \bar{\delta}_{x_1}^2 + w_{y_2 x_2} w_{y_3 x_2} \bar{\delta}_{x_2}^2 + w_{y_2 x_3} w_{y_3 x_3} \bar{\delta}_{x_3}^2}{\bar{\delta}_{y_2} \bar{\delta}_{y_3}}$

Standardowe niepewności bezwzględne wyjściowe:

$$\bar{\sigma}_{y_1}^2 = \bar{\sigma}_{T_1}^2 - 2\rho_{T_1T_2} \bar{\sigma}_{T_1} \bar{\sigma}_{T_2} + \bar{\sigma}_{T_2}^2, \quad (17a)$$

$$\bar{\sigma}_{y_2}^2 = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_{T_1}^2 + 2\rho_{T_1T_2} \bar{\sigma}_{T_1} \bar{\sigma}_{T_2} + \bar{\sigma}_{T_2}^2) \quad (17b)$$

oraz ich współczynnik korelacji:

$$\rho_{y_1y_2} = \frac{\bar{\sigma}_{T_1}^2 - \bar{\sigma}_{T_2}^2}{\sqrt{\bar{\sigma}_{T_1}^2 - 2\rho_{T_1T_2} \bar{\sigma}_{T_1} \bar{\sigma}_{T_2} + \bar{\sigma}_{T_2}^2} \sqrt{\bar{\sigma}_{T_1}^2 + 2\rho_{T_1T_2} \bar{\sigma}_{T_1} \bar{\sigma}_{T_2} + \bar{\sigma}_{T_2}^2}} \quad (17c)$$

Jeśli temperatury są mierzone przez dwa różne czujniki oddalone od siebie to ich sygnały nie będą skorelowane, czyli $\rho_{T_1T_2} = 0$ wzory (16) i (17) upraszczają się

$$\bar{\sigma}_{y_1}^2 = \bar{\sigma}_{T_1}^2 + \bar{\sigma}_{T_2}^2, \quad (18a)$$

$$\bar{\sigma}_{y_2}^2 = \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_{T_1}^2 + \bar{\sigma}_{T_2}^2), \quad (18b)$$

$$\rho_{y_1y_2} = \frac{\bar{\sigma}_{T_1}^2 - \bar{\sigma}_{T_2}^2}{\bar{\sigma}_{T_1}^2 + \bar{\sigma}_{T_2}^2}. \quad (18c)$$

Tabela 2. Wyniki pomiarów temperatur i obliczeń niepewności wielkości wyjściowych y_1, y_2

Table 2. The results of temperatures measurements and calculations of uncertainties of output quantities y_1, y_2

Pomiar nr	T_1 [°C]	T_2 [°C]
1.	22,089	21,142
2.	22,105	21,138
3.	22,102	21,138
4.	22,103	21,139
5.	22,104	21,142
6.	22,105	21,146
7.	22,100	21,143
8.	22,101	21,139
9.	22,104	21,139
10.	22,103	21,138
\bar{X}	$\bar{T}_1 = 22,102$	$\bar{T}_2 = 21,140$
u_A	$\bar{\sigma}_{T_1} = 0,001$	$\bar{\sigma}_{T_2} = 0,001$
$\mathbf{Y} = [T_1 - T_2, T_{av}]$	$y_1 = 0,961$	$y_2 = 21,621$
u_A [°C]	$\bar{\sigma}_{y_1} = 0,001$	$\bar{\sigma}_{y_2} = 0,002$
$U(k_p = 2,45)$ [°C]	$U_{y_1} = 0,002$	$U_{y_2} = 0,004$
U_R [%]	$2,45\bar{\sigma}_{y_1} = 0,21$	$2,45\bar{\sigma}_{y_2} = 0,01$
$\rho_{y_1y_2}$	0,5	

Macierz współczynników wrażliwości dla wartości względnych jest określona w postaci:

$$\mathbf{S}_\delta = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T_1 - T_2} & -\frac{T_2}{T_1 - T_2} \\ \frac{T_1}{T_1 + T_2} & \frac{T_2}{T_1 + T_2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

a wariancje niepewności względnych wielkości wyjściowych y_1, y_2 w postaci:

$$\bar{\delta}_{y_1}^2 = \bar{\delta}_{T_1}^2 \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^2} - 2\rho_{T_1T_2} \frac{T_1T_2}{(T_1 - T_2)^2} \bar{\delta}_{T_1} \bar{\delta}_{T_2} + \bar{\delta}_{T_2}^2 \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)^2} \quad (20a)$$

$$\bar{\delta}_{y_2}^2 = \bar{\delta}_{T_1}^2 \frac{T_1^2}{(T_1 + T_2)^2} + 2\rho_{T_1T_2} \frac{T_1T_2}{(T_1 + T_2)^2} \bar{\delta}_{T_1} \bar{\delta}_{T_2} + \bar{\delta}_{T_2}^2 \frac{T_2^2}{(T_1 + T_2)^2} \quad (20b)$$

Przykład obliczeniowy. Zmierzono 10-krotnie dwie temperatury osobnymi czujnikami na wejściu i wyjściu grzejnika w punktach od siebie odległych. Wyniki pomiarów można traktować jako nieskorelowane, tj. $\rho_{T_1T_2} = 0$. Wyznaczono różnicę temperatur i temperaturę średnią. Wartości obserwacji pomiarowych T_1, T_2 oraz obliczenia wielkości wyjściowych \mathbf{Y} i ich niepewności zestawiono w tabeli 2. Niepewności względne policzono dla wielkości wyjściowych. Można też definiować je odnosząc niepewności bezwzględne do zakresu zmian temperatury T_{min}, T_{max} .

5. Niepewności pomiarów mocy czynnej, bierniej i pozornej

Pomiary składowych mocy prądu przemiennego wykonuje się zazwyczaj specjalnie zbudowanymi do tego celu miernikami i przetwornikami, tj.: watomierzami – dla mocy czynnej, i waromierzami – dla mocy bierniej. Moc pozorną wyznacza się z pierwiastka kwadratowego ich wskazań, lub z pomiarów wartości skutecznych napięcia i prądu.

W prezentowanym przykładzie, aby zilustrować wykorzystanie macierzy kowariancji do wyznaczenia niepewności względnej trójwymiarowego menzurandu wyjściowego o postaci iloczynu, omawia się inną metodę. Założono, że wektor wielkości wyjściowych \mathbf{Y} ma następujące składowe: moc czynną P , moc bierną Q i pozorną, czyli $\mathbf{Y} = [P, Q, S]^T$. Jest on wyznaczany z pomiaru wartości skutecznych napięcia U i natężenia prądu I oraz składowej $I \cdot \cos \phi$ zmierzonej za pomocą detektora fazoczułego. Wektor wielkości wyjściowych ma więc postać $\mathbf{X} = [U I \cos \phi]^T$. Standardowe niepewności względne tych pomiarów to $\bar{\delta}_{\mathbf{X}} = [\bar{\delta}_U, \bar{\delta}_I, \bar{\delta}_{\cos \phi}]^T$. Ich macierz kowariancji \mathbf{c}_X wynosi

$$\mathbf{c}_X = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_U^2 & \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I & \rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_{\cos \phi} \\ \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I & \bar{\delta}_I^2 & \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \bar{\delta}_{\cos \phi} \\ \rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_{\cos \phi} & \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \bar{\delta}_{\cos \phi} & \bar{\delta}_{\cos \phi}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Należy wyznaczyć wartości składowych mocy $\mathbf{Y} = [P, Q, S]^T$, ich niepewności i macierz kowariancji \mathbf{c}_Y . Moce te opisane są znanymi wzorami: moc czynna $P = UI \cos \phi$, moc bierna

$Q = UI \sin \phi$, moc pozorna $S = UI$. Zależności dla mocy jako poszukiwanych wielkości wyjściowych są operacjami multiplikatywnymi. Prostsze wzory do analizy otrzymuje się przy użyciu niepewności względnych. Macierz współczynników wrażliwości (22) i postać macierzy kowariancji (23) dla tych niepewności podano poniżej:

$$S_{\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\operatorname{ctg}^2 \phi \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$c_Y = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_P^2 & \rho_{PQ} \bar{\delta}_P \bar{\delta}_Q & \rho_{PS} \bar{\delta}_P \bar{\delta}_S \\ \rho_{PQ} \bar{\delta}_P \bar{\delta}_Q & \bar{\delta}_Q^2 & \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \bar{\delta}_{\cos \phi} \\ \rho_{PS} \bar{\delta}_P \bar{\delta}_S & \rho_{QS} \bar{\delta}_Q \bar{\delta}_S & \bar{\delta}_S^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

W rezultacie niepewności względne dla mocy czynnej, bierniej i pozornej określone są przez wariancje niepewności względnych tych mocy, tj.:

$$\bar{\delta}_P^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{tg}^2 \phi + 2 \left[\rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I - \bar{\sigma}_\phi \operatorname{tg} \phi \left(\rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U + \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \right) \right] \quad (24)$$

$$\bar{\delta}_Q^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{ctg}^2 \phi + 2 \left[\rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I + \bar{\sigma}_\phi \operatorname{ctg} \phi \left(\rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U + \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \right) \right] \quad (25)$$

$$\bar{\delta}_S^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + 2 \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I \quad (26)$$

Użyto tu zależności

$$\bar{\delta}_{\cos \phi} = \frac{d(\cos \phi)}{\cos \phi} \frac{\bar{\sigma}_\phi}{\sigma_\phi} = -\bar{\sigma}_\phi \operatorname{tg} \phi$$

a następnie wyznaczono wzory określające współczynniki korelacji wielkości wyjściowych:

$$\rho_{PQ} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 - \bar{\sigma}_\phi^2 + 2 \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I + \bar{\sigma}_\phi (\operatorname{ctg} \phi - \operatorname{tg} \phi) \left(\rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U + \rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I \right)}{\bar{\delta}_P \bar{\delta}_Q} \quad (27)$$

$$\rho_{PS} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 - \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{tg} \phi \left(\rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I + \rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U \right) + 2 \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I}{\bar{\delta}_P \bar{\delta}_S} \quad (28)$$

$$\rho_{QS} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{ctg} \phi \left(\rho_{I \cos \phi} \bar{\delta}_I + \rho_{U \cos \phi} \bar{\delta}_U \right) + 2 \rho_{UI} \bar{\delta}_U \bar{\delta}_I}{\bar{\delta}_Q \bar{\delta}_S} \quad (29)$$

Przy braku korelacji wielkości wejściowych wzory (24)–(29) upraszczają się (tabela 3).

Tabela 3. Niepewności względne wartości mocy i ich współczynniki korelacji

Table 3. The relative uncertainties of power amount and their correlations coefficients

Moc	Wariancje niepewności względnych	Współczynniki korelacji
P	$\bar{\delta}_P^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{tg}^2 \phi$	$\rho_{PQ} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 - \bar{\sigma}_\phi^2}{\bar{\delta}_P \bar{\delta}_Q}$
Q	$\bar{\delta}_Q^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2 + \bar{\sigma}_\phi^2 \operatorname{ctg}^2 \phi$	$\rho_{PS} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2}{\bar{\delta}_P \bar{\delta}_S}$
S	$\bar{\delta}_S^2 = \bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2$	$\rho_{QS} = \frac{\bar{\delta}_U^2 + \bar{\delta}_I^2}{\bar{\delta}_Q \bar{\delta}_S}$

Dla $\phi = \frac{\pi}{4}$ $\bar{\delta}_P = \bar{\delta}_Q$ i $\rho_{PS} = \rho_{QS}$.

6. Pomiary parametrów pola magnetycznego

Badanie stacjonarnego pola magnetycznego wykonuje się za pomocą pozycjonowanej sondy. Jej głowica dokonuje pomiarów trzech składowych wektora indukcji magnetycznej w dwóch punktach przestrzeni w układzie kartezjańskim. Należy wyznaczyć moduły wektorów pola w obu punktach i moduł ich różnicy.

Za trójwymiarowy wektor mierzony przyjeto:

$$T = [|\mathbf{B}_1|; |\mathbf{B}_2|; |\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|]^T \quad (30)$$

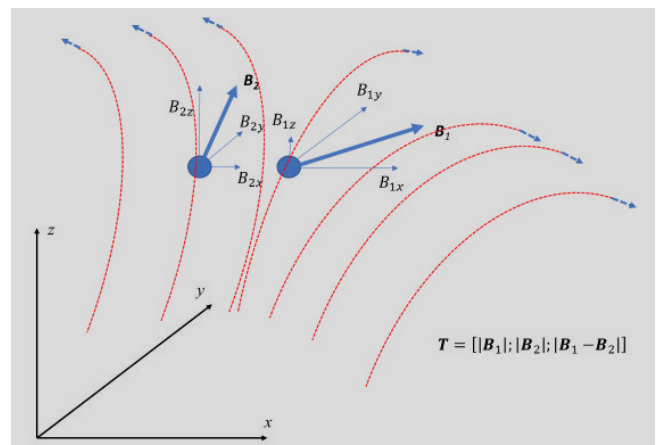
gdzie wartości modułów dwóch wektorów indukcji magnetycznej $|\mathbf{B}_1|$, $|\mathbf{B}_2|$ i moduły wektora różnicy $|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|$ są w układzie kartezjańskim następująco określone przez składowe dwóch wektorów indukcji:

$$|\mathbf{B}_1| = \sqrt{B_{1x}^2 + B_{1y}^2 + B_{1z}^2} \quad (31a)$$

$$|\mathbf{B}_2| = \sqrt{B_{2x}^2 + B_{2y}^2 + B_{2z}^2} \quad (31b)$$

$$|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2| = \sqrt{(B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2} \quad (32)$$

Dla niepewności wielkości wejściowych B_{1x} , B_{1y} , B_{1z} , B_{2x} , B_{2y} , B_{2z} założono brak korelacji. Macierz kowariancji wielkości wejściowych c_x tylko na głównej przekątnej zawiera jednakowe wartości niepewności każdej składowej pola oznaczone przez σ :



Rys. 2. Schemat pomiaru wektora indukcji pola magnetycznego
Fig. 2. Diagram of measurements of magnetic field induction vector

$$\mathbf{c}_x = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Jednakowe odchylenia standardowe wynikają z przyjętej prostokątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla wszystkich składowych pola \mathbf{B} mierzonych w dwóch punktach. Za para-

metr rozkładu prostokątnego przyjęto $a = 1$ czyli $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Macierz współczynników wrażliwości \mathbf{S} funkcjonału przetwarzania określono we współrzędnych wejściowych $B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}, B_{2x}, B_{2y}, B_{2z}$ i o wymiarach $m = 6, n = 3$. Ma ona postać

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{B_{1x}}{|\mathbf{B}_1|} & \frac{B_{1y}}{|\mathbf{B}_1|} & \frac{B_{1z}}{|\mathbf{B}_1|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_{2x}}{|\mathbf{B}_2|} & \frac{B_{2y}}{|\mathbf{B}_2|} & \frac{B_{2z}}{|\mathbf{B}_2|} \\ \frac{B_{1x} - B_{2x}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} & \frac{B_{1y} - B_{2y}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} & \frac{B_{1z} - B_{2z}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} & \frac{B_{2x} - B_{1x}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} & \frac{B_{2y} - B_{1y}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} & \frac{B_{2z} - B_{1z}}{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Wyznaczono macierz symetryczną kowariancji wielkości wyjściowych $\mathbf{c}_y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{c}_x \cdot \mathbf{S}^T$:

$$\mathbf{c}_y = \begin{pmatrix} AA & DD & EE \\ DD & BB & FF \\ EE & FF & CC \end{pmatrix} \quad (35)$$

gdzie:

$$AA = \frac{\sigma^2}{B_1^2} (B_{1x}^2 + B_{1y}^2 + B_{1z}^2) = \sigma^2;$$

$$BB = \frac{\sigma^2}{B_2^2} (B_{2x}^2 + B_{2y}^2 + B_{2z}^2) = \sigma^2;$$

$$CC = \frac{2\sigma^2 [(B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2]}{(B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2} = 2\sigma^2;$$

$$DD = 0;$$

$$EE = \frac{\sigma^2 [B_{1x}(B_{1x} - B_{2x}) + B_{1y}(B_{1y} - B_{2y}) + B_{1z}(B_{1z} - B_{2z})]}{B_1 \sqrt{(B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2}};$$

$$FF = \frac{\sigma^2 [B_{2x}(B_{2x} - B_{1x}) + B_{2y}(B_{2y} - B_{1y}) + B_{2z}(B_{2z} - B_{1z})]}{B_2 \sqrt{(B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2}}.$$

7. Obszar pokrycia

Obszarem pokrycia (ang. *cover region*) nazywa się przestrzeń obejmującą niepewność wektora wyjściowego o określonym prawdopodobieństwie, np. 0,95 – zalecanym w Suplemencie 2. Dla układu trójwymiarowego o skorelowanych zmiennych wyj-

ściowych podlegających rozkładowi Gaussa, zarówno macierz kowariancji \mathbf{c}_y zmiennych wyjściowych, jak i macierz odwrotna do niej \mathbf{c}_y^{-1} , powinny być dodatnio określone. Oznacza to, że wyznacznik $\det(\mathbf{c}_y) = 1/\det(\mathbf{c}_y^{-1}) = w\sigma_x^2\sigma_y^2\sigma_z^2$. Parametr $w = 1 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 > 0$. Granicę obszaru pokrycia opisuje równanie powierzchni elipsoidalnej w kartezjańskim układzie ρ_x, ρ_y, ρ_z związanym z głównymi osiami obszaru elipsoidalnego i początkiem układu $X Y Z$ umieszczonym w końcu wektora mierzurandu \mathbf{M} , tj.

$$\frac{\rho_x^2}{a^2} + \frac{\rho_y^2}{b^2} + \frac{\rho_z^2}{c^2} = 1 \quad (36)$$

gdzie k_p jest współczynnikiem rozszerzenia,

$$a^2 = \frac{k_p^2}{\lambda_1} = \frac{\gamma}{\cos \frac{\psi}{3}}, b^2 = \frac{k_p^2}{\lambda_2} = \frac{\gamma}{\cos \frac{\psi + 2\pi}{3}}, c^2 = \frac{k_p^2}{\lambda_3} = \frac{\gamma}{\cos \frac{\psi + 4\pi}{3}}.$$

Pierwiastki λ_1, λ_2 i λ_3 spełniają równanie charakterystyczne:

$$\lambda^3 - \varepsilon \cdot \lambda^2 + K \cdot \lambda - L = 0 \quad (37)$$

$$\text{Zaś } \gamma = \frac{3k_p^2}{\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon^2 - 3K}}, \quad \cos \psi = \frac{27L + 2\varepsilon^3 - 9\varepsilon K}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 3K)^3}} \quad \text{i kąt}$$

$$\psi: 0 < \psi < \pi \quad \text{oraz } \varepsilon = \frac{1}{w} \left(\frac{1 - \rho_{yz}^2}{\sigma_x^2} + \frac{1 - \rho_{xz}^2}{\sigma_y^2} + \frac{1 - \rho_{xy}^2}{\sigma_z^2} \right),$$

$$K = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_y^2 \cdot \sigma_z^2} + \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_z^2} \right), \quad L = \frac{1}{w \cdot \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot \sigma_z^2}.$$

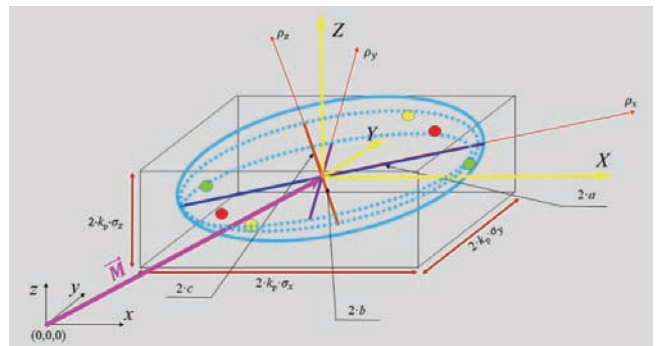
Równanie (36) dla granicy obszaru pokrycia opisuje powierzchnię elipsoidalną styczną do ścian prostopadłościanu o krawędziach długości $2k_p\sigma_x, 2k_p\sigma_y, 2k_p\sigma_z$ (rys. 3).

W układzie kartezjańskim X, Y, Z , związanym z końcem wektora mierzurandu \mathbf{M} , współrzędne punktów styczności elipsoidalnej wyznaczone są przez pierwiastki podwójne tego równania kwadratowego (). Dwie zmienne $(x, y), (x, z)$ i (y, z) traktuje się kolejno jako stałe w równaniu:

$$A \cdot X^2 + B \cdot Y^2 + C \cdot Z^2 + 2 \cdot D \cdot X \cdot Y + 2 \cdot X \cdot E \cdot Z + 2 \cdot F \cdot Y \cdot Z = k_p^2 \quad (38)$$

$$\text{gdzie: } A = \frac{1 - \rho_{yz}^2}{w \cdot \sigma_x^2}; B = \frac{1 - \rho_{xz}^2}{w \cdot \sigma_y^2}; C = \frac{1 - \rho_{xy}^2}{w \cdot \sigma_z^2}; D = \frac{\rho_{xz} \cdot \rho_{yz} - \rho_{xy}}{w \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$E = \frac{\rho_{xy} \cdot \rho_{yz} - \rho_{xz}}{w \cdot \sigma_x \cdot \sigma_z}; F = \frac{\rho_{xy} \cdot \rho_{xz} - \rho_{yz}}{w \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z}.$$



Rys. 3. Ilustracja obszaru pokrycia
Fig. 3. Illustration of cover region

Po przyrównaniu do zera kolejnych dwu delt – wyróżników równania kwadratowego (38), otrzymuje się współrzędne (x, y, z) par punktów styczności elipsoidy ze ścianami prostopadłości (tabela 4).

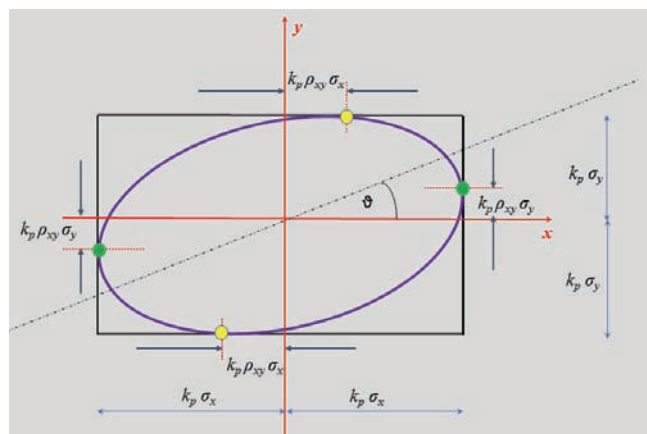
Tabela 4. Współrzędne punktów styczności elipsoidy ze ścianami prostopadłości $2k_p(\sigma_x \times \sigma_y \times \sigma_z)$
Table 4. The coordinates of contiguity points of ellipsoid region with rectangular region

Płaszczyzna:	$X = \pm k_p \sigma_x$		$Y = \pm k_p \sigma_y$		$Z = \pm k_p \sigma_z$	
Kolor punktów:	zielony		czerwony		żółty	
x	$-k_p \sigma_x$	$k_p \sigma_x$	$-k_p \rho_{xy} \sigma_x$	$k_p \rho_{xy} \sigma_x$	$-k_p \rho_{xz} \sigma_x$	$k_p \rho_{xz} \sigma_x$
y	$-k_p \rho_{xy} \sigma_y$	$k_p \rho_{xy} \sigma_y$	$-k_p \sigma_y$	$k_p \sigma_y$	$-k_p \rho_{yz} \sigma_y$	$k_p \rho_{yz} \sigma_y$
z	$-k_p \rho_{xz} \sigma_z$	$k_p \rho_{xz} \sigma_z$	$-k_p \rho_{yz} \sigma_z$	$k_p \rho_{yz} \sigma_z$	$-k_p \sigma_z$	$k_p \sigma_z$

Rzuty prostokątne elipsoidy na ściany boczne prostopadłości z rys. 3 tworzą elipsy wyznaczone przez punkty styczności elipsoidy ze ścianami prostopadłymi do ściany bocznej. Kontur elipsy jest jednocześnie obwiednią wyznaczoną przez wszystkie rzutowane na tę ścianę przekroje elipsoidy równoległe do płaszczyzny ściany, na którą wykonano rzut. Kąt nachylenia elipsy, dla wybranej płaszczyzny rzutu np. XOY, do osi OX określa się tak samo, jak dla dwu skorelowanych zmiennych x i y z niepewnościami σ_x i σ_y i współczynnikiem korelacji ρ_{xy} , tj.:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (39)$$

Poniżej, na rys. 4 podano rzut prostokątny elipsoidy na płaszczyznę XOY.



Rys. 4. Rzut prostokątny elipsoidy na płaszczyznę równoległą do XOY
Fig. 4. Orthogonal projection of ellipsoid on the plane parallel to XOY

8. Obliczenia parametrów obszaru pokrycia dla niepewności parametrów pola magnetycznego

Zmierzone w dwu punktach wartości składowych indukcji pola magnetycznego zamieszczono w tabeli 5.

Na ich podstawie wyznaczono moduły indukcji magnetycznej $|B_1|, |B_2|, |B_1 - B_2|$. Wartości indukcji podano w jednost-

Tabela 5. Wyniki pomiarów indukcji i obliczone parametry macierzy kowariancji

Table 5. The results of induction measurements and calculated parameters of covariance matrix

B_{x1}	B_{y1}	B_{z1}	$ B_1 $	B_{x2}	B_{y2}	B_{z2}	$ B_2 $
94,01	42,02	2,04	102,99	-21,99	18,97	-99,09	103,26
σ_x	σ_y	σ_z	$ B_1 - B_2 $	ρ_{xy}	ρ_{xz}	ρ_{yz}	w
0,58	0,58	0,82	155,61	0,00	0,53	0,53	0,431

kach względnych (dzielenie przez 6842 daje wartość indukcji magnetycznej w gaussach). Na podstawie tych wartości dla współczynnika rozszerzenia $k_p = 2,8$ wyznaczono wartości półosi elipsoidy i kąty nachylenia osi elips jako rzutów elipsoidy na płaszczyzny: XOY do osi OX, ZOZ do osi OX i YOZ do osi OY. Podane je w tabeli 6. Dla trójwymiarowego rozkładu Gaussa elipsoida daje pokrycie, tj. zapewnia prawdopodobieństwo wyników 95%.

9. Wnioski i podsumowanie

Ocenę niepewności pomiarów pośrednich mierzonych lub jednoznacznych, zależnych od kilku mierzonych lub wpływających wielkości, dokonuje się dla propagacji ich niepewności uzyskanej z różniczki zupełnej równania podstawowego pomiaru. Uwzględnia się też korelację niepewności wielkości wejściowych, jeśli ona występuje.

Przy wyznaczaniu parametrów mierzonych wieloparametrowego, czyli wartości i niepewności kilku wielkości wyjściowych na podstawie pomiarów tych samych wielkości wejściowych, należy uwzględnić też, że niepewności wielkości wyjściowych będą skorelowane. Takie rozszerzenie metody propagacji niepewności przeprowadza się w oparciu o macierz kowariancji opisaną w Suplemencie 2 do przewodnika GUM. Jedynie w przypadku, gdy wynik danej wielkości wyjściowej będzie wykorzystywany niezależnie od wyników pozostałych wielkości wyjściowych jej skorelowania z nimi można nie uwzględniać.

W pracy przedstawiono zastosowanie macierzowej metody szacowania niepewności pomiarów podanej w Suplemencie 2 do przewodnika GUM. Dotyczy ona kilku wielkości wyjściowych wyznaczanych z tych samych danych pomiarowych. Wykorzystuje się związek macierzy kowariancji wielkości wejściowych i wielkości wyjściowych. Podano wzory ogólne dla

Tabela 6. Przykładowe wartości półosi głównych elipsoidy i kątów nachylenia ich rzutów na płaszczyzny ścian bocznych styczności do niej prostopadłości

Table 6. Examples of values of main half-axes of ellipsoid and slope angles of their projections on planes of tangent cuboid sides

Nr	a	b	c	v [stopnie °]		
				XOY	ZOX	YOZ
1	0,36	2,78	1,62	0	-30,92	-31,53
2	0,92	2,65	1,62	0	-28,16	-28,26
3	0,85	2,67	1,62	0	-26,54	-30,45
4	0,77	2,69	1,62	0	-27,11	-31,08

parametrów tej macierzy o wymiarach 2×2 , 3×3 , 6×3 występującej w przykładach pomiarów wieloparametrowych temperatury, mocy elektrycznej i pola magnetycznego. Rozszerzono tę metodę o modyfikację polegającą na bezpośrednim stosowaniu niepewności względnych dla równań pomiaru zawierających operacje multiplikatywne. Dla menzurandu trójparametrowego (3D) o rozkładzie Gaussa podano też parametry obszaru pokrycia w postaci elipsoidy, zapewniającego niepewności o zadanym prawdopodobieństwie.

Bibliografia

1. JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Extension to any number of output quantities.
2. Szydłowski H. (red.) i inni, *Teoria pomiarów*, PWN, Warszawa 1981, (rozdz. 11).
3. Warszawa Z., Ezhela V.V., *Zarys podstaw teoretycznych wyznaczania i numerycznej prezentacji wyników pomiarów pośrednich wieloparametrowych*, „Pomiary Automatyka Kontrola”, R. 57, Nr 2, 2011, 175–179.
4. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Evaluation and numerical presentation of the results of multi-dimensional indirect measurements – outline of the theoretical backgrounds*. Extended Abstract AMCTM 2011, Goteborg Sweden.
5. Warszawa Z.L., *Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements. Outline of Some Problems to be Solved*. [in:] *Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX*. ed. by Franco Pavese, Markus Bär et al. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. Vol. 84, World Scientific Books 2012, 418–425.
6. Warszawa Z.L., *About evaluation of multivariate measurements results*, “Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems”, Vol. 6, No. 4, 2012, 27–32.
7. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estimation of vector uncertainties of multi-parametric indirect measurement systems with few examples*. Extended abstract. Proceedings of IMEKO World Congress 2018. Belfast. N. Ireland 3rd to 6th Sept. 2018.

Matrix Estimation of Uncertainty of Indirect Multiparameter Measurements with Examples

Abstract: In this work the vector dependences are presented which gives possibility to estimate of absolute and relative measuring uncertainties of components of the multimeasurand vector. These components are indirectly measured by the multiparametrical measurement system with regarding of the uncertainty directly measured input quantities. The covariance matrixes have been determined for three examples: measurements of two temperatures, three components of the electrical power as well as three component of magnetic field in two its points. The complex of uncertainties for parameters determined indirectly from these measurements are presented.

Keywords: indirect measurements, multimeasurand, covariance matrix, uncertainty of measurement

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–70, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 250 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.



