

Szczepan Opach

Sieć Badawcza Łukasiewicz - Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL, Katowice

## ANALITYCZNE I NUMERYCZNE OBLICZANIE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ W SZYBKOOBROTOWYCH WIRNIKACH Z MAGNESAMI TRWAŁYMI TYPU SPM

### ANALYTICAL AND NUMERICAL CALCULATION OF STRESSES IN HIGH- SPEED SPM TYPE ROTORS WITH PERMANENT MAGNETS

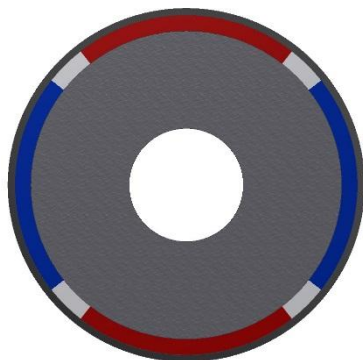
**Streszczenie:** Artykuł prezentuje analityczne i numeryczne metody obliczeń wartości naprężeń w szybkoobrotowych wirnikach z magnesami trwałymi typu SPM. Szczególna uwaga została poświęcona wartości naprężeń w cienkościennych pierścieniach, zabezpieczających magnesy trwałe.

**Abstract:** The article presents analytical and numerical methods for stress calculating in high-speed SPM type rotors with permanent magnets. The special attention is paid to stress in a thin-walled ring protecting permanent magnets.

**Słowa kluczowe:** wirnik szybkoobrotowy, pierścień cienkościenny, tuleja grubościenna  
**Keywords:** high-speed rotor, thin-walled ring, thick-walled sleeve

#### 1. Wstęp

W projektach wirników szybkoobrotowych z magnesami trwałymi typu SPM, zwraca się szczególną uwagę na wyznaczanie wartości naprężeń, wywołanych działaniem sił odśrodkowych. Pod wpływem obciążenia wirującego, zwiększa się długość obwodu każdego kolejnego okręgu, leżącego w płaszczyźnie przekroju poprzecznego tulei. Wydłużeniu ulega również każdy elementarny odcinek promienia wirnika. W tulei wirnika, podczas ruchu wirującego, współistnieją zatem naprężenia obwodowe  $\sigma$ , oraz naprężenia promieniowe  $\sigma_r$ .



Rys. 1. Wirnik z magnesami trwałymi typu SPM z pierścieniem zabezpieczającym magnesy trwałe i gumowymi przekładkami między biegunami

Podczas ruchu wirującego, powstają również wyjątkowo niekorzystne naprężenia rozciągające w warstwie kleju, między magnesem

trwałym a powierzchnią jego osadzenia. Powoduje to konieczność stosowania dodatkowych elementów zabezpieczających magnesy trwałe przed oderwaniem. Jedno z rozwiązań opracowywanych w Instytucie KOMEL przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Przykład zabezpieczenia magnesów trwałych w wirniku typu SPM, przez pierścień kompozytowy z warstwami wzmocnionymi włóknem węglowym CFRP

Celem prezentowanego artykułu jest przedstawienie analitycznych i numerycznych metod wyznaczania wartości naprężeń, powstałych w tulejach wirników SPM oraz pierścieniach zabezpieczających magnesy trwałe w czasie ruchu obrotowego wirnika ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . W algorytmach nie uwzględniono występowania naprężeń termicznych, związanych z nagrzewaniem się wirnika podczas pracy oraz naprężeń związanych z dynamiką wirnika.

## 2. Analityczne obliczenia naprężeń w grubościenniej tulei wirnika

Algorytm analityczny wyznaczenia naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  oraz naprężeń obwodowych  $\sigma_t$  w tulei wirnika, bazuje na zadaniu Lame dla tulei grubościennych. Znanie z teorii sprężystości zadanie Lamé, zostało rozwinięte o problem naprężeń, wywołanych działaniem odśrodkowych sił bezwładności w czasie ruchu obrotowego wirnika.

Na skutek obciążenia wirującego, pewien dowolny punkt przekroju poprzecznego tulei wirnika A (rys. 3), przemieszcza się promieniowo o wartość  $u$  do nowego położenia A'. Takie samo przemieszczenie dotyczy wszystkich punktów leżących na danym okręgu o promieniu  $r$ . Okrąg o promieniu  $r$ , przechodzi więc podczas ruchu obrotowego wirnika w okrąg o promieniu  $r+u$  a każdy nieskończenie mały wycinek jego obwodu, doznaje wydłużenia względnego [1]:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

Jeżeli przemieszczenie punktu A jest równe  $u$ , a punktu B (rys. 3) jest równe  $u+du$ , to zmiana długości odcinka  $AB=dr$  jest  $u+du-u=du$  a jego wydłużenie względne [1]:

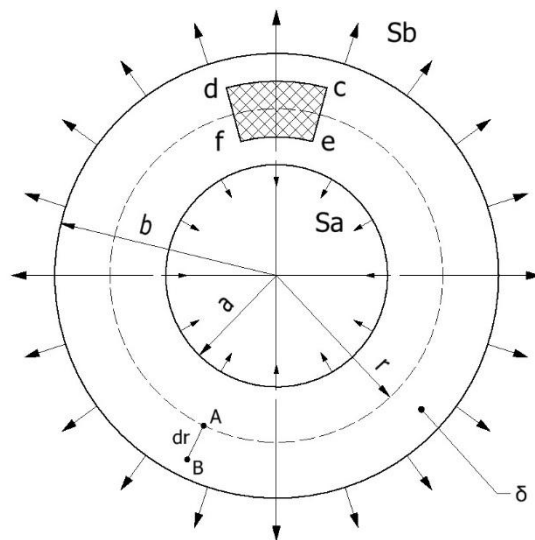
$$\varepsilon_r = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Analiza stanu naprężenia w grubościenniej tulei wirnika, przeprowadzona została w płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Tarcza kołowa, będąca przekrojem poprzecznym tulei, znajduje się w dwuwymiarowym stanie naprężenia. Dla dwuwymiarowego stanu naprężenia obowiązują wzory [1]:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_t) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \cdot \varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

Wzory powyższe wyrażają wartość naprężeń obwodowych  $\sigma_t$  oraz naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  w tarczy kołowej w funkcji przemieszczenia punktów  $u$ . Przemieszczenia punktów  $u$  są, jak się okazuje funkcją promienia  $r$ , co zostanie udowodnione później [1].



Rys. 3. Rysunek pomocniczy do analizy stanu naprężenia w tulei grubościenniej

Zbadano równowagę elementarnego klina  $cdef$  (rys. 3). Na klin  $cdef$  działają, podczas ruchu obrotowego wirnika, następujące siły [1]:

- na boku  $ef$  siła:  
 $F_{ef} = \sigma_r \cdot r \cdot d\beta \cdot \delta$  [N]
  - na boku  $cd$  siła:  
 $F_{cd} = (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\beta \cdot \delta$  [N]
  - na bokach  $ce$  oraz  $df$ , równe sobie siły:  
 $F_{ce} = F_{df} = \sigma_t \cdot dr \cdot \delta$  [N]
  - siła masowa, przyczepiona w środku ciężkości klina  $cdef$  i proporcjonalna do jego objętości:  
 $q_r \cdot (dV) = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot (d\beta \cdot r \cdot dr \cdot \delta)$  [N]
- Gdzie:  $\rho$  – gęstość materiału [ $\text{kg/m}^3$ ],  $\beta$  – kąt rozwarcia analizowanego klina [rad],  $\delta$  – grubość klina [m].

Stosując przekształcenia, równanie równowagi klina sprowadza się do postaci [4][5]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} \cdot r + \sigma_r - \sigma_t + q_r \cdot r = 0$$

Wstawiając do powyższego równania, opisane wyżej wartości naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  oraz naprężeń stycznych  $\sigma_t$ , a także pochodną naprężenia promieniowego  $\sigma_r$  po promieniu  $r$ , otrzymuje się następujące równanie [1][4]:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \cdot q_r = 0$$

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest funkcja:

$$u(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^3$$

Postać powyższej funkcji, dowodzi zależności przemieszczeń punktów przekroju poprzecznego  $u$  od wartości promienia  $r$  okręgu, na obwodzie którego te punkty się znajdują.

Funkcja  $u(r)$  oraz jej pochodna po promieniu  $r$ , została następnie podstawiona do wzorów na naprężenia promieniowe  $\sigma_r$  oraz naprężenia styczne  $\sigma_t$ . W wyniku tego, otrzymano wzory na naprężenia, niebędące funkcją przemieszczenia punktów przekroju  $u$  a jedynie funkcją promienia  $r$  [1][4]:

$$\sigma_r = B_1 - B_2 \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

$$\sigma_t = B_1 + B_2 \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

Wartości  $B_1$  oraz  $B_2$  wyznaczono z warunków brzegowych zakładając, że dla promienia  $r=a$  wartość naprężenia promieniowego wynosi  $\sigma_r=S_a$ , natomiast dla promienia  $r=b$  wartość naprężenia promieniowego wynosi  $\sigma_r=S_b$ .

Dla potrzeb niniejszego artykułu założono dodatkowo, że naprężenie  $S_a$  na wewnętrznej powierzchni tulei w miejscu jej kontaktu z wałem, nie występuje. Założenie takie odnosi się do przypadku suwliwego pasowania między wałem a tuleją wirnika. Wcisk wówczas nie występuje. Naprężenie  $S_b$  pochodzi od kontaktu z zewnętrznym pierścieniem osadzonym na tulei wirnika. Ostatecznie wzory na naprężenia promieniowe  $\sigma_r$  oraz naprężenia styczne  $\sigma_t$  w tulei grubościennych wirnika, wywołane działaniem siły odśrodkowej oraz nacisku  $S_b$  ze strony zewnętrznego pierścienia, mają postać:

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \cdot \sigma_p \cdot \left[ 1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2} \right] + S_b \cdot \left[ \frac{b^2 \cdot (r^2 - a^2)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \nu}{8} \cdot \sigma_p \cdot \left[ 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} \right] + S_b \cdot \left[ \frac{b^2 \cdot (r^2 + a^2)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)} \right] - \frac{1 + 3\nu}{8} \cdot \sigma_p \cdot \frac{r^2}{b^2}$$

gdzie:  $\sigma_p = \rho \cdot \omega^2 \cdot b^2 = \rho \cdot (v_b)^2$

### 3. Analityczne obliczenia naprężeń w cienkościennym pierścieniu zewnętrznym

Grubość pierścienia zewnętrznego  $g$ , jest nieporównywalnie mniejsza od jego średnicy  $d=2b$  (rys. 4). Można więc uważać go za pierścień cienkościenny, dla którego obowiązuje jednowymiarowy stan naprężenia [2].

Podobnie jak w przypadku tulei grubościennych, przeprowadzono analizę równowagi wycinka pierścienia cienkościennego. W tym przypadku, na wycinek pierścienia działają następujące siły:

- siła od naprężeń obwodowych po obu stronach wycinka:

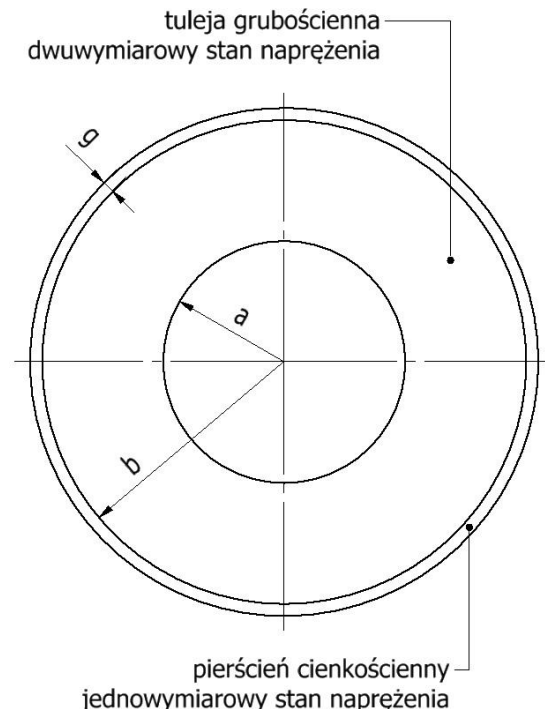
$$F_o = \sigma_z \cdot g \cdot h \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

- siła odśrodkowa związana z ruchem obrotowym wirnika:

$$F_b = \frac{d}{2} \cdot d\varphi \cdot h \cdot g \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{2}$$

- siła od nacisku ze strony tulei wirnika:

$$F_t = -S_b \cdot \frac{d}{2} \cdot d\varphi \cdot h$$



Rys. 4. Rysunek pomocniczy do analizy stanu naprężenia w pierścieniu cienkościennym

Z równania równowagi wycinka pierścienia cienkościennego wynika, że wartość naprężeń rozciągających  $\sigma_z$  w pierścieniu wynosi:

$$\sigma_z = \frac{d \cdot \left( g \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{2} - S_b \right)}{2 \cdot g}$$

Licząc wydłużenie względne obwodowe pierścienia cienkościennego w którym występuje jednowymiarowy stan naprężenia, korzysta się z najprostszej postaci Prawa Hooke'a, dzieląc naprężenie  $\sigma_z$  przez Moduł Younga dla materiału pierścienia:

$$\varepsilon_z = \frac{d \cdot \left( g \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{2} - S_b \right)}{2 \cdot E_z \cdot g}$$

#### 4. Zestawienie równań obowiązujących dla tulei grubościennych i pierścienia cienkościennego

W oparciu o równania zapisane w poprzednim punkcie, nie można jednoznacznie wyznaczyć wartości naprężeń  $\sigma_z$  w pierścieniu zewnętrznym. Powodem jest występowanie we wzorze naprężeń  $S_b$ , pochodzących od nacisku ze strony tulei grubościennych. Ponieważ naprężenie  $S_b$  występuje również we wzorach obowiązujących dla tulei grubościennych, zestawiono je ze sobą, celem wyznaczenia jego wartości. Odkształcenia względne  $\varepsilon$  w miejscu kontaktu tulei grubościennych i pierścienia cienkościennego są sobie równe. Dla pierścienia cienkościennego, zostały one wyznaczone w poprzednim punkcie:

$$\varepsilon_z = \frac{d \cdot \left( g \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{2} - S_b \right)}{2 \cdot E_z \cdot g}$$

Dla tulei grubościennych, można je obliczyć ze wzoru obowiązującego dla dwuwymiarowego stanu naprężenia a mianowicie:

$$\varepsilon_w = \frac{1}{E_w} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r]$$

Przyrównując do siebie  $\varepsilon_z = \varepsilon_w$ , uzyskuje się wartość naprężenia  $S_b$ , którą następnie podstawia się w miejsce niewiadomej do wzoru na naprężenie rozciągające  $\sigma_z$  w pierścieniu cienkościennym.

#### 5. Implementacja algorytmu analitycznego w arkuszu kalkulacyjnym

Wszystkie opisane wyżej formuły zaimplementowano w arkuszu kalkulacyjnym. Pozwala to na swobodne wprowadzanie wartości parametrów geometrycznych takich jak średnice, długość wirnika, grubość pierścienia cienko-

ściennego a ponadto parametrów materiałowych takich jak gęstość, Moduł Younga, Liczba Poissona. Dodatkowo wprowadza się wartość prędkości kątowej wirnika. Dla tak wprowadzonych parametrów, arkusz kalkulacyjny szybko zwraca wartość naprężenia rozciągającego  $\sigma_z$  w cienkościennym pierścieniu, założonym z zerowym luzem na powierzchnię grubościenną tulei wirnika.

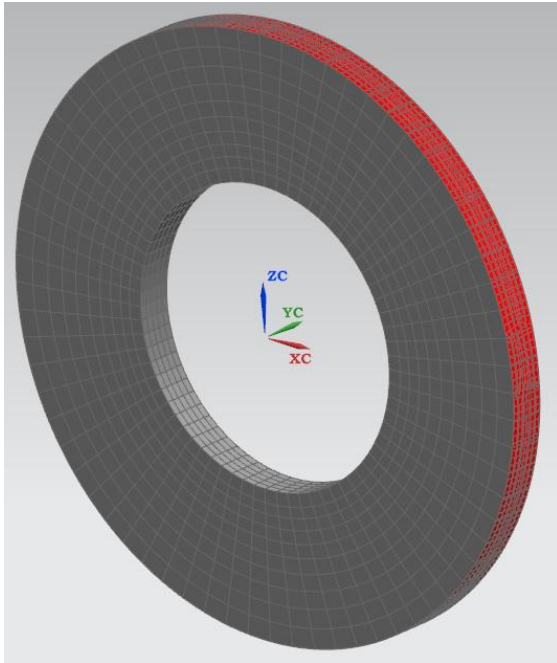
Naprężenia  $\sigma_z$  obliczono dla przypadku wykonania tulei grubościennych jak i pierścienia cienkościennego ze stali. Niezbędne wartości parametrów geometrycznych i materiałowych zestawiono w poniższej tabeli. Wartość naprężeń  $\sigma_z$ , wyznaczona za pomocą algorytmu analitycznego wynosi  $\sigma_z = 49,23$  MPa.

Tab. 1. Wartości parametrów geometrycznych i materiałowych wirnika, niezbędne do przeprowadzenia algorytmu analitycznego

	Tuleja grubościenna	Pierścień cienkościenny
Materiał	Stal	Stal
Moduł Younga	206940 MPa	206940 MPa
Liczba Poissona	0,288	0,288
Gęstość	7829 kg/m <sup>3</sup>	7829 kg/m <sup>3</sup>
<i>a</i>	0,02 m	
<i>b</i>	0,04 m	
<i>g</i>		0,5 mm
$\omega$	30000 obr/min=3141,6 rad/s	
$\sigma_z$	49,23 MPa	

#### 6. Obliczenia numeryczne z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych

Na zamodelowane bryły nałożono siatkę elementów skończonych. Siatkę reprezentującą tuleję grubościenną utworzono z elementów 3D CHEXA8. Zastosowano odwzorowanie cztero-kątne, bez użycia trójkątów. Na grubości bryły, odpowiadającej szerokości jednego magnesu trwałego, utworzono 5 warstw siatki elementów skończonych. Wybrano predefiniowany w bazie materiał Stal. Siatkę reprezentującą pierścień cienkościenny utworzono z elementów 2D CQUAD4. Zastosowano odwzorowanie cztero-kątne, bez użycia trójkątów. Na grubości siatki, odpowiadającej szerokości jednego magnesu trwałego, utworzono 5 elementów skończonych. Wybrano, podobnie jak poprzednio, predefiniowany w bazie materiał Stal.



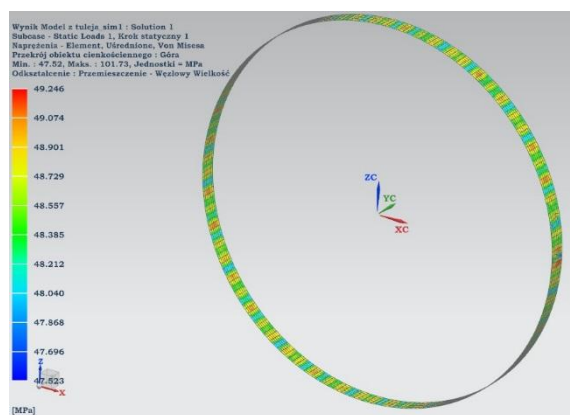
Rys. 5. Zdyskretyzowany model MES

Przeprowadzono automatyczne dopasowanie siatek a następnie przy użyciu obiektu sklejanie powierzchnia – powierzchnia, dokonano ich wzajemnego połączenia.

Zastosowano warunek brzegowy w postaci więzu cylindrycznego na wewnętrznej powierzchni tulei wirnika. Założono możliwość wzrostu promieniowego, przy jednoczesnym zablokowaniu możliwości obrotu osiowego oraz wzrostu osiowego.

Następnie zadano obciążenie w postaci prędkości kątowej  $\omega$ , odnoszącej się do całego złozenia.

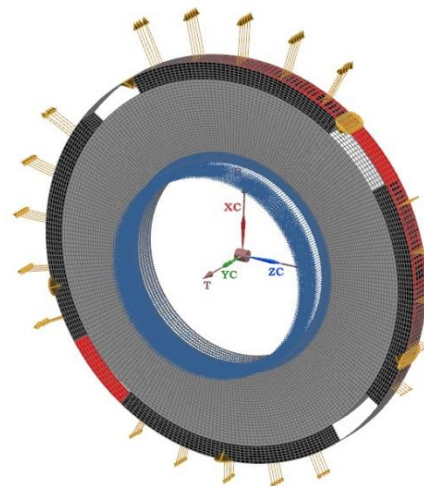
Wyniki symulacji MES, przedstawiono na rys. 6.



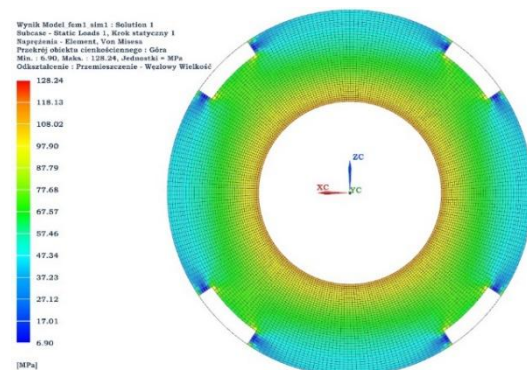
Rys. 6. Wyniki symulacji MES. Naprężenia zredukowane von Misesa. Naprężenie zredukowane maksymalne  $\sigma = 49,246$  MPa

W powyższej symulacji nie uwzględniono istnienia magnesów trwałych, jako warstwy pośredniej między stalową tuleją grubościenną a stalowym pierścieniem cienkościennym. W kolejnych symulacjach zamodelowano cztery magnesy trwałe za pomocą elementów 3D CHEXA8 w sposób analogiczny do tulei grubościennych. Założono, dla uproszczenia obliczeń, że materiałem magnesu trwałego również będzie Stal. Jednorodność materiałów trzech współpracujących warstw, w odniesieniu do Modułu Younga a w kolejnych pracach również do współczynnika rozszerzalności cieplnej, gwarantuje jednorodność odkształceń osiowych i brak naprężeń w tym kierunku. Zamiarem autora było zatem zbliżyć model do warunków płaskiego stanu naprężenia.

Zdyskretyzowany model MES pokazano na rys. 7 a wyniki symulacji, przy założeniu analogicznych obciążeń i warunków brzegowych co poprzednio, na rys. 8.



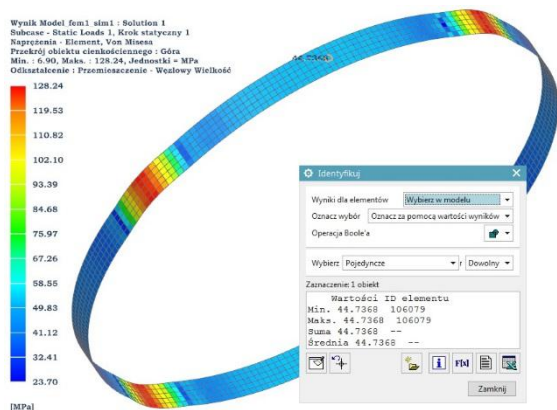
Rys. 7. Zdyskretyzowany model MES wycinka wirnika z uwzględnieniem magnesów trwałych



Rys. 8. Wyniki symulacji MES. Naprężenia zredukowane von Misesa we wszystkich warstwach modelu.



Wyniki symulacji, pokazane na rys. 8, wskazują na kumulację naprężeń w obszarach tulei grubościennych, leżących między magnesami trwałymi. Wyniki symulacji MES dla pierścienia cienkościennego, pokazano na rys.9.



Rys. 9. Wyniki symulacji MES. Naprężenia zredukowane von Misesa w pierścieniu cienkościennym

Wyniki symulacji, pokazane na rys. 9, pokazują przybliżoną jednorodność wartości naprężeń zredukowanych w obszarach przylegania do magnesu trwałego. Wartość naprężenia zredukowanego von Misesa w tym obszarze (dla wszystkich biegunów), wynosi średnio 44,7 MPa. W odniesieniu do wyników uzyskanych w poprzedniej symulacji (rys. 6), jest to wartość o 4 MPa niższa. Uwagę zwraca natomiast poważne spiętrzenie naprężeń w odcinkach leżących między magnesami trwałymi. Spiętrzenia naprężeń w tym obszarze nie oddał model w którym magnesy trwałe nie zostały uwzględnione. Zagadnienie to będzie przedmiotem kolejnych prac autora z tego cyklu.

## 7. Podsumowanie i wnioski

W artykule zaprezentowano przybliżone metody obliczeń naprężeń  $\sigma_z$  w cienkościennych pierścieniach, zabezpieczających magnesy trwałe w czasie ruchu obrotowego wirnika. Model analityczny, jak również odpowiadający mu model MES, zostały opracowane przy założeniu płaskiego stanu naprężenia. Założenie to wyklucza istnienie naprężenia w kierunku osi wirnika. Zostało to osiągnięte przez zastosowanie jednorodnego materiału wszystkich analizowanych części. Przy takim założeniu z zadania Lamé wynika, że wydłużenie względne w kierunku osi wirnika, będzie jednorodne we wszystkich punktach modelu. Tym samym nie pojawią się naprężenia osiowe, wynikające z różnicy wy-

dłużeń sklejonych siatek. Dla potrzeb uproszczenia obliczeń analitycznych na tym etapie, nie uwzględniono w modelach wpływu temperatury. Algorytm analityczny uwzględniający naprężenia cieplne, powstałe w wyniku nagrzewania się wirnika podczas pracy, zostanie zaprezentowany w kolejnych artykułach.

Celem nadrzędnym stawianym sobie przez autora, jest stworzenie algorytmu analitycznego, umożliwiającego obliczanie naprężeń w cienkościennym pierścieniu kompozytowym GFRP lub CFRP z uwzględnieniem wpływu temperatury oraz efektu połączenia wciskowego. Materiały kompozytowe z założenia cechują się ortotropią. Nie jest wówczas możliwe założenie płaskiego stanu naprężenia w analizowanym modelu. Ortotropia odnosi się nie tylko do własności wytrzymałościowych ale również współczynnika rozszerzalności cieplnej, co stwarza poważne problemy obliczeniowe. Wyniki prac w tym kierunku, przedstawione zostaną w kolejnych opracowaniach.

## 8. Literatura

- [1]. Z. Brzoska: „Wytrzymałość Materiałów”, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
- [2]. M. Banasiak, K. Grossman, M. Trombski: „Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019.
- [3]. T. Kamf: „High speed flywheel design, using advanced composite materials”, Uppsala University, September 2012.
- [4]. Wenjie Cheng, Zhikai Deng, Ling Xiao, Bin Zhong, Bo Zhang: “Strength analytical solution to ultra-high-speed permanent magnet rotor considering temperature gradient and segmental permanent magnet effect”, *Advances in Mechanical Engineering* 2019 vol. 11(4) 1-12.
- [5]. Liangliang Chen, Changsheng Zhu: “Rotor strength analysis for high speed permanent magnet machines”, 2014 17<sup>th</sup> ICEMS Hangzhou China

## 9. Autor

mgr inż. Szczepan Opach  
sz.opach@komel.com.pl

Sieć Badawcza Łukasiewicz - Instytut Napędów i Maszyn Elektrycznych KOMEL  
40-203 Katowice, al. Roździeńskiego 188