

DOI: 10.5604/20830157.1159328

# WYKORZYSTANIE METODY ÅNGSTRÖMA DO SZACOWANIA DYFUZYJNOŚCI CIEPLNEJ WSADU W UKŁADZIE NAGRZEWANIA INDUKCYJNEGO

Adam Cieślak, Jerzy Zgraja

Politechnika Łódzka, Instytut Informatyki Stosowanej

**Streszczenie.** Przedmiotem niniejszej pracy było poszukiwanie metody szacowania dyfuzyjności cieplnej wsadu nagrzewanego indukcyjnie. Przedstawiono próbę wykorzystania metody ÅNGSTRÖMA w układzie, w którym wymuszenie generowano metodą indukcyjną. Analiza objęła zagadnienie wrażliwości badanej metody na wybrane parametry układu. Zaprezentowane wyniki pokazują, że przy zachowaniu odpowiednich wymiarów geometrycznych próbki oraz odpowiednio rozmieszczonych punktów pomiarowym możliwe jest uzyskanie wyników szacowania dyfuzyjności cieplnej z poziomem błędu poniżej 50%.

**Słowa kluczowe:** dyfuzyjność cieplna, właściwości materiałowe, nagrzewanie indukcyjne

## UTILISATION OF ÅNGSTRÖM METHOD FOR ESTIMATING A THERMAL DIFFUSIVITY OF CHARGE IN INDUCTION HEATING SETUP

**Abstract.** Main aim of this article is to find method for determination thermal diffusivity of induction heated charge. Unique try of utilisation ÅNGSTRÖM's method and it's sensitivity on various parameters of setup was presented. Summary allows to say that with respect to shown precautions it is possible to achieve results on satisfactory level of accuracy.

**Keywords:** thermal diffusivity, material properties, induction heating

### Wstęp

Znajomość rzeczywistych temperaturowych charakterystyk materiałowych indukcyjnie nagrzewanego wsadu stanowi jeden z podstawowych warunków zarówno poprawnego zaprojektowania jak i zrealizowania technologicznego procesu nagrzewania indukcyjnego. W aplikacjach przemysłowych wskazane jest, aby proces identyfikacji parametrów materiałowych był prowadzony in situ i to najlepiej bez konieczności zatrudniania wykwalifikowanych specjalistów, zapewniając tym samym minimalizację nakładów finansowych. Przedmiotem niniejszej pracy jest próba poszukiwania metody spełniającej powyższe warunki w odniesieniu do cieplnych parametrów materiałowych wsadu. W praktyce stosowane są metody polegające na dostarczeniu zmiennego w czasie lub impulsowego strumienia ciepła i badaniu odpowiedzi temperaturowej w wybranych punktach badanej próbki. W ramach prowadzonych prac, bazując m.in. na [3 - 5], podjęto próbę adaptacji falowej metody Ångströma [1] do wyznaczania dyfuzyjności cieplnej, w celu jej zastosowania w układzie nagrzewania indukcyjnego. Na podstawie wyników z symulacji numerycznych przeprowadzono analizę możliwości wykorzystania nagrzewania indukcyjnego jako wymuszającego źródła ciepła oraz analizę możliwości wykorzystania w badaniach próbki o kształcie walcowym – łatwej do wykonania i dającej możliwość zastosowania stosunkowo nieskomplikowanego modelu w obliczeniach elektromagnetyczno – cieplnych.

### 1. Metoda Ångströma

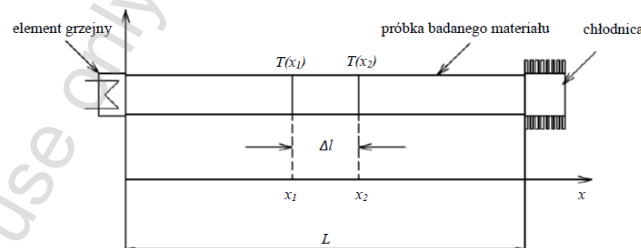
Sformułowana w 1863 roku przez A.J. Ångströma metoda [1] należy do najstarszych metod analizy przewodnictwa temperaturowego w stanie niestacjonarnym (nieustalonym). Głównym założeniem metody jest periodyczne wymuszenie cieplne w celu wytworzenia fali temperaturowej wewnątrz badanego przewodnika - pręta, a następnie pomiar temperatury w punktach odpowiednio rozłożonych na jego długości.

Dyfuzyjność cieplna  $a$  definiowana zależnością (1) jest miarą szybkości wyrównywania się temperatury w trakcie stanów niestalonych termicznie.

$$a = \frac{\lambda}{\delta c_p} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (1)$$

gdzie:  $\lambda$  – przewodność cieplna właściwa,  $c_p$  – ciepło właściwe,  $\delta$  – gęstość.

W metodzie Ångströma wyznaczenie dyfuzyjności cieplnej odbywa się w oparciu o pomiar przesunięcia fazowego fali temperaturowej rejestrowanej w kolejnych punktach pomiarowych na długości wsadu. Warunek ten determinuje brak możliwości zastosowania wsadu o kształcie płytek, grubości poniżej kilku milimetrów.



Rys. 1. Schemat układu do wyznaczania dyfuzyjności cieplnej metodą Ångströma

Przedstawiony na rys. 1 schemat prezentuje przykładową konfigurację układu służącego do pomiaru dyfuzyjności cieplnej. Do jednego z końców próbki ( $x=0$ ) przyłączony jest element grzejny zasilany w sposób umożliwiający wymuszenie periodycznie zmiennego strumienia cieplnego. Drugi koniec próbki ( $x=L$ ) połączony jest z chłodnicą zapewniającą stałą w czasie temperaturę i sprawny odbiór ciepła z końca próbki. W celu zapewnienia równoległego do osi  $Ox$  przepływu strumienia ciepła, powierzchnia boczna próbki jest izolowana cieplnie. Do wyznaczenia dyfuzyjności cieplnej  $a$  wymagane jest wykonanie pomiaru wartości temperatury w minimum dwóch punktach badanej próbki oddalonych o  $\Delta l$ .

Dla przyjętego układu oraz wymuszenia harmonicznego temperaturę w dowolnym miejscu próbki wzdłuż kierunku przepływu ciepła można wyrazić zależnością:

$$T(x, t) = T_0 e^{-ax} \cos(\omega t + c + bx) \quad (2)$$

gdzie  $c$  i  $b$  to współczynniki zależne od częstości przebiegu temperaturowego  $\omega$  i dyfuzyjności cieplnej  $a$  w wymieniony poniżej sposób:

$$cb = \frac{\omega}{2a} \quad (3)$$

Temperatura w punktach oznaczonych jako  $x_1$  i  $x_2$  zgodnie z (2) wynosi:

$$T(x_1, t) = \overbrace{T_0 e^{-ax} \cos(\omega t + c + bx_1)}^{T_1} \quad (4)$$

$$T(x_2, t) = \overbrace{T_0 e^{-ax} \cos(\omega t + c + bx_2)}^{T_2} \quad (5)$$

gdzie  $T_1$  i  $T_2$  to amplitudy czasowych przebiegów temperatury w punktach kolejno  $x_1$  i  $x_2$ .

Zgodnie z [2], przy założeniu wolnozmiennych przebiegów temperatury, można pominąć zmianę częstości  $\omega$  przy temperaturze zmieniającej się według (2) i wtedy stosunek amplitud  $T_1$  i  $T_2$  wynosi [2]

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{a(x_2 - x_1)} \quad (6)$$

Po przekształceniu równania (6) otrzymujemy:

$$c = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\Delta l} \quad (7)$$

Z układu równań (4,5) wynika różnica przesunięć fazowych obu przebiegów temperatury  $\Delta\varphi = b(x_2 - x_1)$ , co pozwala wyznaczyć [2]:

$$b = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \quad (8)$$

Z równania (3) wynika [2], że:

$$\frac{\omega}{2a} = \frac{2\pi}{2\pi a} = cb \quad (9)$$

gdzie:  $\tau$  to okres periodyczności fali temperaturowej równy  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , gdzie  $\tau_1$  i  $\tau_2$  to czas, w którym element grzejny jest odpowiednio: włączony i wyłączony.

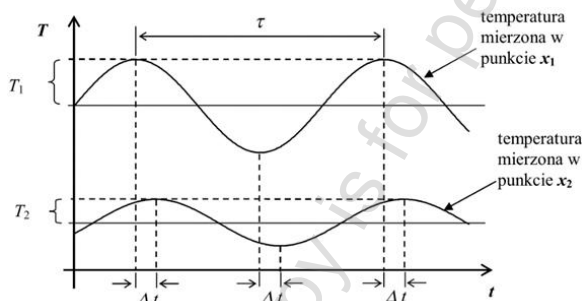
Ostatecznie, poszukiwaną wartość dyfuzyjności cieplnej określono jako [2]:

$$a = \frac{\pi(\Delta l)^2}{\Delta\varphi\tau \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} \quad (10)$$

gdzie:  $\Delta l$  – odległość między punktami pomiarowymi;  $\Delta\varphi$  – wartość przesunięcia fazowego między temperaturą maksymalną mierzoną w punktach pomiarowych.

Czasowy przebieg temperatury rejestrowany jednocześnie w obu punktach badanego materiału przedstawiono na rys. 2. Niezbędną do obliczenia dyfuzyjności cieplnej wartość przesunięcia fazowego  $\Delta\varphi$  można wyznaczyć przy pomocy przesunięcia czasowego  $\Delta t$  (między minimami lub maksimami temperatury) z zależności [2]:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \Delta t \quad (11)$$



Rys. 2. Czasowy, ustalony przebieg mierzonych temperatur w punktach  $x_1$  i  $x_2$  [4]

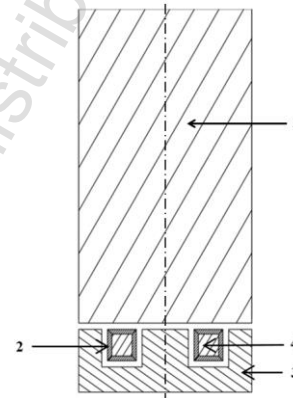
Uzyskana w powyższy sposób wartość dyfuzyjności cieplnej  $a$ , przy założeniu znajomości ciepła właściwego  $c_p$  służy wyznaczeniu wartości przewodności cieplnej właściwej  $\lambda$  z zależności (1):

$$\lambda = a \cdot c_p \cdot \delta \quad (12)$$

## 2. Wykorzystanie metody Ångströma w układzie nagrzewania indukcyjnego w układzie „od czoła”

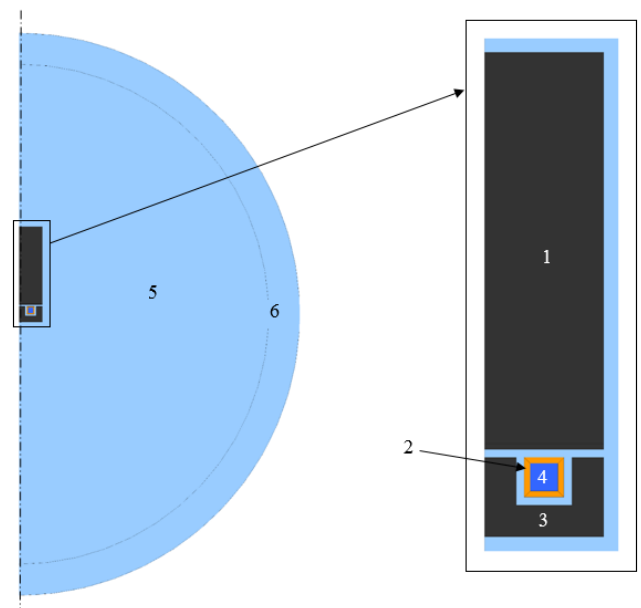
Metoda ta polega na badaniu prędkości przemieszczania się czoła fali cieplnej wewnątrz analizowanej próbki materiału. Przedmiotem niniejszej analizy było poszukiwanie rozmieszczenia punktów pomiarowych temperatury oraz dobór odpowiednich parametrów układu elektrycznego generującego wymuszenie cieplne. Do obliczeń numerycznych wykorzystano próbkę wsadu o średnicy 30 mm i długości 50 mm.

Układ nagrzewania indukcyjnego, który został wykorzystany do obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 3. Jego główne elementy to próbka wsadu 1 o poszukiwanych parametrach materiałowych, wzbudnik jednozwojny 2, bocznik magnetyczny 3 i płyn chłodzący 4. Na podstawie przeprowadzonych symulacji stwierdza się, że układ „od czoła” jest zbliżony do układu realizującego jednokierunkowy przepływ ciepła we wsadzie, mimo występującej tu nierównomierności rozkładu gęstości mocy dostarczanej przez powierzchnię czołową (w części środkowej gęstość mocy równa jest zeru).



Rys. 3. Schemat ideowy układu próbki wsadu - wzbudnik „od czoła” (1 - wsad, 2 - wzbudnik, 3 - bocznik magnetyczny, 4 - płyn chłodzący)

Na rys. 4 przedstawiono numeryczny model symulacyjny układu nagrzewania „od czoła” z rys. 3. Przedstawiony układ jest symetryczny względem osi odciętych, dzięki czemu możliwe jest ograniczenie geometryczne jego modelu numerycznego, co skraca czas obliczeń.



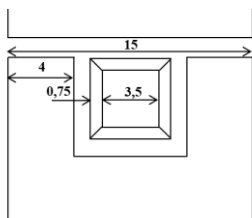
Rys. 4. Model numeryczny symulacyjnego układu nagrzewania „od czoła” (1 - wsad, 2 - wzbudnik, 3 - rdzeń magnetyczny, 4 - czynnik chłodzący wzbudnik, 5 - otoczenie (powietrze), 6 - obszar nieskończony)

Wybrane parametry obliczeniowego modelu numerycznego, przyjęte na potrzeby badań przedstawiono w tabeli 1. W pracy przeprowadzono analizy obliczeniowe dla dwóch różnych długości wsadu: 30 i 50 mm, w celu określenia wrażliwości metody na wymiary geometryczne próbki i dokonania ostatecznego doboru jej wymiarów. Dodatkowym czynnikiem decydującym o wyborze kształtu i długości wsadu jest łatwość wykonania próbki w warunkach przemysłowych.

Tabela 1. Wybrane parametry materiałowe elementów wykorzystanych w modelu obliczeniowym

Parametr /element	Przenikalność magnetyczna względna $\mu_r$	Rezystywność $\rho$	Przewodność cieplna właściwa $\lambda$	Objętościowe ciepło właściwe $c_{mv}$	Gęstość $\delta$
	-	$\Omega \cdot m$	$\frac{W}{m \cdot K}$	$\frac{J}{m^3 \cdot K}$	$\frac{kg}{m^3}$
Wsad	200	$0,25 \cdot 10^{-6}$	40   400	$0,39 \cdot 10^7$	7860
Wzbudnik	1	$1,72 \cdot 10^{-8}$	401	$0,34 \cdot 10^7$	8920
Rdzeń magnetyczny	5000	-	200	-	-
Powietrze	1	-	0,025	-	1,2

Pozostałe wymiary geometryczne elementów modelu obliczeniowego przedstawiono w tabeli 2 i na rys. 5.



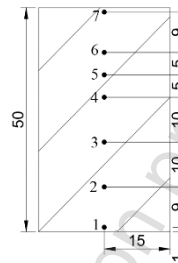
Rys. 5. Wymiary geometryczne elementów modelu obliczeniowego [opracowanie własne]

Tabela 2. Podstawowe wymiary geometryczne elementów wykorzystanych w modelu obliczeniowym

Element	Długość wzdłuż osi rzędnych [mm]	Szerokość wzdłuż osi odciętych [mm]
Wsad	30 i 50	30
Wzbudnik		5
Rdzeń magnetyczny		4
Szczelina powietrzna układu Wzbudnik – rdzeń magnetyczny		1
Szczelina powietrzna układu Wzbudnik/rdzeń magnetyczny - wsad		1

Na podstawie przeprowadzonych, lecz nieprzedstawionych w niniejszej pracy obliczeń stwierdzono, że odwzorowanie pierwotnych założeń metody tj. generacji sinusoidalnego impulsu mocy powinno być możliwie dokładnie zrealizowane. Próba zastąpienia funkcji sinusoidalnej funkcjami prostokątnymi czy trapezoidalnymi nie gwarantuje uzyskania satysfakcjonujących wyników, przy przyjętych (relatywnie małych) długościach wsadu. Z tego względu w dalszej części niniejszego opracowania zostanie przedstawiony model, w którym nagrzewanie wsadu zostało wymuszone poprzez odpowiednio skonfigurowany przebieg prądowy we wzbudniku dający w rezultacie przebieg sinusoidalnie zmiennej mocy wewnątrz wsadu. Do tego celu został wykorzystany komercyjny program Flux w wersji 11 firmy CEDRAT. Jako próbkę wykorzystano wsad wykonany z dwóch rodzajów materiału testowego o przyjętych wartościach przewodności cieplnej właściwej  $\lambda_1=40$  i  $\lambda_2=400$  W/m·K. Wsad był nieizolowany cieplnie, wymiana ciepła odbywała się poprzez zjawisko konwekcji naturalnej oraz radiacji. W celu wymuszenia jednokierunkowego przepływu ciepła w próbce dokonano modyfikacji modelu o układ chłodzenia, który został zrealizowany za pomocą warunku brzegowego na górnej powierzchni czołowej walca. Jej temperaturę przyjęto na stałym poziomie 20 °C. Istnieje realna możliwość pominięcia aktywnego układu chłodzenia na rzecz pasywnego zrealizowanego poprzez zaizolowanie cieplne powierzchni bocznej walca, jednak do celów obliczeniowo – symulacyjnych wykorzystano model z chłodzeniem wymuszonym

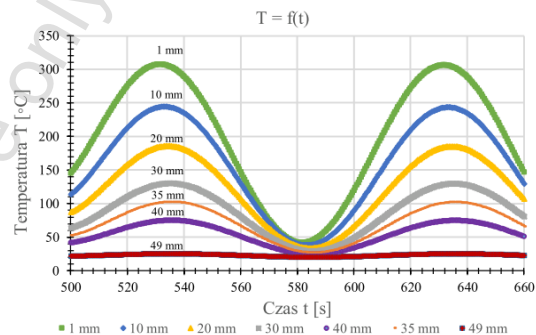
gwarantującym szybkie osiągnięcie stanu cieplnie ustalonego. Parametrami zmiennymi w układzie elektrycznym wykorzystanym w modelu była wartość prądu zasilającego wzbudnik i okres sinusoidalnego przebiegu mocy we wsadzie. Badane punkty pomiaru temperatury zostały rozmieszczone w osi walcowej próbki wsadu na wysokości 1, 10, 20, 30, 35, 40, 49 mm od nagrzewanego czoła wsadu. Na rysunku 6 przedstawiono schematyczne rozmieszczenie punktów pomiarowych.



Rys. 6. Schematyczne rozmieszczenie punktów pomiarowych o numerach od 1 do 7 w próbce wsadu

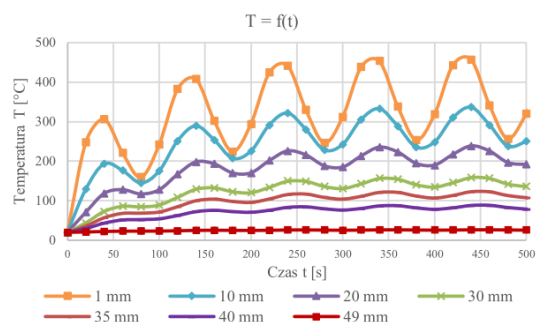
### 3. Wyniki symulacji numerycznych

W pracy przeanalizowano przebiegi fali temperaturowej wewnątrz próbki wsadu. Wyznaczony numerycznie w dziedzinie czasu przebieg temperatury w przedstawionych na rys. 6 punktach pozwolił na obliczenie przesunięć fazowych i wartości maksymalnych przebiegów. Na podstawie wymienionych powyżej danych dokonano obliczenia dyfuzyjności cieplnej i błędu jej wyznaczenia. Na rys. 7 przedstawiono przykładowy przebieg temperatury w analizowanych punktach pomiarowych.



Rys. 7. Przykładowy przebieg fali temperaturowej we wsadzie w punktach o określonej odległości od czoła próbki wsadu

W dalszym etapie pracy zostanie przedstawiony proces oceny wpływu zmiany parametrów modelu na błąd względny wyznaczenia dyfuzyjności cieplnej  $a$ . Analiza przedstawionego powyżej układu została przeprowadzona dla trzech wartości skutecznych prądu zasilającego wzbudnik: 500, 750 i 1000 A oraz czterech długości trwania okresu przebiegu sinusoidalnego mocy dostarczanej do wsadu: 50, 100, 150, 200 s. Wybór okresu zdeteminowany był wstępnym założeniem, że metoda powinna cechować się stosunkowo krótkim czasem pomiaru. Przykładowy proces ustalania się stanu cieplnego wsadu przedstawiono na rys. 8.



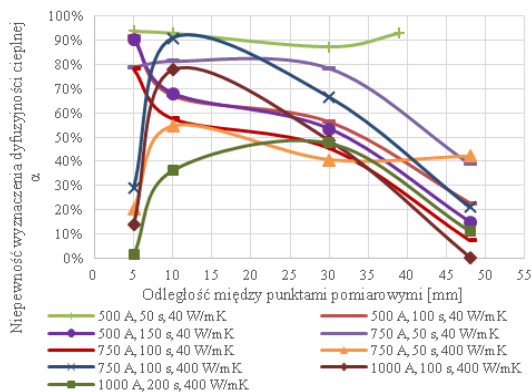
Rys. 8. Przykładowy przebieg temperatury w punktach kontrolnych wsadu - proces ustalania cieplnego wsadu nagrzewanego indukcyjnie



Analiza możliwości zastosowania metody Ångströma wymagała przeprowadzenia szeregu doświadczeń dla różnych kombinacji parametrów (wartości prądu i okresu wymuszenia) i poszukiwania zależności pomiędzy uzyskiwanymi wynikami a zmieniającymi parametrami. Zbiorcze zestawienie wyników przedstawiono na rys. 9. Na potrzeby omawianej analizy dokonano wyboru czterech par punktów pomiarowych, które posłużyły ocenie czułości metody Ångströma na różne konfiguracje modelu. Zestawienie par i wynikające stąd odległości między punktami pomiarowymi przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Zestawienie par punktów pomiarowych

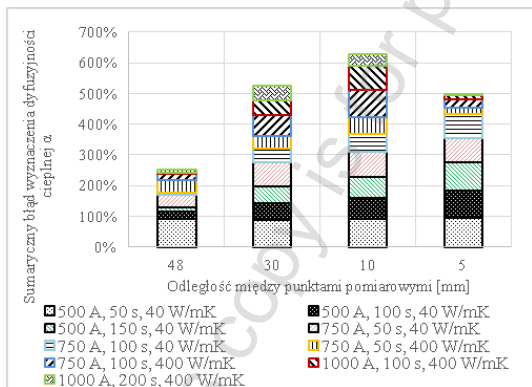
Numer pary	Numer punktów pomiarowych (z rys. 6)	Wysokość punktów liczona od czoła próbki [mm]	Odległość między punktami [mm]
1	1 i 7	1 i 49	48
2	2 i 6	10 i 40	30
3	3 i 5	20 i 30	10
4	4 i 5	30 i 35	5



Rys. 9. Zbiorcze zestawienie wyników obliczeń służących analizie metody Ångströma

#### 4. Wnioski

Przeprowadzone obliczenia pozwalają stwierdzić, że rozmieszczenie punktów pomiarowych jest decydujące dla ostatecznego wyniku obliczeń. Dla większości dokonanych obliczeń najmniejszym błędem obarczone są wyniki uzyskane przy rozmieszczeniu punktów pomiarowych w możliwie dużej odległości od siebie. Należy jednak zauważyć, że dla pewnych konfiguracji modelu przebieg funkcji pokazuje możliwość uzyskania wyników poprawnych przy rozmieszczeniu punktów pomiarowych zarówno w bliskiej jak i dalekiej odległości od siebie. Taki przebieg wyników ujawnia dużą wrażliwość metody Ångströma na rodzaj wymuszenia oraz przewodność cieplną właściwą materiału. Dodatkowe zestawienie powyższych wyników zaprezentowano na rys. 10.



Rys. 10. Zestawienie wyników obliczeń - analiza metody Ångströma

Sumaryczne zestawienie niepewności wyników dla wszystkich analizowanych konfiguracji pozwala ocenić, która z konfiguracji rozmieszczenia punktów pomiarowych przynosi najlepsze efekty. Najkorzystniejsze wydaje się rozmieszczenie punktów

pomiarowych w odległości 48 mm tj. na głębokości 1 mm od dołu i 1 mm od góry próbki wsadu (punkty 1 i 7, rys. 6). W takiej konfiguracji uzyskane rezultaty obarczone są błędem zawierającą się w przedziale poniżej 50 % bez względu na okres, moc wymuszenia i rodzaj materiału za wyjątkiem jednej z dziewięciu konfiguracji tj. przy wymuszeniu 500 A, okresie 50 s i próbce o przewodności 40 W/mK – błąd w tym przypadku przekroczył próg 90%. Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdza się, że w celu uzyskania wyników pozwalających na oszacowanie dyfuzywności cieplnej materiału celowe jest:

- zastosowanie sygnału prądowego o okresie dłuższym niż 50 s i wartości skutecznej z zakresu (750 ÷ 1000) A, generującego sinusoidalny przebieg mocy wewnątrz próbki wsadu.
- Należy mieć również na uwadze trudności, które napotkano w trakcie wykonywania obliczeń i które mogą okazać się istotnym ograniczeniem w zastosowaniu metody Ångströma w rzeczywistym układzie. Są nimi:
  - konieczność rejestracji przebiegu czasowego temperatury w dwóch punktach próbki wsadu z dokładnością co najmniej 0,1 s;
  - konieczność precyzyjnego umieszczenia i pomiaru odległości pomiędzy zastosowanymi czujnikami temperatury;
  - konieczność wyznaczenia przesunięcia fazowego pomiędzy wartościami maksymalnymi ww. przebiegów;
  - niewielka wartość amplitudy przebiegu w najbardziej oddalonym od „źródła ciepła” punkcie 7 (rys. 6);
  - konieczność wymuszenia jednokierunkowego przepływu strumienia ciepła;
  - zagrożenia dla czujnika temperatury umieszczonego najbliższej wzbudnika – punkt 1 (zakłócenia, wysoka temperatura);
  - konieczność zadania sygnału zasilającego wzbudnik tak, aby został wygenerowany sinusoidalny przebieg mocy wewnątrz nagrzewanego wsadu.

#### Literatura

- [1] Ångström A.J.: Phil. Mag. 25, 130, 1863.
- [2] Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. II, Ciepło i fizyka drobinowa, PWN, Warszawa, 1964.
- [3] Vandersande J.W., Pohl R.O.: Simple apparatus for the measurement of thermal diffusivity between 80–500 K using the modified Ångström method, Review of Scientific Instruments 51, 1694, 1980.
- [4] Zgraja J.: Eksperymentalne szacowanie materiałowych parametrów cieplnych w procesie pośredniego wyznaczania charakterystyk materiałowych indukcyjnie nagrzewanego wsadu. Przegląd Elektrotechniczny, 7/2011, 72-75.
- [5] Zgraja J.: The stand for determining of thermal-electrical material properties of induction heated charge, COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol. 30, Iss. 5, 2011, 1487 – 1498.

Mgr inż. Adam Cieślak  
e-mail: acieslak@kis.p.lodz.pl

Absolwent Politechniki Łódzkiej, kierunków: Energetyka i Elektrotechnika w Instytucie Elektroenergetyki. Obecnie doktorant w Instytucie Informatyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej. Działalność naukowa w dyscyplinie elektrotechnika. Zainteresowania naukowe: zagadnienia obliczeń i zjawisk elektromagnetyczno – cieplnych, nagrzewanie indukcyjne, sieci elektroenergetyczne i transformatory mocy.



Dr hab. inż. Jerzy Zgraja, prof. PŁ  
e-mail: jzgraja@p.lodz.pl

Profesor nadzwyczajny w Instytucie Informatyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej. Dyscyplina naukowa elektrotechnika, ukierunkowana na specjalności z obszaru modelowania pól elektromagnetycznych, nagrzewania indukcyjnego i optymalizacji zagadnień polowych. Członek stowarzyszony Sekcji Elektrotermii i Techniki Świetlnej Komitetu Elektrotechniki PAN, od 2010 r. przewodniczący Polskiego Komitetu Elektrotechnologii SEP.

