

Krzywe przejściowe na drogach kolejowych w aspekcie możliwości realizacyjnych

Władysław KOC¹

Streszczenie

W pierwszej części artykułu przedstawiono zasady przyjmowania na drogach kolejowych dopuszczalnych wartości parametrów kinetycznych, wykazując że właściwe jest stosowanie jednakowych zasad dla wszystkich rodzajów krzywych przejściowych. Potwierdzono panującą opinię o przyczynie ograniczonego zakresu stosowania tzw. gładkich krzywych przejściowych. Krzywe te mają jedną, zasadniczą wadę – bardzo małe wartości rzędnych poziomych (i rzędnych rampy przechyłkowej) w rejonie początkowym, w praktyce często niemożliwe do wykonania i następnie utrzymania. Zasadniczą część artykułu poświęcono wyznaczeniu nowej postaci krzywej przejściowej, która w odróżnieniu od powszechnie stosowanej klotoidy, charakteryzuje się łagodnym przebiegiem krzywizny w rejonie wejścia w łuk kołowy. Wykazano zdecydowaną przewagę tej krzywej (z realizacyjnego punktu widzenia) nad krzywą Blossa, reprezentującą gładkie krzywe przejściowe.

Słowa kluczowe: tor kolejowy, krzywe przejściowe, analiza nowego rozwiązania

1. Wprowadzenie

Problematyka krzywych przejściowych w drogach kołowych i kolejowych jest wciąż aktualna. Trwają poszukiwania nowych postaci krzywych [1, 3–5, 7–8, 19, 25, 27–29, 33]. Wśród polskich badaczy, w drogach kołowych w szerokim zakresie zajmuje się tym zagadnieniem A. Kobryń [10–14], natomiast w drogach kolejowych – zespół K. Zboińskiego, który uwzględnił także model dynamiczny układu pojazd szynowy – tor [31, 32].

Prowadzone badania są bardzo interesujące i w znacznym stopniu rozwijają teorię omawianego zagadnienia. Wskazują na korzyści, jakie przyniosłoby praktyczne zastosowanie proponowanych rozwiązań. Opracowana w Austrii krzywa przejściowa Wiener Bögen [9, 30] została nawet opatentowana.

Niestety, wspólną cechą poszukiwań nowych postaci krzywych przejściowych, prowadzonych w ostatnich kilkudziesięciu latach, jest brak uzyskania takiego rozwiązania, które zostałyby zaakceptowane przez praktykę wykonawczą i doczekało się szerokiego wdrożenia. W dalszym ciągu dominującą rolę w układach geometrycznych tras komunikacyjnych odgrywa klotoida o liniowym przebiegu krzywizny na długości. Jej podstawową wadą są załomy na wykresie krzywizny, występujące w rejonach początko-

wym i końcowym, które są przyczyną niekorzystnych oddziaływań dynamicznych w układzie tor – pojazd szynowy. Na drogach kolejowych nadal jeszcze wykorzystuje się parabolę trzeciego stopnia, będącą uproszczeniem klotoidy, przy czym to uproszczenie, przy obecnych obliczeniowych możliwościach, nie ma już żadnego uzasadnienia.

Wartości przyspieszeń na długości krzywej przejściowej wynikają z rozkładu krzywizny, która powinna być podstawą identyfikacji krzywych przejściowych. W ogólnym ujęciu może być ona liniowa lub nieliniowa. Dla nieliniowej zmiany krzywizny odpowiednio wydaje się, stosowane m.in. przez R.J. Grabowskiego [6], określenie „gładkie krzywe przejściowe”, korespondujące z kluczowym znaczeniem klasy funkcji opisującej krzywiznę. Większość krzywych przejściowych łączy ze sobą wspólny algorytm wyznaczania krzywizny za pomocą równań różniczkowych [16–18, 24].

Należy zauważyć, że istnieje pewna grupa gładkich krzywych przejściowych, które znalazły uznanie na kolei i występują w obowiązujących przepisach projektowania. Mają one długą historię, sięgającą pierwszej połowy XX wieku, jednak zakres ich stosowania jest wciąż ograniczony. W Polsce zostały rozpropagowane w fundamentalnym opracowaniu książkowym H. Bałucha [2]. Przedstawiono tam charakterystyki

¹ Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Transportu Szynowego i Mostów; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

następujących krzywych: paraboli czwartego stopnia, krzywej Blossa, cosinusoidy i sinusoidy. Analiza porównawcza wymienionych krzywych przejściowych była przedmiotem prac [15, 22].

2. Przyjmowanie dopuszczalnych wartości parametrów kinematycznych

Na drogach kolejowych, wzajemne porównanie krzywych przejściowych wymaga dokonania pewnych założeń, dotyczących obowiązujących wartości dopuszczalnych parametrów kinematycznych – przyrostu przyspieszenia ψ i prędkości podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej f . Panuje intuicyjne przeświadczenie, że dla gładkich krzywych przejściowych można przyjąć znacznie większe (nawet podwojone) wartości dopuszczalne niż dla klotoidy (gdzie maksimum wartości ψ i f występuje tylko w części środkowej tych krzywych, a w częściach skrajnych są one znacznie mniejsze). Znalazło to odzwierciedlenie w obowiązujących w Polsce przepisach [26]. Z poglądem tym można jednak polemizować.

Parametry kinematyczne ψ i f na krzywych przejściowych i rampach przechyłkowych można opisać za pomocą następujących ogólnych wzorów:

$$\psi(l) = \frac{a_m V}{3,6} \frac{d}{dl} g(l), \quad (1)$$

$$f(l) = \frac{h_0 V}{3,6} \frac{d}{dl} g(l), \quad (2)$$

gdzie:

V – prędkość jazdy pociągów w km/h,

a_m – przyspieszenie niezrównoważone na łuku kołowym w m/s^2 ,

h_0 – wartość przechyłki na łuku kołowym w mm,

l – zmienna określająca położenie danego punktu na krzywej przejściowej w m,

$g(l)$ – funkcja zmiennej l związana z krzywizną danej krzywej przejściowej (wielkość niemianowana).

Funkcja $g(l)$ zależy od rodzaju krzywej przejściowej. Dla wymienionych krzywych z pracy [2], jeśli oznaczymy ich długości przez l_k , równania $g(l)$ i $\frac{d}{dl} g(l)$ są następujące:

- dla klotoidy:

$$g(l) = \frac{l}{l_k}, \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{1}{l_k};$$

- dla paraboli czwartego stopnia:

$$g(l) = 2 \left(\frac{l}{l_k} \right)^2, \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{4}{l_k} \frac{l}{l_k}, \quad l \in \left\langle 0, \frac{l_k}{2} \right\rangle,$$

$$g(l) = -1 + 4 \frac{l}{l_k} - 2 \left(\frac{l}{l_k} \right)^2, \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{4}{l_k} \left(1 - \frac{l}{l_k} \right),$$

$$l \in \left\langle \frac{l_k}{2}, l_k \right\rangle;$$

- dla krzywej Blossa:

$$g(l) = 3 \left(\frac{l}{l_k} \right)^2 - 2 \left(\frac{l}{l_k} \right)^3, \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{6}{l_k} \left[\frac{l}{l_k} - \left(\frac{l}{l_k} \right)^2 \right];$$

- dla cosinusoidy:

$$g(l) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\pi \frac{l}{l_k} \right), \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{\pi}{2l_k} \sin \left(\pi \frac{l}{l_k} \right);$$

- dla sinusoidy:

$$g(l) = \frac{l}{l_k} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{l}{l_k} \right),$$

$$\frac{d}{dl} g(l) = \frac{1}{l_k} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{l}{l_k} \right) \right].$$

Z równań (1) i (2) wynika, że:

$$3,6 \frac{\psi(l)}{a_m V} = 3,6 \frac{f(l)}{h_0 V} = \frac{d}{dl} g(l), \quad (3)$$

co dla rozpatrywanych krzywych przejściowych prowadzi do następujących zależności:

- dla klotoidy:

$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 1;$$

- dla paraboli czwartego stopnia:

$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 4 \frac{l}{l_k}, \quad l \in \left\langle 0, \frac{l_k}{2} \right\rangle,$$

$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 4 \left(1 - \frac{l}{l_k} \right), \quad l \in \left\langle \frac{l_k}{2}, l_k \right\rangle;$$

- dla krzywej Blossa:

$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 6 \left[\frac{l}{l_k} - \left(\frac{l}{l_k} \right)^2 \right];$$

- dla cosinusoidy:

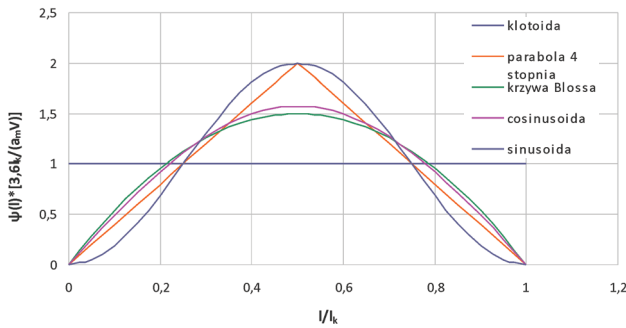
$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = \frac{\pi}{2} \sin \left(\pi \frac{l}{l_k} \right);$$

- dla sinusoidy:

$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 1 - \cos\left(2\pi \frac{l}{l_k}\right).$$

Podane zależności przedstawiono w sposób graficzny na rysunku 1. Wynika z niego jednoznacznie, że przekroczenie wartości ψ i f występujących na klotoidzie nie ma charakteru lokalnego (punktowego), lecz obejmuje co najmniej połowę długości rozpatrywanych gładkich krzywych przejściowych, a wartość tego przekroczenia jest znaczna. Przedziały zmiennej l/l_k , w których występują przekroczenia wartości ψ i f , są następujące:

- dla paraboli czwartego stopnia i sinusoidy – $l/l_k \in (0,25;0,75)$,
- dla krzywej Blossa – $l/l_k \in (0,5 - \sqrt{3}/6; 0,5 + \sqrt{3}/6)$, tj. $l/l_k \in (0,211;0,789)$,
- dla cosinusoidy – $l/l_k \in (\arcsin(2/\pi)/\pi; 1 - \arcsin(2/\pi)/\pi)$, tj. $l/l_k \in (0,22;0,78)$.



Rys. 1. Kształtowanie się wartości $\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} \left(f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} \right)$ na długości rozpatrywanych krzywych przejściowych [opracowanie własne]

Również z tego względu wydaje się właściwe utrzymanie dla wszystkich rodzajów krzywych przejściowych takich samych zasad dotyczących dopuszczalnych wartości parametrów kinematycznych. Założenie jednakowych wartości ψ_{dop} i f_{dop} prowadzi do konieczności wydłużenia poszczególnych gładkich krzywych przejściowych w stosunku do klotoidy (przez wprowadzenie odpowiedniego współczynnika A , wynikającego z wartości przekroczenia ψ i f w środku krzywej). Staje się wówczas możliwe wzajemne porównanie rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej. Wartości współczynnika A wynoszą:

- dla paraboli czwartego stopnia $A = 2$,
- dla krzywej Blossa $A = 3/2$,
- dla cosinusoidy $A = \pi/2$,
- dla sinusoidy $A = 2$.

3. Rzędne poziome i rzędne rampy przechyłkowej w rejonie początkowym

W pracy [18] przedstawiono analizę rozpatrywanych postaci gładkich krzywych przejściowych. Dokonano identyfikacji krzywizny $k(l)$ dla poszczególnych krzywych za pomocą równań różniczkowych oraz wyznaczono równania parametryczne $x(l)$ i $y(l)$ i przedstawiono zestawienie tych równań:

- dla klotoidy:

$$k(l) = \frac{1}{Rl_k} l, \quad (4)$$

$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2 l_k^2} l^5 + \frac{1}{3456R^4 l_k^4} l^9 - \frac{1}{599040R^6 l_k^6} l^{13}, \quad (5)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k} l^3 - \frac{1}{336R^3 l_k^3} l^7 + \frac{1}{42240R^5 l_k^5} l^{11}; \quad (6)$$

- dla paraboli czwartego stopnia:

– w przedziale $l \in \left\langle 0, \frac{l_k}{2} \right\rangle$:

$$k(l) = \frac{2}{Rl_k^2} l^2, \quad (7)$$

$$x(l) = l - \frac{2}{63R^2 l_k^4} l^7 + \frac{2}{3159R^4 l_k^8} l^{13} - \frac{4}{623295R^6 l_k^{12}} l^{19}, \quad (8)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k^2} l^4 - \frac{2}{405R^3 l_k^6} l^{10} + \frac{1}{1458R^5 l_k^{10}} l^{16}; \quad (9)$$

– w przedziale $l \in \left\langle \frac{l_k}{2}, l_k \right\rangle$:

$$k(l) = -\frac{1}{R} + \frac{4}{Rl_k} l - \frac{2}{Rl_k^2} l^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x(l) = & x\left(\frac{l_k}{2}\right) + \cos\left(\frac{l_k}{12R}\right) \left(l - \frac{l_k}{2}\right) - \frac{1}{4R} \sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) \left(l - \frac{l_k}{2}\right)^2 \\ & - \left[\frac{1}{24R^2} \cos\left(\frac{l_k}{12R}\right) + \frac{1}{3Rl_k} \sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) \right] \left(l - \frac{l_k}{2}\right)^3 \\ & + \left[\left(\frac{1}{192R^3} + \frac{1}{6Rl_k^2} \right) \sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) - \frac{1}{8R^2 l_k} \cos\left(\frac{l_k}{12R}\right) \right] \left(l - \frac{l_k}{2}\right)^4 \\ & - \left[\frac{1}{40R^3 l_k} \sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) + \left(\frac{1}{1920R^4} - \frac{1}{30R^2 l_k^2} \right) \cos\left(\frac{l_k}{12R}\right) \right] \left(l - \frac{l_k}{2}\right)^5, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
y(l) = & y\left(\frac{l_k}{2}\right) - \sin\left(\frac{l_k}{12R}\right)\left(l - \frac{l_k}{2}\right) + \frac{1}{4R}\cos\left(\frac{l_k}{12R}\right)\left(l - \frac{l_k}{2}\right)^2 \\
& - \left[\frac{1}{24R^2}\sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) - \frac{1}{3Rl_k}\cos\left(\frac{l_k}{12R}\right)\right]\left(l - \frac{l_k}{2}\right)^3 \\
& - \left[\left(\frac{1}{192R^3} - \frac{1}{6Rl_k^2}\right)\cos\left(\frac{l_k}{12R}\right) + \frac{1}{8R^2l_k}\sin\left(\frac{l_k}{12R}\right)\right]\left(l - \frac{l_k}{2}\right)^4 \\
& + \left[\left(\frac{1}{1920R^4} - \frac{1}{30R^2l_k^2}\right)\sin\left(\frac{l_k}{12R}\right) - \frac{1}{40R^3l_k}\cos\left(\frac{l_k}{12R}\right)\right]\left(l - \frac{l_k}{2}\right)^5;
\end{aligned} \quad (12)$$

- dla krzywej Blossa:

$$k(l) = \frac{3}{Rl_k^2}l^2 - \frac{2}{Rl_k^3}l^3, \quad (13)$$

$$x(l) = l - \frac{1}{14R^2l_k^4}l^7 + \frac{1}{16R^2l_k^5}l^8 - \frac{1}{72R^2l_k^6}l^9, \quad (14)$$

$$y(l) = \frac{1}{4Rl_k^2}l^4 - \frac{1}{10Rl_k^3}l^5 - \frac{1}{60R^3l_k^6}l^{10} + \frac{1}{44R^3l_k^7}l^{11}; \quad (15)$$

- dla cosinusoidy:

$$k(l) = \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R}\cos\left(\frac{\pi}{l_k}l\right), \quad (16)$$

$$x(l) = l - \frac{\pi^4}{2016R^2l_k^4}l^7 + \frac{\pi^6}{25920R^2l_k^6}l^9 - \frac{41\pi^8}{26611200R^2l_k^8}l^{11}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
y(l) = & \frac{\pi^2}{40Rl_k^2}l^4 - \frac{\pi^4}{1440Rl_k^4}l^6 + \frac{\pi^6}{80640Rl_k^6}l^8 - \\
& + \frac{1}{10}\left(\frac{\pi^6}{10368R^3l_k^6} + \frac{\pi^8}{725760Rl_k^8}\right)l^{10}
\end{aligned} \quad ; \quad (18)$$

- dla sinusoidy:

$$k(l) = \frac{1}{Rl_k}l - \frac{1}{2\pi R}\sin\left(\frac{2\pi}{l_k}l\right), \quad (19)$$

$$x(l) = l - \frac{\pi^4}{648R^2l_k^6}l^9 + \frac{\pi^6}{2970R^2l_k^8}l^{11} - \frac{29\pi^8}{737100R^2l_k^{10}}l^{13}, \quad (20)$$

$$y(l) = \frac{\pi^2}{30Rl_k^3}l^5 - \frac{\pi^4}{315Rl_k^5}l^7 + \frac{\pi^6}{5670Rl_k^7}l^9 - \frac{\pi^8}{155925Rl_k^9}l^{11}. \quad (21)$$

Teoretyczne analizy oraz badania eksperymentalne, m.in. [15–17, 22] jednoznacznie wskazują na mniejsze (więc korzystniejsze) oddziaływania dynamiczne podczas przejazdu pociągu po gładkich krzywych przejściowych. Jednak pomimo swoich bezspornych zalet, zakres stosowania tych krzywych w eksploatowanych torach kolejowych jest w znacznym stopniu ograniczony. Panuje bowiem opinia, że ich poprawne wytyczenie w terenie jest bardzo utrudnione ze względu na bardzo małe wartości rzędnych poziomych (i rzędnych rampy przechyłkowej) w rejonie początkowym. Wynikają one z nadmiernego wyłagodzenia wykresu krzywizny w tym rejonie. W praktyce prowadzi to do skrócenia wykonanej krzywej przejściowej (czyli wydłużenia przylegającej prostej), w stosunku do założeń projektowych. Jak się wydaje, temu właśnie zagadnieniu należałoby się przyjrzeć bliżej.

W analizie porównawczej rozpatrzono dwa układy geometryczne krzywych przejściowych dla prędkości $V = 160$ km/h, których charakterystykę zawiera tabela 1. Przyjęto następujące wartości dopuszczalne parametrów kinematycznych: przyspieszenia niezrównoważonego na łuku kołowym $a_{dop} = 0,85$ m/s², przyrostu przyspieszenia $\psi_{dop} = 0,3$ m/s³ oraz prędko-

Tabela 1

Zestawienie wartości charakterystycznych dla rozpatrywanych krzywych przejściowych

Układ	R [m]	h ₀ [mm]	a _m [m/s ²]	Rodzaj krzywej przejściowej	l _k [m]	ψ _{max} [m/s ³]	f _{max} [mm/s]
I	1850	60	0,675	Klotoida	100	0,300	26,67
				Parabola 4. stopnia	200	0,300	26,67
				Krzywa Blossa	150	0,300	26,67
				Cosinusoida	158	0,298	26,51
				Sinusoida	200	0,300	26,67
II	1250	115	0,828	Klotoida	183	0,201	27,93
				Parabola 4. stopnia	365	0,201	28,01
				Krzywa Blossa	274	0,201	27,98
				Cosinusoida	287	0,201	27,97
				Sinusoida	365	0,201	28,01

[Opracowanie własne].

Tablica 2

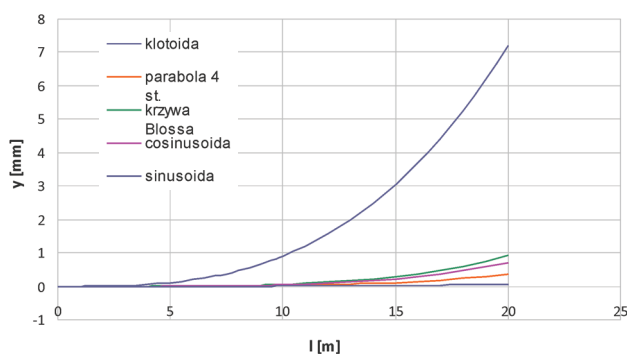
Wartości rzędnych poziomych y [mm] krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m

L [m]	Klotoida	Parabola 4. stopnia	Krzywa Blossa	Cosinusoida	Sinusoida
0	0	0	0	0	0
2	0,0072	0,00004	0,00010	0,00007	0,000001
4	0,0577	0,00058	0,00152	0,00114	0,00002
6	0,1946	0,00292	0,00766	0,00577	0,00017
8	0,4613	0,00293	0,02408	0,01822	0,00073
10	0,9009	0,02252	0,05846	0,04446	0,00222
12	1,5568	0,04670	0,12056	0,09214	0,00551
14	2,4721	0,08652	0,22211	0,17059	0,01190
16	3,6901	0,14760	0,37682	0,29080	0,02317
18	5,2541	0,23643	0,60022	0,46538	0,04168
20	7,2072	0,36036	0,90971	0,70860	0,07047

[Opracowanie własne].

kości podnoszenia koła na rampie przechyłkowej $f_{dop} = 28$ mm/s. W pierwszym układzie ($R = 1850$ m, $h_0 = 60$ mm) starano się uzyskać możliwie jak najmniejszą długość krzywej przejściowej dzięki zastosowaniu stosunkowo niewielkiej przechyłki na łuku kołowym (im większa długość krzywej, tym mniejsze będą wartości rzędnych poziomych). W drugim układzie ($R = 1250$ m, $h_0 = 115$ mm) zmniejszono promień łuku R , co spowodowało konieczność wprowadzenia większej przechyłki i w konsekwencji doprowadziło do zwiększenia długości krzywych przejściowych.

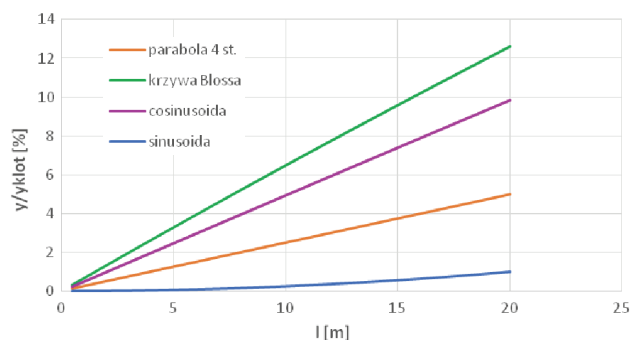
W tablicy 2 podano wartości rzędnych poziomych krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m. Odpowiednią ilustracją graficzną stanowi rysunek 2. Na rysunku 3 pokazano procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych gładkich krzywych przejściowych do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym.



Rys. 2. Wykresy rzędnych poziomych krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m [opracowanie własne]

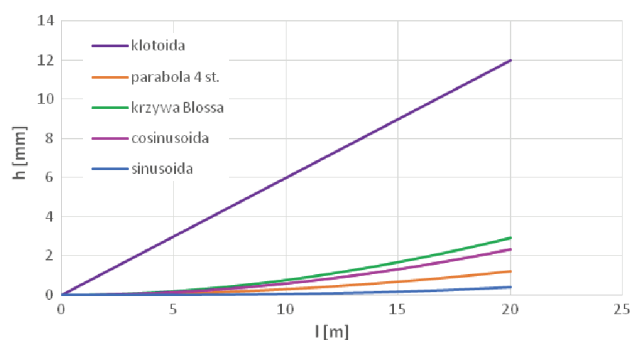
Jak widać, w rozpatrywanym przypadku rzędne poziome gładkich krzywych przejściowych w rejonie początkowym są bardzo małe. Na pierwszych 10 m wynoszą one ułamek milimetra, na 20 m nie osiągają jeszcze

1 mm (dla sinusoidy 0,1 mm). Trudno sobie wyobrazić praktyczne wykonanie tych krzywych przejściowych, a zwłaszcza sinusoidy, której rzędna dla $l = 20$ m stanowi zaledwie 1% rzędnej klotoidy (rys. 3).



Rys. 3. Procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych gładkich krzywych przejściowych do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym dla układu I w tablicy 1 [opracowanie własne]

Przedstawione uwagi odnoszą się także do rampy przechyłkowej. W tablicy 3 podano wartości rzędnych rampy przechyłkowej na krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m, a na rysunku 4 przedstawiono odpowiednią ilustrację graficzną.



Rys. 4. Wykresy rzędnych rampy przechyłkowej na krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m [opracowanie własne]

Tablica 3

Wartości rzędnych rampy przechyłkowej h [mm] na krzywych przejściowych z układu I w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m

L [m]	Klotoida	Parabola 4. stopnia	Krzywa Blossa	Cosinusoida	Sinusoida
0	0	0	0	0	0
2	1,2000	0,0120	0,0317	0,0237	0,0004
4	2,4000	0,0480	0,1257	0,0948	0,0032
6	3,6000	0,1080	0,2803	0,2132	0,0106
8	4,8000	0,1920	0,4938	0,3787	0,0252
10	6,0000	0,3000	0,7644	0,5911	0,0491
12	7,2000	0,4320	1,0906	0,8499	0,0847
14	8,4000	0,5880	1,4704	1,1549	0,1341
16	9,6000	0,7680	1,9024	1,5054	0,1996
18	10,8000	0,9720	2,3846	1,9010	0,2832
20	12,0000	1,2000	2,9156	2,3410	0,3871

[Opracowanie własne].

Tablica 4

Wartości rzędnych poziomych y [mm] krzywych przejściowych z układu II w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m

L [m]	Klotoida	Parabola 4. stopnia	Krzywa Blossa	Cosinusoida	Sinusoida
0	0	0	0	0	0
2	0,00583	0,00002	0,00004	0,00003	0,0000002
4	0,04663	0,00026	0,00068	0,00051	0,0000055
6	0,15738	0,00130	0,00342	0,00251	0,000042
8	0,37304	0,00410	0,01078	0,00818	0,000177
10	0,72860	0,01001	0,02625	0,01996	0,00054
12	1,25902	0,02075	0,05427	0,04139	0,00134
14	1,99927	0,03845	0,10025	0,07666	0,00291
16	2,98433	0,06559	0,17051	0,13074	0,00566
18	4,24918	0,10506	0,27230	0,20937	0,01020
20	5,82878	0,16013	0,41379	0,31901	0,01727

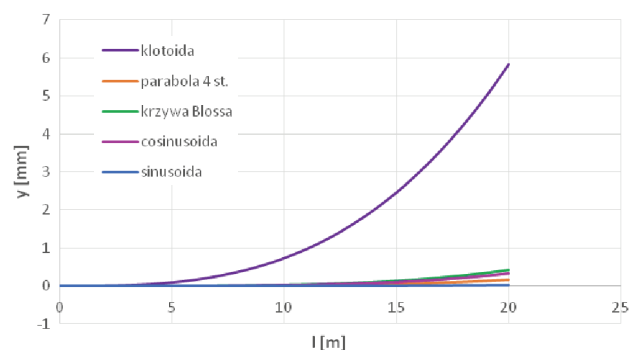
[Opracowanie własne].

Na odcinku pierwszych 10 m, rzędne rampy przechyłkowej w żadnym przypadku nie przekraczają wartości 1 mm. Po 20 m osiągają prawie 3 mm dla krzywej Blossa, około 2,5 mm zaś dla cosinusoidy. Najmniejsze wartości rzędnych rampy przechyłkowej występują na sinusoidzie – po 20 m jest to około 0,4 mm.

Obliczone wartości rzędnych poziomych dla drugiego rozpatrywanego przypadku, czyli dla układu II w tablicy 1, zawiera tablica 4. Wykresy tych rzędnych przedstawiono na rysunku 5. Na rysunku 6 pokazano procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych gładkich krzywych przejściowych do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym.

Jak widać, dla układu II w tablicy 1 (tj. $R = 1250$ m, $h_0 = 115$ mm) sytuacja wygląda jeszcze gorzej niż dla układu I ($R = 1850$ m, $h_0 = 60$ mm). Rzędne poziome gładkich krzywych przejściowych w rejonie początkowym są bardzo małe; po 20 m nie osiągają one nawet 0,5 mm (dla sinusoidy 0,02 mm). Pokazany na rysunku 6 stosunek rzędnych poziomych w odniesieniu do klotoidy po 20 m osiąga wartość 7% dla krzywej Bloss-

sa, podczas gdy dla sinusoidy jest to zaledwie 0,3%. Jest to niewątpliwie spowodowane zastosowaniem dłuższych krzywych przejściowych, co wynikało z większej wartości przechyłki na łuku kołowym i koniecznością zachowania wartości f_{dop} .



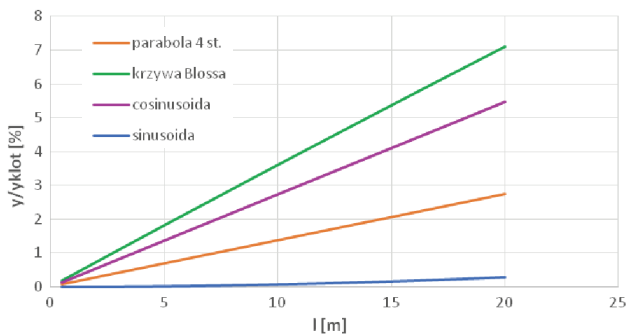
Rys. 5. Wykresy rzędnych poziomych krzywych przejściowych z układu II w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m [opracowanie własne]

Tablica 5

Wartości rzędnych rampy przechyłkowej h [mm] na krzywych przejściowych z układu II w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m

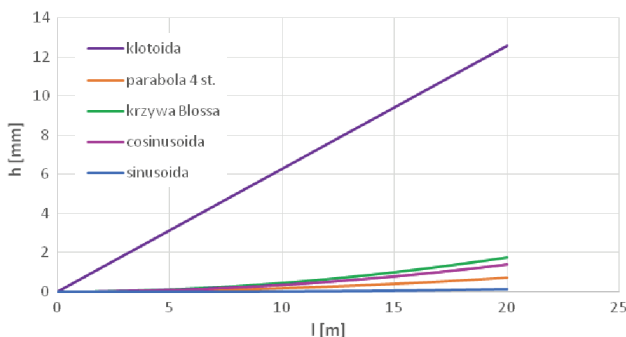
L [m]	Klotoida	Parabola 4. stopnia	Krzywa Blossa	Cosinusoida	Sinusoida
0	0	0	0	0	0
2	1,2568	0,0069	0,0183	0,0138	0,00012
4	2,5137	0,0276	0,0728	0,0551	0,0010
6	3,7705	0,0622	0,1630	0,1240	0,0034
8	5,0273	0,1105	0,2884	0,2203	0,0080
10	6,2842	0,1726	0,4484	0,3441	0,0155
12	7,5410	0,2486	0,6424	0,4954	0,0268
14	8,7978	0,3384	0,8700	0,6739	0,0426
16	10,0546	0,4420	1,1306	0,8796	0,0635
18	11,3115	0,5594	1,4237	1,1125	0,0903
20	12,5683	0,6906	1,7487	1,3725	0,1238

[Opracowanie własne].



Rys. 6. Procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych gładkich krzywych przejściowych do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym dla układu II w tablicy 1 [opracowanie własne]

W tablicy 5 podano wartości rzędnych rampy przechyłkowej na krzywych przejściowych z układu II w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m, a na rysunku 7 przedstawiono odpowiednią ilustrację graficzną.



Rys. 7. Wykresy rzędnych rampy przechyłkowej na krzywych przejściowych z układu II w tablicy 1 na odcinku pierwszych 20 m [opracowanie własne]

Jak wynika z tablicy 4, rzędne rampy przechyłkowej na gładkich krzywych przejściowych są w przybliżeniu dwa razy mniejsze niż w układzie I, mimo

że przechyłka na łuku kołowym wynosi $h_0 = 115$ mm (poprzednio była równa $h_0 = 60$ mm). Na odcinku pierwszych 10 m rzędne rampy przechyłkowej na tych krzywych nie przekraczają wartości 0,5 mm, a po 20 m są mniejsze niż 2 mm. Najmniejsze wartości rzędnych rampy przechyłkowej występują, tak jak poprzednio, na sinusoidzie i po 20 m są niewiele większe niż 0,1 mm.

Chociaż analiza miała charakter wrywkowy, to nasuwające się z niej wnioski wydają się być jednoznaczne. W większości przypadków prawidłowe ukształtowanie początkowego rejonu gładkich krzywych przejściowych jest bardzo utrudnione, a niekiedy wręcz niemożliwe. Rzędne poziome o wartości ułamka milimetra mogą stanowić poważny problem zarówno w wykonaniu, jak i późniejszym utrzymaniu (zwłaszcza w nawierzchni podsypkowej).

Ponieważ występujące na gładkich krzywych przejściowych wyłagodzenie rejonu początkowego prowadzi do bardzo małych wartości rzędnych poziomych, ewentualna modyfikacja nie powinna w tym rejonie odbiegać zbyt od kształtu klotoidy (której rzędne też nie są zbyt duże). Powinna natomiast objąć rejon środkowy krzywej przejściowej (przez wprowadzenie krzywizny nieliniowej) oraz rejon wejścia w łuk kołowy. Oczywiście, należy też dążyć do uzyskania możliwie jak najmniejszej długości nowego rozwiązania w porównaniu z długością krzywej bazowej (klotoidy).

4. Propozycja nowej krzywej przejściowej dla dróg kolejowych

Z ogólnej metody identyfikacji krzywizny $k(l)$ na krzywych przejściowych [17] wynika, że dla promienia R łuku kołowego oraz długości l_k krzywej przej-

ściowej przyjęte założenia wyznaczają następujące warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(0) = 0, & k(l_k) = \frac{1}{R}, \\ k'(0) = \frac{C}{Rl_k}, & k'(l_k) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

oraz równanie różniczkowe:

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (23)$$

przy czym współczynnik liczbowy $C \geq 0$. Warunki (22) dla $C = 0$ dotyczą krzywej Blossa. W wyniku rozwiązania problemu różniczkowego (22), (23) otrzymuje się ogólne równanie krzywizny:

$$k(l) = \frac{C}{Rl_k} l - \frac{2C-3}{Rl_k^2} l^2 + \frac{C-2}{Rl_k^3} l^3. \quad (24)$$

Szczegółowa analiza przeprowadzona w pracy [20] i w referacie na konferencję INFRASZYN 2019 [21] wykazała, że najkorzystniejsze rozwiązanie występuje przy wartości współczynnika $C = 1$, ponieważ dla tego przypadku długość odpowiadającej krzywej przejściowej musi być większa od długości klotoidy tylko o 1/3. Przyjęcie $C = 1$ prowadzi do następującego równania funkcji $k(l)$:

$$k(l) = \frac{1}{Rl_k} l + \frac{1}{Rl_k^2} l^2 - \frac{1}{Rl_k^3} l^3. \quad (25)$$

Jak widać, pierwszy człon równania (25) przyjmuje postać liniową, stanowiąc krzywiznę klotoidy. Dwa pozostałe człony mają charakter nieliniowy – występują w drugiej i trzeciej potęgde, czyli analogicznie jak ma to miejsce w przypadku krzywej Blossa. Kąt nachylenia stycznej $\Theta(l)$ jest opisany równaniem:

$$\Theta(l) = \frac{1}{2Rl_k} l^2 + \frac{1}{3Rl_k^2} l^3 - \frac{1}{4Rl_k^3} l^4. \quad (26)$$

przy czym na końcu krzywej przejściowej jego wartość wynosi $\Theta(l_k) = \frac{7}{12R} l_k$. Znajomość tego kąta pozwala zachować zgodność stycznych w połączeniu z następnym elementem geometrycznym. Równania współrzędnych szukanej krzywej przejściowej można zapisać w postaci parametrycznej [17]:

$$x(l) = \int \cos \Theta(l) dl, \quad (27)$$

$$y(l) = \int \sin \Theta(l) dl. \quad (28)$$

Do rozwinięcia funkcji $\cos \Theta(l)$ i $\sin \Theta(l)$ w szereg Maclaurina wykorzystano program Maxima [23], a następnie scałkowano poszczególne wyrazy, otrzymując równania parametryczne:

$$x(l) = l - \frac{1}{40R^2l_k^2} l^5 - \frac{1}{36R^2l_k^3} l^6 + \frac{5}{504R^2l_k^4} l^7 + \frac{1}{96R^2l_k^5} l^8 + \left(\frac{1}{3456R^4l_k^4} - \frac{1}{288R^2l_k^6} \right) l^9, \quad (29)$$

$$y(l) = \frac{1}{6Rl_k} l^3 + \frac{1}{12Rl_k^2} l^4 - \frac{1}{20Rl_k^3} l^5 + \frac{1}{336R^3l_k^3} l^7 - \frac{1}{192R^3l_k^4} l^8 + \frac{1}{2592R^3l_k^5} l^9. \quad (30)$$

Na początku równania (29) i (30) zachowują zgodność z równaniami parametrycznymi klotoidy. Takie same jak w równaniu (29) są dwa pierwsze wyrazy z równania (5), zaś pierwszy wyraz z równania (30) jest identyczny jak pierwszy wyraz z równania (6).

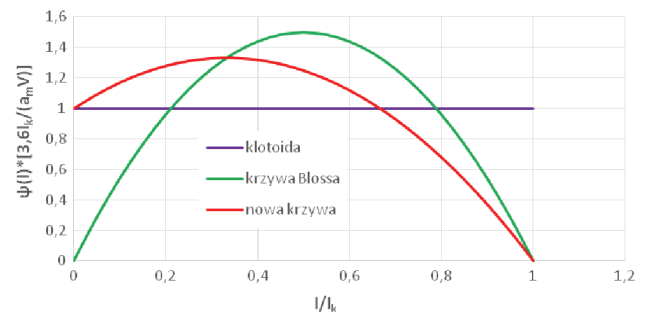
Dla wyznaczonej krzywej przejściowej równania funkcji $g(l)$ i $\frac{d}{dl} g(l)$ są następujące:

$$g(l) = \frac{l}{l_k} + \left(\frac{l}{l_k} \right)^2 - \left(\frac{l}{l_k} \right)^3, \quad \frac{d}{dl} g(l) = \frac{1}{l_k} \left[1 + 2 \frac{l}{l_k} - 3 \left(\frac{l}{l_k} \right)^2 \right],$$

stąd:

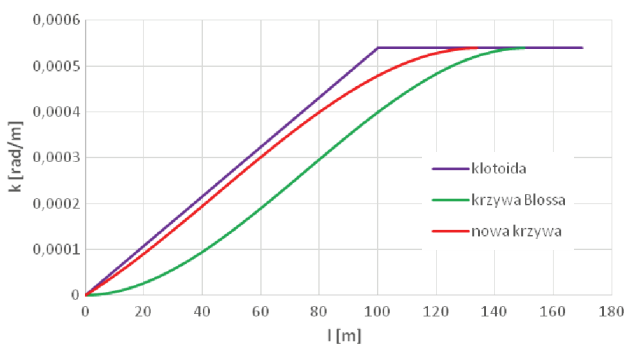
$$\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V} = 1 + 2 \frac{l}{l_k} - 3 \left(\frac{l}{l_k} \right)^2.$$

Kształtowanie się wartości $\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V}$, na długości nowej krzywej przejściowej na tle klotoidy i krzywej Blossa, przedstawiono na rysunku 8.

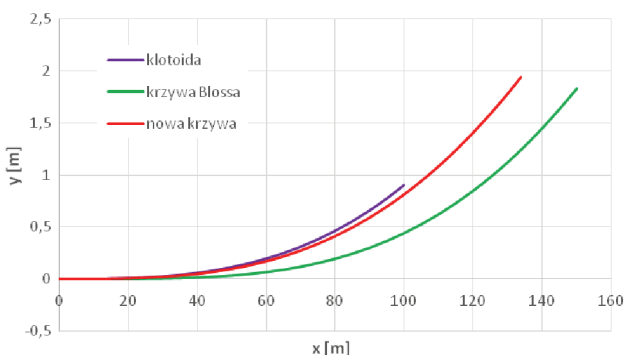


Rys. 8. Kształtowanie się wartości $\psi(l) \cdot \frac{3,6l_k}{a_m V} = f(l) \cdot \frac{3,6l_k}{h_0 V}$ na długości klotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej [opracowanie własne]

Przekroczenie wartości ψ i f występujących na klotoidzie ma miejsce dla $l/l_k \in (0; 0,667)$. Wydłużenie opisanej krzywej w stosunku do klotoidy, wynikające z największej wartości przekroczenia ψ i f , określa współczynnik $A = 4/3$. Na rysunku 9 pokazano wykresy krzywizny na długości klotoidy i krzywej Blossa w układzie geometrycznym oznaczonym jako układ I (tabl. 1) oraz na długości nowej krzywej przejściowej o odpowiadającej długości $l_k = 134$ m. Na rysunku 10 przedstawiono wykresy rzędnych poziomych dla wymienionych krzywych.



Rys. 9. Wykresy krzywizny na długości klotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej w układzie I z tablicy 1 [opracowanie własne]



Rys. 10. Wykresy rzędnych poziomych na długości klotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej w układzie I z tablicy 1 (w skali skażonej) [opracowanie własne]

Jak wynika z rysunku 9, wykres krzywizny dla wyznaczonej nowej krzywej przejściowej znacząco odbiega od wykresu krzywizny dla krzywej Blossa. Dotyczy to zwłaszcza strefy początkowej, w której ta różnica kształtuje się i sprawia, że opisane krzywe tak bardzo od siebie odbiegają. Natomiast przebieg wykresu krzywizny dla nowej krzywej jest na znacznej długości zbliżony (choć nieco korzystniejszy) do wykresu krzywizny dla klotoidy. Dopiero w rejonie końcowym, przy przejściu z krzywej przejściowej na łuk kołowy, uwidacznia się znaczna różnica: wykres krzywizny dla nowej krzywej jest tam dużo łagodniejszy.

Należy zauważyć, że wyznaczona krzywa przejściowa nie zapewnia płynnego przejścia z prostej na krzywą przejściową, gdyż w jej punkcie początkowym wystę-

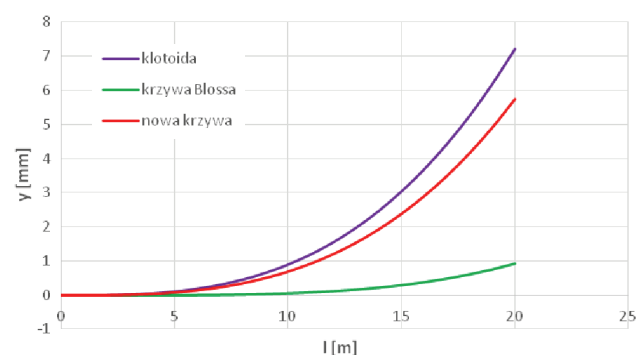
puje załom na wykresie krzywizny (rys. 9). Nie można jej zatem zakwalifikować do kategorii klasycznych gładkich krzywych przejściowych. Ponieważ jest ona od tych krzywych krótsza i powstała z myślą o spełnieniu wymagań wykonawczych, nie ulega wątpliwości jej większa praktyczna przydatność. Potwierdzić to może szczegółowa analiza rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym.

5. Analiza wartości rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym nowej krzywej przejściowej

Aby ocenić wartości rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym nowej krzywej przejściowej, rozpatrzono jak w rozdziale 3, odcinek pierwszych 20 m. W analizie uwzględniono dwie krzywe z tablicy 1 – klotoidę i krzywą Blossa, na ich tle zaś nową krzywą przejściową. Odpowiednie wartości liczbowe zawiera tablica 6.

Na rysunku 11 przedstawiono wykresy rzędnych poziomych wymienionych krzywych przejściowych na odcinku pierwszych 20 m w układzie I (czyli dla prędkości $V = 160$ km/h i promienia $R = 1850$ m). Na rysunku 12 pokazano procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych tych krzywych do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym.

Jak widać, w rozpatrywanym przypadku rzędne poziome krzywej Blossa reprezentującej gładkie krzywe przejściowe w rejonie początkowym są niewielkie, co wynika z rysunku 2. Po 20 m nie osiągają one nawet 1 mm. Stosunek procentowy rzędnych tej krzywej w odniesieniu do klotoidy zmienia się od 1% do niespełna 13%, podczas gdy dla nowej krzywej przejściowej wynosi od 75 do 80%. Możliwości realizacyjne w tej strefie nowej krzywej przejściowej nie różnią się zatem zbytnio od analogicznych możliwości w odniesieniu do klotoidy.



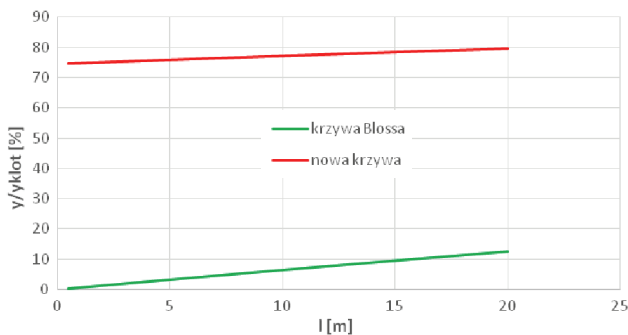
Rys. 11. Wykresy rzędnych poziomych klotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej na odcinku pierwszych 20 m w układzie I [opracowanie własne]

Tablica 6

Wybrane wartości rzędnych poziomych y [mm] i rzędnych rampy przechyłkowej h [mm] w rejonie początkowym wybranych krzywych przejściowych

Układ I		V = 160 km/h		R = 1850 m		$h_0 = 60$ mm	
		$l = 1$ m	$l = 3$ m	$l = 5$ m	$l = 10$ m	$l = 15$ m	$l = 20$ m
Kłotoida $l_k = 100$ m	y	0,000901	0,024324	0,112613	0,900901	3,040541	7,207208
	h	0,600000	1,800000	3,000000	6,000000	9,000000	12,00000
Krzywa Blossa $l_k = 150$ m	y	0,000006	0,000483	0,003704	0,058458	0,291892	0,909710
	h	0,007964	0,071040	0,195556	0,764444	1,680000	2,915556
Nowa krzywa przejściowa $l_k = 134$ m	y	0,000675	0,018353	0,085572	0,696277	2,387530	5,743949
	h	0,451078	1,372684	2,319226	4,786826	7,384095	10,09233
Układ II		V = 160 km/h		R = 1250 m		$h_0 = 115$ mm	
		$l = 1$ m	$l = 3$ m	$l = 5$ m	$l = 10$ m	$l = 15$ m	$l = 20$ m
Kłotoida $l_k = 183$ m	y	0,000729	0,001967	0,091075	0,728597	2,459016	5,828780
	h	0,628415	1,885246	3,142077	6,284153	9,426230	12,56831
Krzywa Blossa $l_k = 274$ m	y	0,000003	0,000215	0,001653	0,026251	0,131910	0,413790
	h	0,004584	0,041056	0,113486	0,448353	0,996217	1,748690
Nowa krzywa przejściowa $l_k = 244$ m	y	0,000548	0,014844	0,068977	0,557370	1,898860	4,541937
	h	0,473235	1,431105	2,438580	4,898359	7,477565	10,13554

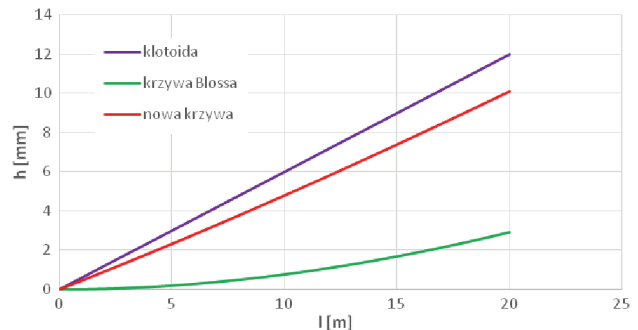
[Opracowanie własne].



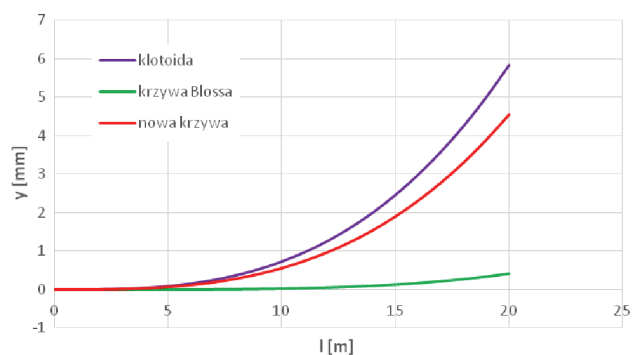
Rys. 12. Procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej do rzędnych kłotoidy w rejonie początkowym układu I [opracowanie własne]

Przedstawione uwagi odnoszą się również do rampy przechyłkowej (rys. 13). Rzędne rampy przechyłkowej dla krzywej Blossa są znacznie mniejsze niż odpowiadające wartości dla kłotoidy i nowej krzywej przejściowej i w praktyce niemożliwe do praktycznej realizacji na odcinku pierwszych 10 m.

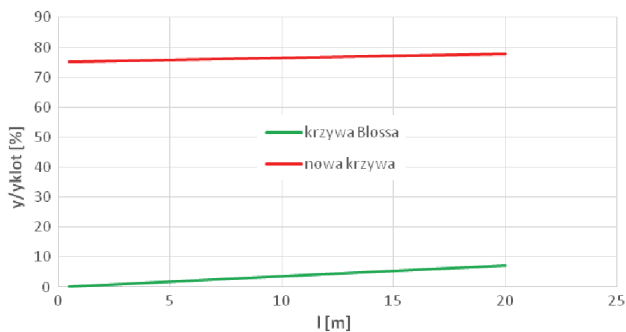
Wykresy rzędnych poziomych dla układu II, czyli dla prędkości $V = 160$ km/h i promienia $R = 1250$ m, przedstawiono na rysunku 14. Na rysunku 15 pokazano procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych tych krzywych do rzędnych kłotoidy w rejonie początkowym, zaś wykresy rzędnych rampy przechyłkowej na rysunku 16.



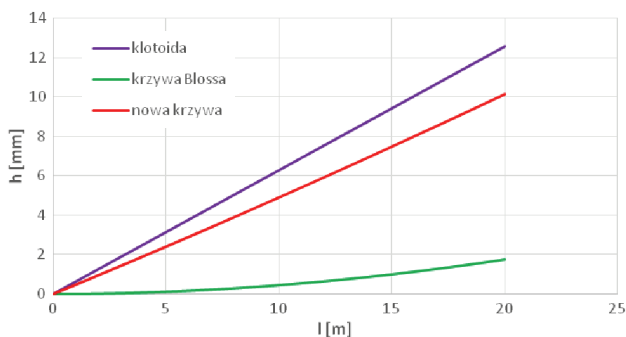
Rys. 13. Wykresy rzędnych rampy przechyłkowej dla kłotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej na odcinku pierwszych 20 m układu I [opracowanie własne]



Rys. 14. Wykresy rzędnych poziomych kłotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej na odcinku pierwszych 20 m w układzie II [opracowanie własne]



Rys. 15. Procentowe wartości stosunku rzędnych poziomych krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej do rzędnych klotoidy w rejonie początkowym układu II [opracowanie własne]



Rys. 16. Wykresy rzędnych rampy przechyłkowej dla klotoidy, krzywej Blossa i nowej krzywej przejściowej na odcinku pierwszych 20 m w układzie II [opracowanie własne]

Jak widać, dla prędkości $V = 160$ km/h i promienia $R = 1850$ m, rzędne poziome w rejonie początkowym są jeszcze mniejsze niż w poprzednim przypadku. Rzędne poziome krzywej Blossa na 20 m nie osiągną nawet 0,5 mm, a rzędne rampy przechyłkowej są również bardzo małe. Odpowiadające wartości dla nowej krzywej przejściowej są niewiele mniejsze niż dla klotoidy.

Tak więc, dla krzywej Blossa praktyczna realizacja i następnie utrzymanie bardzo małych wartości rzędnych poziomych i rzędnych rampy przechyłkowej w rejonie początkowym nie wydają się możliwe. Natomiast możliwości realizacyjne strefy początkowej nowej krzywej przejściowej są analogiczne jak dla klotoidy.

Zaprezentowana nowa krzywa przejściowa mogłaby z powodzeniem konkurować z powszechnie obecnie stosowaną krzywą przejściową w postaci klotoidy. Jest ona do niej podobna w rejonie początkowym, natomiast różni się istotnie na dalszej długości, a zwłaszcza w rejonie końcowym, gdzie zapewnia łagodne wejście z krzywej przejściowej w łuk kołowy. Stwarza to znaczną przewagę przedstawionego w artykule nowego rozwiązania geometrycznego z punktu widzenia właściwości dynamicznych w układzie tor – pojazd szynowy.

6. Podsumowanie

Na drogach kolejowych wzajemne porównanie krzywych przejściowych wymaga dokonania pewnych założeń dotyczących obowiązujących wartości dopuszczalnych parametrów kinematycznych – przyspieszenia ψ i prędkości podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej f . Panuje bowiem intuicyjne przeświadczenie, że dla krzywych o nieliniowej zmianie krzywizny na długości (czyli tzw. gładkich krzywych przejściowych) można przyjąć znacznie większe (nawet podwojone) wartości dopuszczalne niż dla klotoidy (o liniowym przebiegu krzywizny). Znalazło to nawet swój wyraz w obowiązujących przepisach. W niniejszym artykule jednoznacznie wykazano, że na gładkich krzywych przejściowych przekroczenie wartości ψ i f występujących na klotoidzie nie ma charakteru lokalnego (punktowego), lecz obejmuje co najmniej połowę ich długości, a wartość tego przekroczenia jest znaczna. Z tego względu, wydaje się właściwe utrzymanie dla wszystkich rodzajów krzywych przejściowych takich samych zasad dotyczących dopuszczalnych wartości parametrów kinematycznych.

Gładkie krzywe przejściowe są znane od dawna i mają wiele bezspornych zalet – przede wszystkim cechują je mniejsze wartości oddziaływań dynamicznych niż ma to miejsce dla klotoidy. Zakres ich stosowania na drogach kolejowych jest jednak, jak dotąd bardzo ograniczony. Krzywe te, niestety, mają jedną, zasadniczą wadę – bardzo małe wartości rzędnych poziomych (i rzędnych rampy przechyłkowej) w rejonie początkowym, w praktyce często niemożliwe do realizacji i następnie utrzymania. Znalazło to pełne potwierdzenie w analizie problemu przeprowadzonej w niniejszym artykule.

Uznano zatem, że podstawową przyczyną występujących problemów odnoszących się do gładkich krzywych przejściowych stanowi nadmierne wyłagodzenie krzywizny w ich rejonie początkowym. Wykorzystując metodę identyfikacji krzywizny za pomocą równań różniczkowych, uzyskano nową postać krzywej przejściowej, rezygnując przy tym z warunku zerowania się pochodnej krzywizny w punkcie początkowym.

Wyznaczona nowa krzywa przejściowa charakteryzuje się łagodnym przebiegiem krzywizny w rejonie wejścia w łuk kołowy oraz jej pewnym zaburzeniem w rejonie początkowym (mniejszym jednak niż w przypadku klotoidy). Wykazano zdecydowaną przewagę nowej krzywej (z realizacyjnego punktu widzenia) nad reprezentującą gładkie krzywe przejściowe krzywą Blossa. Możliwości realizacyjne tej krzywej w strefie początkowej nie różnią się zbytnio od analogicznych możliwości w odniesieniu do klotoidy.

Jak wydaje się, zaprezentowana nowa krzywa przejściowa mogłaby konkurować z powszechnie stosowaną obecnie krzywą przejściową w postaci kłotoidy. Jest ona do niej podobna w rejonie początkowym, natomiast istotnie różni się na dalszej długości, a zwłaszcza w rejonie końcowym, gdzie zapewnia łagodne wejście z krzywej przejściowej w łuk kołowy. Stwarza to znaczną przewagę przedstawionego w artykule nowego rozwiązania geometrycznego z punktu widzenia właściwości dynamicznych w układzie tor – pojazd szynowy.

Kwestie opisane w niniejszym artykule wydają się być o tyle istotne, że inne możliwości poprawy istniejącej sytuacji są w znacznym stopniu ograniczone. Wykazany brak możliwości praktycznej realizacji i utrzymania rzędnych krzywej przejściowej i rzędnych rampy przechylkowej w rejonie początkowym, w dużym stopniu podważa bowiem celowość stosowania klasycznych gładkich krzywych przejściowych na liniach kolejowych.

Literatura

1. Arslan A. et.al.: *Transition curve modeling with kinematical properties: research on log-aesthetic curves*, Computer-Aided Design and Applications, Taylor & Francis Online, 2014, vol. 11, no. 5, pp. 509–517.
2. Bałuch H.: *Optymalizacja układów geometrycznych toru*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1983.
3. Baykal O. et.al.: *New transition curve joining two straight lines*, Journal of Transportation Engineering, ASCE, 1997, vol. 123, no. 5, pp. 337–345.
4. Bosurgi G., D'Andrea A.: *A polynomial parametric curve (PPC-CURVE) for the design of horizontal geometry of highways*, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, Wiley Online, 2012, vol. 27, no. 4, pp. 303–312.
5. Cai H., Wang G.: *A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter*, Journal of Zhejiang University SCIENCE A, vol. 10, no. 4/2009, Springer, pp. 562–569.
6. Grabowski R. J.: *Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych*, Zeszyty Naukowe AGH, Kraków, z. 82/1984.
7. Habib Z., Sakai M.: *G² Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control*, Computer Aided Geometric Design, Elsevier, 2007, vol. 24, pp. 252–266.
8. Habib Z., Sakai M.: *On PH quartic spirals joining two circles with one circle inside the other*, Computer-Aided Design, Elsevier, 2007, vol. 39, pp.125-132.
9. Hasslinger H.: *Measurement proof for the superiority of a new track alignment design element, the so-called "Viennese Curve"*, ZEVrail, Berlin, 2005.
10. Kobryń A.: *Polynomial solutions of transition curves*, Journal of Surveying Engineering, vol. 137, no. 3/2011, ASCE, 71–80.
11. Kobryń A.: *New solutions for general transition curves*, Journal of Surveying Engineering, vol. 140, no. 1/2014, ASCE, pp.12–21.
12. Kobryń A.: *Universal solutions of transition curves*, Journal of Surveying Engineering, vol. 142, no. 4/2016, ASCE, Article ID 04016010.
13. Kobryń A.: *Transition Curves for Highway Geometric Design*, Springer International Publishing, Series: Springer Tracts on Transportation and Traffic, 2017, vol. 14.
14. Kobryń A.: *Transition curves in vertical alignment as a method for reducing fuel consumption*, The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering, Vilnius Gediminas Technical University (Lithuania), 2014, vol. 9, no. 4, pp. 260–268.
15. Koc W.: *Krzywe przejściowe z nieliniowymi rampami przechyłkowymi w warunkach eksploatacyjnych PKP*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, nr 462/1990, s. 3–12.
16. Koc W.: *Elementy teorii projektowania układów torowych*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2004.
17. Koc W.: *Analytical method of modelling the geometric system of communication route*, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, Hindawi, Article ID 679817.
18. Koc W.: *Identification of transition curves in vehicular roads and railways*, Logistics and Transport, Międzynarodowa Szkoła Logistyki i Transportu we Wrocławiu, 2015, vol. 28, no. 4, pp. 31–42.
19. Koc W.: *Transition curve with smoothed curvature at its ends for railway roads*, Current Journal of Applied Science and Technology, SCIENDOMAIN International, Article no. CJUST.35006, 2017, vol. 22, iss. 3, pp. 1–10.
20. Koc W.: *New transition curve adapted to railway operational requirements*, Journal of Surveying Engineering, ASCE, vol. 145, iss. 3 – August 2019, pp. 04019009:1-11.
21. Koc W.: *Wygładzona krzywa przejściowa dla dróg kolejowych*, Przegląd Komunikacyjny, Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Komunikacji RP, Warszawa, 2019, vol. 74, nr. 7, s. 12–17.
22. Koc W., Mieloszyk E.: *Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego*, Archiwum Inżynierii Lądowej, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej Polskiej Akademii Nauk, 1987, tom 33, z. 2/, s. 239–261.
23. Maxima Package, WWW <http://maksima.sourceforge.net> [dostęp 20.09.2019].
24. Mieloszyk E., Koc W.: *General dynamic method for determining transition curve equations*, Rail International – Schienen der Welt, UIC, 1991, vol. 22, no. 10, pp. 32–40.

25. Sanchez-Reyes J., Chacon J. M.: *Nonparametric Bezier representation of polynomial transition curves*, Journal of Surveying Engineering, vol. 144, no. 2/2018, ASCE, 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000251, 04018001.
26. Standardy Techniczne – szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości $V_{max} \leq 200$ km/h (dla taboru konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem), tom I – Droga Szynowa (Załącznik ST-T1-A6: Układy geometryczne torów), PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2017.
27. Tari E., Baykal O.: *An alternative curve in the use of high speed transportation systems*, ARI – An International Journal for Physical and Engineering Sciences, Springer, 1998, vol. 51, no. 2, pp. 126–135.
28. Tari E., Baykal O.: *A new transition curve with enhanced properties*, Canadian Journal of Civil Engineering, Canadian Science Publishing, 2005, vol. 32, no. 5, pp. 913–923.
29. Tasci L., Kuloglu N.: *Investigation of a new transition curve*, The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering, Vilnius Gediminas Technical University (Lithuania), 2011, vol. 6, no. 1, pp. 23–29.
30. Wojtczak R.: *Charakterystyka krzywej przejściowej Wiener Bogen*, Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej, Politechnika Poznańska, 2017, nr 25, s. 419–431.
31. Zboiński K., Woźnica P.: *Optimisation of the railway transition curves' shape with use of vehicle-track dynamical model*, Archives of Transport, Komitet Transportu Polskiej Akademii Nauk, 2010, vol. 22, no. 3/, pp. 387–407.
32. Zboiński K., Woźnica P.: *Formation of polynomial railway transition curves of even degrees*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej – Transport, 2014, z. 101, s. 189–202.
33. Ziatdinov R.: *Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function*, Computer Aided Geometric Design, Elsevier, 2012, vol. 29, no. 7, pp. 510–518.