Łukasz STEFANOWICZ, Remigiusz WIŚNIEWSKI, Marian ADAMSKI
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT INFORMATYKI I ELEKTRONIKI,
ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra

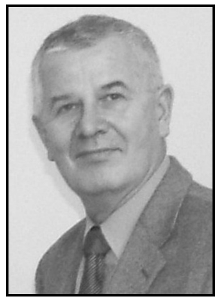
Algorytm selekcji wykorzystujący teorię hipergrafów

Mgr inż. Łukasz STEFANOWICZ

Absolwent Uniwersytetu Zielonogórskiego, pracę magisterską obronił w 2011 roku. Jest słuchaczem studiów doktoranckich, specjalność informatyka. Członek PTI oraz Uczelnianego Koła Naukowego. Aktywnie uczestniczy w realizacji pokazów naukowych o zasięgu krajowym oraz międzynarodowym. Zainteresowania badawcze obejmują zagadnienia z zakresu teorii grafów oraz hipergrafów w kontekście sterowników logicznych.

e-mail: L.Stefanowicz@weit.uz.zgora.pl

Prof. dr hab. inż. Marian ADAMSKI



Profesor zwyczajny, zatrudniony w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zainteresowania badawcze obejmują projektowanie systemów cyfrowych realizowanych w postaci mikrosystemów cyfrowych oraz formalnych metod programowania sterowników logicznych. Członek IEEE, IEE, ACM, PTI oraz PTETiS.

e-mail: M.Adamski@iie.uz.zgora.pl

Dr inż. Remigiusz WIŚNIEWSKI

Absolwent Uniwersytetu Zielonogórskiego, pracę doktorską obronił w 2008 roku. W latach 2000-2001 dwukrotnie odbył przemysłową praktykę studencką w firmie Aldec Inc. w Stanach Zjednoczonych. Aktualnie pracuje jako adiunkt (Uniwersytet Zielonogórski). Zainteresowania badawcze obejmują zagadnienia z zakresu teorii grafów i hipergrafów, bezpieczeństwa danych i kryptologii oraz metodologii projektowania i implementacji systemów cyfrowych z wykorzystaniem struktur programowalnych FPGA.

e-mail: R.Wisniewski@iie.uz.zgora.pl

Streszczenie

Artykuł porusza kwestię selekcji określonych elementów zbioru z wykorzystaniem teorii hipergrafów. Przedstawiona została idea wspólnego algorytmu selekcji, w przypadku takich problemów, jak selekcja podsieci automatowych w dekompozycji sieci Petriego, a także selekcja implikantów prostych w procesie miminalizacji funkcji logicznych. Jako bazowy algorytm, wykorzystano metodę transwersal dokładnych, jednocześnie usprawniając ją o alternatywną scieżkę w przypadku, kiedy dany hipergraf selekcji nie należy do klasy hipergrafu transwersal dokładnych. Jak pokazują badania, metoda może być dobrą alternatywą obok wykorzystywanych metod tradycyjnych.

Słowa kluczowe: selekcja, podsieci automatowe, implikanty proste, hipergraf, hipergraf transweral dokładnych, transwersala, transwersala dokładna.

A selection algorithm based on the hypergraph theory

Abstract

The paper deals with the selection problem based on the hypergraph theory. There is presented an idea of a common selection algorithm for selection of State Machine Components and Prime Implicants. The exact transversal method was used as a baseline algorithm. It was improved by supporting it with an optional path when a given selection hypergraph did not belong to the xt-class (class of the exact transversal hypergraph). In this case, the exact transversal was searched. When it was unsuccessful, the regular transversal was searched. The studies prove that the method allows obtaining the exact solution when the selection hypergraph does not belong to the xt-class, but has an exact transversal. The presented results show that a hypergraph which does not belong to the xt-class may have an exact transversal enabling obtaining a solution which would be as good as the one obtained with the backtracking method. The exact solution was also obtained with the use of an ordinary transversal, which de facto indicated that the regular transversals allowed, in certain cases, obtaining the exact solution. It seems to confirm the aptly determined class of solutions of the proposed improvements. In some cases, the solution contained one extra subnet, but in one tested case, the solution turned out to be much worse than the exact one.

Keywords: selection, State Machine Components (SMCs), prime implicants, hypergraph, transversal, exact transversal.

1. Wprowadzenie

Systemy dyskretne, mogą zostać zamodelowane za pomocą sieci Petriego [1, 2]. Niekiedy wymagana jest analiza procesu zamodelowanego siecią Petriego, dlatego też wykonuje się dekompozycję. Proces analizy z uwagi na operacje na pełnym zbiorze miejsc jest realizowany w czasie wykładniczym., dlatego też stosowana jest selekcja, umożliwiająca redukcję nadmiarowych miejsc systemu dyskretnego podczas dekompozycji, a także projektowania systemów dyskretnych, cyfrowych. Selekcja jest procesem NP-trudnym co oznacza, że nie istnieje wielomianowy algorytm dokładny, a jedynie przybliżony rozwiązujący problem.

Temat selekcji badany jest przez naukowców już od długiego czasu. Powstało wiele algorytmów pozwalających na jej realizację: dokładne, np. metoda z nawrotami (B), a także przybliżone, np. metoda zachłanna [2, 4]. Istniejące algorytmy bazują w głównej mierze na operacjach macierzowych, które można przedstawić za pomocą grafów [3] oraz hipergrafów.

Zaproponowana metoda transwersal dokładnych w [4], wykorzystująca hipergraf dokładny nie zawsze jest skuteczna, ponieważ nie istnieje wielomianowa metoda pozwalająca na klasyfikację danego hipergrafu do klasy hipergrafów dokładnych. Mając na uwadze to ograniczenie metodę rozwinięto o wykorzystanie hipergrafu transwersal dokładnych [5], nazywanego dalej xt-hipergrafem. Istnieje wielomianowy algorytm klasyfikacji klasy xt hipergrafu [6], dlatego też możliwe staje się przeprowadzenie selekcji w czasie wielomianowym, a co za tym idzie uzyskanie rozwiązania dokładnego. Jak wynika z badań [5], 80% testowanych sieci posiada xt-hipergraf.

Metoda selekcji oparta o teorię hipergrafów znajduje zastosowanie w przypadku rozwiązywania wielu problemów naukowych [4, 5, 7, 8]. Pierwszym z nich jest selekcja podsieci automatowych sieci Petriego [2, 4, 5]. Pozwala to na dekompozycję sieci Petriego w oparciu o otrzymane automaty sekwencyjne. Wykorzystana została metoda oparta o transwersale dokładne, bazująca na hipergrafie c-dokładnym [4], a także hipergrafie transwersal dokładnych [5]. Drugim problemem jest selekcja implikantów prostych, będąca jednym z procesów dwupoziomowej minimalizacji funkcji logicznych. Algorytm wykorzystujący także transwersale dokładne został przedstawiony w [9]. Uzyskanie jak najbardziej zredukowanej postaci pierwotnej funkcji logicznej ma kluczowe znaczenie w procesach związanych z implementacją systemu w docelowym układzie cyfrowym [10, 11, 12, 13].

2. Podstawowe definicje

2.1. Sieć Petriego

Siecią Petriego *PN* nazywamy dwudzielny graf skierowany o dwóch rodzajach wierzchołków: miejscach i tranzycjach, połączonych skierowanym łukiem [1, 2, 4]. Formalnie sieć Petriego definiuje trójka:

$$PN = (P, T, F) \tag{1}$$

gdzie: P jest skończonym, niepustym zbiorem miejsc, T jest skończonym, niepustym zbiorem tranzycji, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times F)$ jest skończonym, niepustym zbiorem łuków.

2.2. Podsieć automatowa sieci Petriego

Podsiecią automatową *PN'* sieci Petriego *PN* [1, 2] nazywamy taką jej spójną podsieć:

$$PN' = (P', T', F') \tag{2}$$

że:

$$\forall t \in T' : |\bullet t| = |t \bullet| = 1; \tag{3}$$

$$P' = \bullet T' \cup T' \bullet; \tag{4}$$

$$F' = ((P' \times T') \cup (T' \times P')) \cap F \tag{5}$$

2.3. Hipergraf

Hipergraf *H* [4, 14, 15] definiuje dwójka:

$$H = (V, E) \tag{6}$$

gdzie: $V = \{v_1,..,v_n\}$ jest skończonym, niepustym zbiorem wierzchołków, $E = \{E_1,...,E_n\}$ jest zbiorem krawędzi hipergrafu.

2.4. Transwersala

Transwersalą *T* [3, 14, 15] hipergrafu *H* nazywamy zbiór:

$$T \subseteq V \tag{7}$$

zawierający wierzchołki incydentne do krawędzi hipergrafu *H*.

2.5. Transwersala dokładna

Transwersalą dokładną *D* hipergrafu *H* nazywamy zbiór [3, 12, 13]:

$$D \subseteq V \tag{8}$$

zawierający wierzchołki incydentne do każdej krawędzi hipergrafu *H*, przy czym każda krawędź jest incydentna z dokładnie jednym wierzchołkiem zbioru *D*.

2.6. Hipergraf transwersal dokładnych

Hipergraf transwersal dokładnych H_{XT} (xt-hipergraf) to taki, w którym wszystkie minimalne transwersale są dokładne [6].

3. Sformułowanie problemu

Proces selekcji należy do problemów klasy NP-trudnej. Selekcja natomiast dotyczy wielu typów problemów, jak chociażby: podsieci automatowych, implikantów prostych.

Jak pokazano w [2], selekcja podsieci automatowych jest istotna z punktu widzenia dekompozycji systemów dyskretnych modelowanych sieciami Petriego. Dzięki niej możliwe jest zdekomponowanie sieci na minimalną liczbę automatów sekwencyjnych niezbędnych do pokrycia sieci. Zaproponowany algorytm opierający się o xt-hipergraf oraz wyznaczenie transwersal dokładnych pozwala na uzyskanie rozwiązania dokładnego w przypadku 80% testowanych sieci [5].

Selekcja implikantów prostych z wykorzystaniem teorii hipergrafów przedstawiona w [9] ukazuje innowacyjne podejście w kwestii właściwej selekcji implikantów prostych. Tablica pokrycia jest obrazowana za pomocą hipergrafu selekcji. Jeśli należy on do hipergrafów klasy xt, proces selekcji może zostać przeprowadzony w czasie wielomianowym. Selekcja implikantów prostych jest drugim etapem drugiej części procesu minimalizacji i sprowadza się do znalezienia pokrycia jak najmniejszą liczbą implikantów wszystkich mintermów funkcji.

W niniejszym artykule skoncentrowano się na rozwinięciu metody transwersal dokładnych, na przykładzie selekcji podsieci automatowych sieci Petriego (algorytm selekcji implikantów prostych przebiega analogicznie). Istotą jest opracowanie alternatywnej scieżki obliczenia rozwiązania z wykorzystaniem teorii hipergrafów, kiedy hipergraf selekcji nie należy do klasy xt. Metoda szczegółowo zostanie przedstawiona w kolejnym rozdziale.

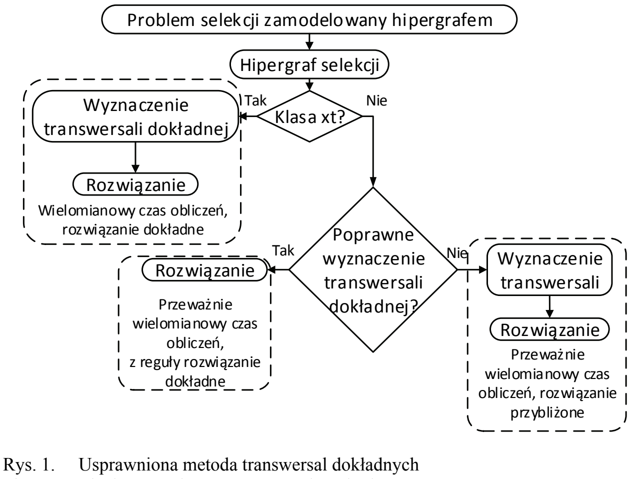
4. Idea proponowanej metody

Proponowana metoda jest rozwinięciem algorytmu transwersal dokładnych (ex-T), przedstawionego w [4] oraz [5]. Rdzeń metody transwersal dokładnych można przedstawić w kilku krokach. Pierwszym jest wyznaczenie hipergrafu selekcji [16, 17], który powstaje na skutek wyznaczenia hipergrafu dualnego oraz redukcji cyklicznej wierszy oraz kolumn. Następnie wykonywany jest test klasy hipergrafu. Jeśli należy on do klasy xt, wyznaczana jest pierwsza transwersala dokładna, pozwalająca na uzyskanie rozwiązania problemu.

Rysunek 1 przedstawia rdzeń usprawnionej metody transwersal dokładnych. W pierwszej kolejności wyznaczany jest hipergraf selekcji. Następnie sprawdzana jest w czasie wielomianowym klasa hipergrafu. Jeśli należy on do xt, wyznaczana jest pierwsza transwersala dokładna, która stanowi rozwiązanie. Jeśli hipergraf selekcji nie należy do klasy xt, następuje próba wyznaczenia transwersali dokładnej. Jeśli proces ten zakończy się sukcesem, dana transwersala dokładna jest rozwiązaniem problemu selekcji. W przypadku, gdy nie jest możliwe wyznaczenie transwersali dokładnej, zastosowanie mają algorytmy tradycyjne, w których wyznaczane jest zwykłe pokrycie hipergrafu.

Warto podkreślić, iż metoda transwersal dokładnych (ex-T) jest metodą o wielomianowej złożoności obliczeniowej, ponieważ ścieżka selekcji może zostać wykonana w czasie wielomianowym:

1. Redukcja cykliczna, liniowa / wielomianowa złożoność [18],
2. Wielomianowe sprawdzenie xt-klasy hipergrafu [6],
3. Transwersala oraz transwersala dokładna hipergrafu klasy xt lub c-dokładnej może zostać wyznaczona w czasie wielomianowym, ich liczba może być wykładnicza [4, 6].



Rys. 1. Usprawniona metoda transwersal dokładnych
Fig. 1. The improved exact transversal method

5. Wstępne badania

Przeprowadzone zostały wstępne badania, mające na celu sprawdzenie wpływu proponowanego algorytmu na uzyskane rozwiązanie. Innymi słowy celem przeprowadzonych eksperymentów było sprawdzenie, czy wykorzystanie transwersal dokładnych oraz zwykłych transwersal daje wymierne efekty w przypadku, gdy hipergraf nie należy do klasy xt. Tabela 1 przedstawia częściowe rezultaty badań.

Tab. 1. Wyniki badań wybranych modułów testowych
Tab. 1. Experimental results of selected benchmarks

Nazwa sieci	Klasa sieci	Typ hipergrafu selekcji przed / po redukcji	Minimalna liczba SMCs [B/ ex-T]	Typ transwersali [ex-T]
3carros	*MG*	*inny/inny*	*3/3*	*dokładna*
anet_cpy_mil	*MG*	*inny/inny*	*3/3*	*dokładna*
IEC	*MG*	*inny/inny*	*3/3*	*zwykła*
Inet_s2_2	*MG*	*inny/inny*	*4/4*	*dokładna*
Inet_s6_3	*MG*	*inny/inny*	*3/7*	*zwykła*
np5	*MG*	*inny/inny*	*3/3*	*dokładna*
oil_cover_anet	*MG*	*inny/inny*	*3/4*	*zwykła*
oli_cover_snet	*EFC*	*inny/inny*	*3/4*	*zwykła*
snet_cpy_mil	*EFC*	*inny/inny*	*3/4*	*zwykła*

Powyższe rezultaty pokazują, że hipergraf, który nie należy do klasy xt może posiadać transwersalę dokładną pozwalającą na uzyskanie rozwiązania tak samo dobrego, jak metoda z nawrotami. Uzyskano także rozwiązanie dokładne za pomocą zwykłej transwersali, co de facto wskazuje, iż zwykłe transwersale pozwalają w pewnych przypadkach na uzyskanie rozwiązania dokładnego, co zdaje się potwierdzać trafnie określoną klasę rozwiązań proponowanego usprawnienia. W niektórych przypadkach rozwiązanie zawierało jedną nadmiarową podsieć, natomiast w jednym testowanym przypadku rozwiązanie okazało się dużo gorsze, niż dokładne.

6. Plany dalszych badań

Bardzo istotnym czynnikiem jest umożliwienie uzyskania rozwiązania jak najbardziej zbliżonego do rozwiązania dokładnego w przypadku zwykłej transwersali. Jak pokazują wyniki, znalezienie transwersali może, (ale nie musi) pozwolić na uzyskanie rozwiązania optymalnego. Istotnym celem jest umożliwienie znalezienia transwersali minimalnej, która de facto może zagwarantować rozwiązanie optymalne.

Kolejnym celem badań będzie sprawdzenie zależności pomiędzy liczbą transwersalową (r) hipergrafu, a jakością rozwiązania – transwersal w kontekście transwersali minimalnej. Problem wyznaczania transwersal minimalnych został przedstawiony chociażby w [19]. Pozwoli to na oszacowanie wymaganej liczby transwersal w celu uzyskania rozwiązania zbliżonego do dokładnego. Jest to o tyle istotne, iż liczba transwersal może być wykładnicza. Ponadto istnieje dynamiczna metoda wyznaczania transwersali minimalnej na częściowym zbiorze rozwiązań zaproponowana przez Berge [14, 15].

7. Podsumowanie

Artykuł przedstawia algorytm selekcji, który umożliwia wykorzystanie go w przypadku selekcji podsieci automatowych sieci Petriego oraz implikantów prostych. Istotnym faktem jest umożliwienie wykonania całej ścieżki selekcji z wykorzystaniem teorii hipergrafów w czasie wielomianowym. Usprawienie polega na zaproponowaniu alternatywnego rozwiązania w sytuacji, gdy hipergraf selekcji nie należy do klasy xt. W takim przypadku następuje próba obliczenia transwersali dokładnej, a gdy taka nie istnieje, zastosowanie mają algorytmy klasyczne i wyznaczana jest zwykła transwersala, która nie jest dokładna. Jak pokazują badania, metoda pozwala na uzyskanie rozwiązania dokładnego w przypadku, gdy hipergraf selekcji nie należy do klasy xt, natomiast posiada transwersalę dokładną. W skrajnych przypadkach czas wyznaczania transwersali dokładnej w hipergrafie, który nie należy do klasy xt może być wykładniczy. Istotny jest także fakt, że w niektórych przypadkach rozwiązanie dokładne jest możliwe do uzyskania także dla transwersal zwykłych. Mimo wszystko należy pamiętać, że w tym przypadku nie jest to rozwiązanie gwarantowane. Wskazane kierunki dalszych prac oraz badań sugerują dalsze możliwości rozwoju proponowanej metody selekcji. Istotnym faktem jest złożoność czasowa algorytmu, która dotyczy wielomianowego czasu wykonywania.

8. Literatura

[1] Murata T.: Petri nets: properties, analysis and applications, Proceedings of the IEEE 77, pp. 541-580, 1989.
[2] Karatkevich A.: Dynamic analysis of Petri net-based discrete systems, Berlin, Springer, 2007.
[3] Karatkevich A., Wiśniewski R.: Computation of Petri nets covering by SM-components based on the graph theory, Przegląd Elektrotechniczny, nr 8, s.141-144, 2012.
[4] Wiśniewska M.: Application of Hypergraphs in Decomposition of Discrete Systems, Vol. 23 of LNCCS. University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 2012.
[5] Stefanowicz Ł., Adamski M., Wiśniewski R.: Application of an Exact Transversal Hypergraph in Selection of SM-Components, IFIP Advanced in Information and Communication Technology, Lisbon, 2013.
[6] Either T.: Exact transversal hypergraphs and application to boolean u-functions, Journal of Symbolic Computation 17 (3), pp.215-225, 1994.
[7] Wiśniewska M., Wiśniewski R., Adamski M., Halang W.: Application of hypergraphs in microcode length reduction of microprogrammed controllers, Second International Workshop on Nonlinear Dynamics and Synchronization, Smart System Technologies, s.106-109, 2009.
[8] Adamski M., Wiśniewska M., Wiśniewski R., Stefanowicz Ł.: Application of hypergraphs to the reduction of the memory size in the Microprogrammed Controllers with Address Converter, Przegląd Elektrotechniczny, nr 8, s.134-136, 2012.
[9] Wiśniewski R., Stefanowicz Ł.: Zastosowanie hipergrafów w procesie selekcji implikantów prostych, Pomiary Automatyka Kontrola, Vol.59, nr 11, s.1195-1197, 2013.
[10] Coudert O.: Two-Level Logic Minimization: An Overview, Integration Vol. 17, No. 2, s. 97-140, Oct. 1994.
[11] McCluskey E. J.: Introduction to the Theory of Switching Circuits, McGraw-Hill, New York, 1965.
[12] Kania D.: Układy logiki programowalnej, PWN, Warszawa, 2012.
[13] Adamski M., Karatkievich A., Węgrzyn M. (ed.): Design of Embeded Control Systems. NY, Springer Science, 2005.
[14] Berge C.: Graphs and Hypergraphs, American Elsevier Pub. Co., 1989.
[15] Berge C.: Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets, North-Holland, 1989.
[16] Wiśniewski R., Adamski M., Wiśniewska M.: Polynomial algorithm for concurrency hypergraph formulation of free-choice Petri net, Measurement, Automatics, Control, Vol7, pp.650-652, 2012.
[17] Kovalyov A.: Concurrency Relations and the Safety Problem for Petri Nets, Application and Theory of Petri Nets, 1992.
[18] DeMicheli G.: Synthesis and Optimization of Digital Circuits, McGraw-Hill Higher Education, 1994.
[19] Eiter T., Gottlob G.: Identyfying the Minimal Transversals of a Hypergraph and Related Problems, SIAM Journal on Computing, Vol.24, pp. 1278-1304, 1992.

otrzymano / received: 12.04.2014
przyjęto do druku / accepted: 02.06.2014 *artykuł recenzowany / revised paper*