

Estymacja niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych na przykładzie dwu układów rezystancyjnych 3D

Zygmunt Lech Warsza

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elekoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: W artykule rozważa się wyznaczanie niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich dla trzech przykładów układów prądu stałego. Zaproponowano rozszerzenie podanej w Suplemencie 2 do GUM statystycznej metody wektorowej szacowania niepewności pomiaru zbioru pojedynczych wartości parametrów multimenzurandu na opis niepewności dla zakresów tych parametrów. Podano wzór dla macierzy kowariancji niepewności względnych wektora multimenzurandu. Przedstawiono macierze kowariancji dla niepewności pośredniego pomiaru rezystancji trzech skojarzonych ze sobą rezystorów, tj. jako ramion mostka Wheatstone'a trzykrotnie połączonych w różnej kolejności oraz bez konieczności rozłączania obwodu mostka, dzięki zastosowaniu niekonwencjonalnego obocznego sposobu jego zasilania z dwu źródeł prądu; oraz omówiono pomiar trzech wewnętrznych rezystancji obwodu o strukturze gwiazdy z jej zacisków. Podstawowy wniosek jest taki, że w opisie dokładności dla zakresów wielkości mierzonych bezpośrednio i pośrednio w pomiarach wielowymiarowych możliwe jest stosowanie wektorowego prawa propagacji, nie tylko niepewności bezwzględnych wg GUM, ale również niepublikowanych dotychczas – dla niepewności względnych.

Słowa kluczowe: ocena dokładności, pośrednie pomiary wielu zmiennych, propagacja bezwzględnych i względnych niepewności, macierz kowariancyjna

1. Wstęp

W pomiarach pośrednich wieloparametrowych wyznacza się wyniki i szacuje dokładność multimenzurandu ze zbioru innych wielkości z nim skojarzonych. W ogólnym przypadku zależność między zbiorem n wartości wielkości x_i mierzonych na wejściu systemu pomiarowego oraz danymi uzyskanymi dla m wielkości y_i na wyjściu po przetworzeniu wyników tych pomiarów, jest funkcjonalem $\mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$. Zwykle można go też przedstawić jako funkcję wielu zmiennych w postaci macierzowej

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{X} , \mathbf{Y} – wektory opisujące n wielkości wejściowych i m wyjściowych (ogólnie $n \neq m$).

Metodę szacowania niepewności menzurandu w wieloparametrowych pomiarach pośrednich podaje Suplement 2 do międzynarodowo uznanego Przewodnika Wyznaczania Niepewności Pomiarów o angielskim akronimie GUM [1], a jej stosowaniu poświęcone są liczne prace [2–6, 9–12]. Wymiar m wektora \mathbf{Y} zależy od tego, czy funkcja $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ jest liniowa ($m \leq n$), czy nieliniowa ($m \leq$ sumy równań liniowych i nieliniowych). Propagacja wariancji wielkości mierzonych między wejściem i wyjściem, a więc i związek ich niepewności pomiarowych opisuje następująca relacja między ich macierzami kowariancyjnymi

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_1n} \sigma_{x_1} \sigma_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_1n} \sigma_{x_1} \sigma_{x_n} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2a)$$

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zlw936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 21.11.2018 r., przyjęty do druku 21.12.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$\mathbf{U}_Y = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \dots & \rho_{y_1m} \sigma_{y_1} \sigma_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y_1m} \sigma_{y_1} \sigma_{y_m} & \dots & \sigma_{y_m}^2 \end{bmatrix} \quad (2c)$$

W tekście używa się następujących symboli: x_i, y_i – wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych oraz ich wektory; $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$; standardowe niepewności bezwzględne $\sigma_{x_i} \equiv u_{x_i}$, $\sigma_{y_j} \equiv u_{y_j}$ oraz względne $\delta_{x_i} \equiv u_{x_i}/x_i$, $\delta_{y_j} \equiv u_{y_j}/y_j$, przy czym symbol u jest używany w przewodniku GUM [1]; $\mathbf{U}_X, \mathbf{U}_Y$ i $\mathbf{U}_{\delta X}, \mathbf{U}_{\delta Y}$ – macierze kowariancji dla niepewności bezwzględnych i względnych.

Dokładność liniowych przetworników i przyrządów pomiarowych dla całego zakresu wartości wielkości mierzonych opisuje się obecnie przez maksymalne dopuszczalne błędy, czyli błędy graniczne, jako najgorszy możliwy przypadek kombinacji składowych tych błędów (ang. *the worst case*), tj.:

$$|\Delta_{y_i}| \leq |\Delta_{y_{i0}}|_{\max} + (y_i - y_{i0}) |\varepsilon_{S_i}|_{\max} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m \quad (3)$$

gdzie: Δ_{y_i} – błąd bezwzględny wartości y_i , $|\Delta_{y_{i0}}|_{\max}$ – graniczny błąd bezwzględny wartości początkowej y_{i0} zakresu; $\Delta_{y_i - y_{i0}}$, $\varepsilon_{S_i} \equiv \Delta_{y_i - y_{i0}} / (y_i - y_{i0})$ – bezwzględny i względny błąd różnicy $(y_i - y_{i0})$ sygnału wyjściowego lub odczytu, $|\varepsilon_{S_i}|_{\max}$ – graniczna wartość modułu tego błędu.

Jeśli $|\Delta_{y_{i0}}| \ll |\Delta_{y_i - y_{i0}}|$, to względny błąd graniczny wielkości y_i wynosi

$$|\Delta_{y_i} / y_i|_{\max} \equiv |\varepsilon_{S_i}|_{\max} \quad (3a)$$

Prawdopodobieństwo zaistnienia maksymalnego błędu granicznego jako sumy jego składowych jest bardzo małe. Co więcej, niepewność standardowa typu B jest znacznie mniejsza od maksymalnego błędu granicznego, ponieważ szacuje się ją jako pierwiastek kwadratowy ze średnich wartości składników, a nie z sumy ich wartości maksymalnych. Dlatego też zastosowanie losowego opisu dokładności, np. takiego jak w GUM [1] z użyciem niepewności, może w wielu przypadkach okazać się bardziej wartościowe. Można więc go zastosować dla standardowej niepewności u w całym zakresie wartości każdej z wielkości, zarówno bezpośrednio jak i pośrednio mierzonych oraz użyć w podobnej dwuskładnikowej postaci, jak dla błędów granicznych w równaniu (3). Przy stosowaniu oznaczeń wg GUM należy więc wyznaczyć standardowe niepewności: bezwzględną u_0 początkowej wartości y_{i0} i względną $u_{r(y_i - y_{i0})}$ dla przyrostu $(y_i - y_{i0})$ oraz wzór na względną niepewność rozszerzoną U_{r_i} dla wszystkich wartości każdego zakresu. Niepewności te szacuje się dla określonego poziomu ufności, czyli prawdopodobieństwa P , np. dla $P = 0,95$ otrzymuje się $U_{0i} \approx 0,95u_{0i}$ oraz $U_{ri} \approx 0,95u_{ri}$. Standardowa niepewność wielkości wyjściowej y_i w przypadku $y_{i0} \neq 0$ wynosi

$$u_{y_i} = \sqrt{u_{y_{i0}}^2 + 2\rho_{y_i} u_{y_{i0}} u_{y_i - y_{i0}} + u_{y_i - y_{i0}}^2} \quad (4)$$

gdzie: $u_{y_i}, u_{y_{i0}}, u_{y_i - y_{i0}}$ – standardowe niepewności bezwzględne dla wartości mierzonej y_i , dla początku zakresu i przyrostu $y_i - y_{i0}$, ρ_{y_i} – ich współczynnik korelacji.

Jedynie dla współczynnika korelacji $\rho_{y_i} = \pm 1$ obie składowe niepewności u_{y_i} są addytywne, tak jak błędy graniczne w (3). W wielu przypadkach obie te niepewności nie są skorelowane, czyli statystycznie niezależne. Wówczas $\rho_{y_i} = 0$. Ponadto często można przyjąć, że niepewność względna przyrostu $u_{r(y_i - y_{i0})}$ jest stała w całym zakresie wielkości mierzonej lub też oprócz oszacowanie niepewności u_{y_i} na wartości maksymalnej $u_{r_{y_i}}|_{\max}$. Wtedy wzór (4) dla niepewności bezwzględnej upraszcza się.

$$u_{y_i} = \sqrt{u_{y_{i0}}^2 + u_{y_i - y_{i0}}^2} = \sqrt{u_{y_{i0}}^2 + (y_i - y_{i0})^2 u_{r_{y_i}}^2|_{\max}} \quad (4a)$$

Niepewność początkowa $u_{y_{i0}}$ występuje też w zakresach o wartości początkowej $y_{i0} = 0$. Gdy $u_{y_{i0}}^2 \ll (y_i - y_{i0})^2 u_{r_{y_i}}^2$, to poza małym obszarem bliskim początkowi zakresu y_{i0} wpływ $u_{y_{i0}}$ na niepewność u_{y_i} staje się pomijalny i dokładność parametru y_i opisuje tylko pojedyncza wartość niepewności względnej $u_{r_{y_i}} \equiv u_{r_{y_i - y_{i0}}} \equiv \delta_{y_i}$, np. stała dla danego zakresu, lub $\delta_{y_i} = u_{r_{y_i}}|_{\max}$. Zaś dla $y_{i0} = 0$ niepewność bezwzględną opisuje bardzo prosta zależność

$$u_{y_i} = y_i u_{r_{y_i}} \leq y_i u_{r_{y_i}}|_{\max} \quad (4b)$$

Rekomendacje Przewodnika GUM [1] dotyczą wyznaczania niepewności wyniku pomiarów poszczególnych wartości. Dotychczas nie ma międzynarodowych regulacji dla statystycznego opisywania dokładności systemów instrumentalnych do wieloparametrowych pomiarów pośrednich. W przypadku multiplikatywnego typu równań pomiaru prostsze jest stosowanie podanej poniżej zależności (5) między macierzami kowariancji $\mathbf{U}_{\delta X}$ i $\mathbf{U}_{\delta Y}$ dla względnych niepewności standardowych $u_{r_{x_i}}, u_{r_{y_i}}$ zaproponowanej przez pierwszego z autorów [9]. Współczynniki korelacji są takie same jak dla niepewności bezwzględnych we wzorach (2a, c).

$$\mathbf{U}_{\delta Y} = \mathbf{S}_\delta \mathbf{U}_{\delta X} \mathbf{S}_\delta^T \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{\delta X} = \begin{bmatrix} \delta_{x_1}^2 & \dots & \rho_{x_1n} \delta_{x_1} \delta_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_1n} \delta_{x_1} \delta_{x_n} & \dots & \delta_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$\mathbf{S}_\delta = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{x_n}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_1}{y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{x_n}{y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$\mathbf{U}_{\delta Y} = \begin{bmatrix} \delta_{y_1}^2 & \dots & \rho_{y_1m} \delta_{y_1} \delta_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y_1m} \delta_{y_1} \delta_{y_m} & \dots & \delta_{y_m}^2 \end{bmatrix} \quad (5c)$$

gdzie: standardowe niepewności względne $\delta_{x_i} \equiv u_{r_{x_i}}$, $\delta_{y_i} \equiv u_{r_{y_i}}$; współczynniki korelacji $\rho_{x_{ij}}, \rho_{y_{ij}}$, tj. takie same jak dla niepewności bezwzględnych we wzorach (2a, c).

Aby zagadnienia te stały się bardziej przejrzyste poniżej przedstawi się dwa przykłady wyznaczania niepewności w pośrednich pomiarach trójparametrowych (3D) z multiplikatywnym i addytywnym typem funkcji przetwarzania F . Poda się także wnioski ogólne.

2. Pomiar pośrednie w układzie o równaniach multiplikatywnych

Przykładem wyznaczania niepewności pomiarów w układzie o równaniach multiplikatywnych jest pomiar trzech rezystancji ramion mostka. Nieznane wartości R_2 , R_3 , R_4 rezystancji trzech rezystorów można określić bez użycia cyfrowego omiernika o dużej dokładności. Rozpatrzono dwa przypadki takich pomiarów pośrednich 3D, gdy rezystancje te wraz z regulowanym wielodekadowym rezystorem R_1 , połączone w szereg tworzą obwód oczka. W pierwszym przypadku wykorzystuje się układ mostka Wheatstone'a, ale trzy razy przy różnej kolejności połączenia rezystancji, tj. R_2 , R_3 , R_4 (rys. 1a), lub R_2 , R_4 , R_3 oraz R_3 , R_2 , R_4 by je zmierzyć z precyzją, którą umożliwia regulowany, np. dekadowo rezystor R_1 . Z warunku równowagi, tj. dla $U_{CD} = 0$ każdego z trzech tych układów mostka otrzyma się wartości nastaw rezystancji R_{x1} , R_{x2} , R_{x3} rezystora R_1 . W drugim przypadku (rys. 1b) mierzy się połączone w oczko rezystancje R_2 , R_3 , R_4 bez jego przełączania. Układ również trzy razy równoważy

się przy użyciu rezystora R_1 , tj. dla zasilania AB, takiego jak poprzednio uzyska się R_{x1} . Zaś stosując niekonwencjonalne zasilanie z dwu źródeł prądowych $J_1 = J_3$ dołączonych równolegle do przeciwnych ramion 1, 3 mostka [7, 8] i równoważąc najpierw wyjście z przekątnej DC a następnie z przekątnej AB, uzyska się takie same wartości R_{x2} , R_{x3} jak w pierwszym przypadku.

Dla układu z rys. 2b) przy klasycznym zasilaniu przekątnej AB jak dla mostka Wheatstone'a. np. ze źródła prądowego J , warunkiem równowagi $U_{DC} = 0$ jest równość iloczynów rezystancji ramion przeciwnych $R_{x1}R_3 = R_2R_4$. Przy zasilaniu niekonwencjonalnym obocznym z dwu źródeł $J_1 = J_3$, lub dla sumy napięć wyjściowych z dwu pomiarów dla $J_3 = 0$ i źródła J_1 przełączanego między tymi ramionami, dla równowagi na wyjściu DC ($U_{DC} = 0$) lub AB ($U_{AB} = 0$) otrzymuje się dwa inne warunki jako równości iloczynów rezystancji w ramionach przyległych: $R_1R_4 = R_2R_3$ i $R_1R_2 = R_3R_4$ [7, 8]. W obu układach z nastaw R_{x1} , R_{x2} , R_{x3} na rezystorze R_1 uzyskuje te same trzy równania pomiaru:

$$R_{x1} = R_2 \frac{R_4}{R_3}, \quad R_{x2} = R_2 \frac{R_3}{R_4}, \quad R_{x3} = R_3 \frac{R_4}{R_2} \quad (6a, b, c)$$

Z powyższych wzorów można pośrednio wyliczyć wartości badanych trzech rezystancji jako elementy wektora wyjściowego Y

$$R_2 = \sqrt{R_{x1}R_{x2}}, \quad R_3 = \sqrt{R_{x2}R_{x3}}, \quad R_4 = \sqrt{R_{x1}R_{x3}} \quad (7a, b, c)$$

Ponieważ równania (7a, b, c) są typu multiplikatywnego, można zastosować równanie (5) do oszacowania ich niepewności względnych. Macierz czułości S_δ ma postać

$$S_\delta = \begin{bmatrix} \frac{R_{x1}}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial R_{x1}} & \frac{R_{x2}}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial R_{x2}} & \frac{R_{x3}}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial R_{x3}} \\ \frac{R_{x1}}{R_3} \frac{\partial R_3}{\partial R_{x1}} & \frac{R_{x2}}{R_3} \frac{\partial R_3}{\partial R_{x2}} & \frac{R_{x3}}{R_3} \frac{\partial R_3}{\partial R_{x3}} \\ \frac{R_{x1}}{R_4} \frac{\partial R_4}{\partial R_{x1}} & \frac{R_{x2}}{R_4} \frac{\partial R_4}{\partial R_{x2}} & \frac{R_{x3}}{R_4} \frac{\partial R_4}{\partial R_{x3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

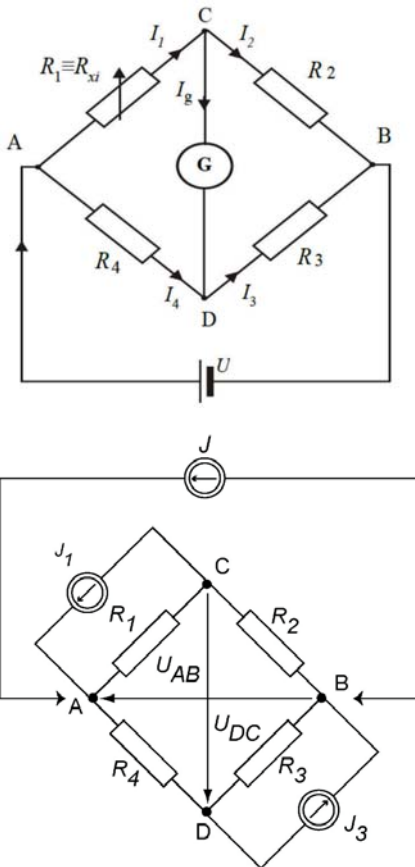
Wyznamy wzory dla estymacji niepewności względnych wyników pośrednich pomiarów rezystancji R_2 , R_3 , R_4 przy założeniu, że wielkości wejściowe R_{x1} , R_{x2} , R_{x3} nie są skorelowane i użyjemy wzór (5) dla niepewności względnych, tj. $U_{\delta Y} = S_\delta U_{\delta X} S_\delta^T$. Otrzymuje się wówczas

$$U_{\delta X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{R_{x1}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{R_{x2}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{R_{x3}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \delta_{R_{x1}}^2 + \delta_{R_{x2}}^2 & \delta_{R_{x2}}^2 & \delta_{R_{x1}}^2 \\ \delta_{R_{x2}}^2 & \delta_{R_{x2}}^2 + \delta_{R_{x3}}^2 & \delta_{R_{x3}}^2 \\ \delta_{R_{x1}}^2 & \delta_{R_{x3}}^2 & \delta_{R_{x1}}^2 + \delta_{R_{x3}}^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Standardowe względne niepewności wielkości wyjściowych wynoszą:

$$\delta_{R_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_{x1}}^2 + \delta_{R_{x2}}^2}, \quad \delta_{R_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_{x2}}^2 + \delta_{R_{x3}}^2}, \quad \delta_{R_4} = \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_{x1}}^2 + \delta_{R_{x3}}^2} \quad (10a, b, c)$$

i współczynniki korelacji



Rys. 1. Struktury układów DC do pomiaru trzech rezystancji R_2 , R_3 , R_4 : a) pierwszy z trzech wariantów włączenia tych rezystancji jako ramion zrównoważonego mostka Wheatstone'a; b) dwa różne typy zasilania układu tego samego oczka 4R: klasyczne – jak dla mostka w a) z pojedynczego źródła J (lub U); zasilanie niekonwencjonalne – z dwu źródeł prądowych $J_1 = J_3$ dołączonych równolegle do przeciwnych gałęzi 1 i 3

Fig. 1. The structures of DC bridges for measurement three resistances R_2 , R_3 , R_4 : a) the first from three variants of the connection of arm resistances of the balanced Wheatstone bridge; b) two different types of supplies of the bridge loop circuit: classic one – as in a) from single source J (or U) and balance $U_{DC} = 0$ is for $R_{x1}R_3 = R_2R_4$; unconventional double current supply $J_1 = J_3$ connected in parallel to opposite arms 1 and 3

$$\rho_{R_2, R_3} = \frac{\frac{1}{4} \delta_{R_2}^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_2}^2 + \delta_{R_2}^2} \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_2}^2 + \delta_{R_3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_2}}{\delta_{R_2}}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_3}}{\delta_{R_2}}\right)^2}} > 0 \quad (11a)$$

$$\rho_{R_2, R_1} = \frac{\frac{1}{4} \delta_{R_1}^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_1}^2 + \delta_{R_2}^2} \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_1}^2 + \delta_{R_3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_2}}{\delta_{R_1}}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_3}}{\delta_{R_1}}\right)^2}} > 0 \quad (11b)$$

$$\rho_{R_3, R_1} = \frac{\frac{1}{4} \delta_{R_3}^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_2}^2 + \delta_{R_3}^2} \frac{1}{2} \sqrt{\delta_{R_1}^2 + \delta_{R_3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_2}}{\delta_{R_3}}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{R_1}}{\delta_{R_3}}\right)^2}} > 0 \quad (11c)$$

Wszystkie powyższe współczynniki korelacji są dodatnie. Jeżeli

$$\delta_{R_1} = \delta_{R_2} = \delta_{R_3} = \delta, \text{ to } \delta_{R_2} = \delta_{R_3} = \delta_{R_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta, \text{ to}$$

$$\rho_{R_2, R_3} = \rho_{R_2, R_1} = \rho_{R_3, R_1} = \frac{1}{2},$$

i obszar pokrycia dla niepewności względnych jest elipsoidalny

o parametrze $w = 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3 = \frac{1}{2} > 0$ [9, 10]. W tym przy-

padku obszar pokrycia, w którym będą znajdować się niepewności względne elementów wektora \mathbf{Y} z prawdopodobieństwem 0,95 określa elipsoidę o półosiach $a = 2,8\delta$, $b = 1,4\delta$, $c = 1,4\delta$. We wzorach przyjmuje się, że współczynnik rozszerzenia dla obszaru pokrycia o prawdopodobieństwie 95% w trójwymiarowym (3D) rozkładzie Gaussa wynosi $k_p = 2,8$. Elipsoida ta przylega w sześciu punktach do ścian sześcianu

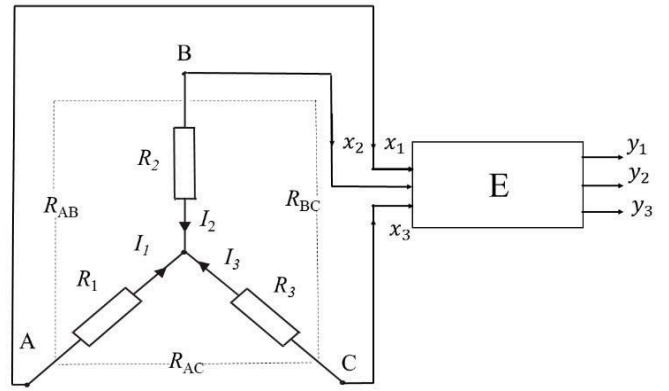
o krawędziach $d = 2 \cdot 2,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \delta = 3,96\delta$. Stosunek objętości elipsoidy i sześcianu wynosi $4\pi abc / (3d^3) = 37\%$.

3. Przykład o równaniach pomiarowych typu addytywnego

W wielu sytuacjach praktycznych stosuje się obwód połączenia trzech rezystancji w gwiazdę trójramienną i nie ma możliwości odłączania ich od punktu wspólnego 0, a nawet punkt ten może być niedostępny, lub struktura gwiazdy jest tylko obwodem zastępczym. Zatem wartości rezystancji ramion gwiazdy muszą być wyznaczone pośrednio z pomiarów trzech rezystancji wejściowych między zaciskami A, B, C (rys. 2) [11]. Jeśli rezystancje gwiazdy i ich zmiany muszą być zdalnie wyznaczone i monitorowane, to trzeba użyć urządzeń przesyłania i przetwarzania sygnałów z pomiarów bezpośrednich – człon E. Operacje te również mogą być obciążone niepewnościami.

Przyjmijmy najpierw, że wyniki mierzonych na wejściu wartości rezystancji między zaciskami gwiazdy są dalej przetwarzane precyzyjnie bez żadnych zakłóceń i modyfikacji przez przetworniki A/D i moduły arytmetyczne zlokalizowane w bloku E. Układ równań opisujących pomiary jest więc następujący:

$$R_{AB} = R_1 + R_2,$$



Rys. 2. Schemat układów gwiazd z modułem pomiarów wydajności
Fig 2. The diagram of the star circuits with module of processing measurements

$$R_{BC} = R_2 + R_3,$$

$$R_{AC} = R_1 + R_3 \quad (12)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} R_{AB} \\ R_{BC} \\ R_{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad (12a)$$

Po lewostronnym wymnożeniu równania (12a) przez odwrotność macierzy łączącej wektory rezystancji otrzymuje się podstawowy wzór $\mathbf{Y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}$, opisujący pomiary pośrednie rezystancji gwiazdy w następującej postaci:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{AB} \\ R_{BC} \\ R_{AC} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Wartości rezystancji połączonych w gwiazdę są więc następujące

$$R_1 = \frac{R_{AB}}{2} - \frac{R_{BC}}{2} + \frac{R_{AC}}{2}, \quad (14a)$$

$$R_2 = \frac{R_{AB}}{2} + \frac{R_{BC}}{2} - \frac{R_{AC}}{2}, \quad (14b)$$

$$R_3 = -\frac{R_{AB}}{2} + \frac{R_{BC}}{2} + \frac{R_{AC}}{2}. \quad (14c)$$

Aby oszacować dokładność pomiarów wprowadza się poprawki dla znanych błędów systematycznych, a ich zindyfikowane składowe o wartościach nieznanych w tych pomiarach ocenia się i randomizuje jako elementy niepewności u_B (typu B). Następnie dla bezpośrednio mierzonych rezystancji między parami zacisków gwiazdy znajduje się standardowe niepewności bezwzględne σ_{AB} , σ_{BC} , σ_{AC} jako pierwiastki z sum kwadratów niepewności u_A i u_B (typu A i B) oraz ew. niepewności względne δ_{AB} , δ_{BC} , δ_{AC} . Bezwzględne niepewności i współczynniki korelacji pośrednio mierzonych rezystancji gwiazdy wyznacza się metodą wektorową podaną w Suplemencie 2 do GUM [1]. Macierze kowariancji \mathbf{U}_Y i \mathbf{U}_X wektora wyjściowego \mathbf{Y} i wektora wejściowego \mathbf{X} są powiązane wzorem (2), tj. $\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_X \cdot \mathbf{S}^T$, w którym: \mathbf{S} – to

Jakobian, czyli macierz współczynników czułości dla niepewności bezwzględnych. Dla rezystancji gwiazdy ma ona postać

$$S = F = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial R_{AB} & \partial R_1 / \partial R_{BC} & \partial R_1 / \partial R_{AC} \\ \partial R_2 / \partial R_{AB} & \partial R_2 / \partial R_{BC} & \partial R_2 / \partial R_{AC} \\ \partial R_3 / \partial R_{AB} & \partial R_3 / \partial R_{BC} & \partial R_3 / \partial R_{AC} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3.1. Skorelowane wielkości wejściowe

Rozważmy ogólny przypadek, gdy bezwzględne niepewności wielkości wejściowych σ_{AB} , σ_{BC} , σ_{AC} są skorelowane. Wówczas w macierzy kowariancji wielkości wejściowych U_X , na pozycjach niediagonalnych występują elementy niezerowe, zawierające współczynniki korelacji ρ_{AB} , ρ_{BC} , ρ_{AC}

$$U_X = \begin{bmatrix} \sigma_{AB}^2 & \rho_{AB}\sigma_{AB}\sigma_{BC} & \rho_{BC}\sigma_{AB}\sigma_{AC} \\ \rho_{AB}\sigma_{AB}\sigma_{BC} & \sigma_{BC}^2 & \rho_{AC}\sigma_{BC}\sigma_{AC} \\ \rho_{BC}\sigma_{AB}\sigma_{AC} & \rho_{AC}\sigma_{BC}\sigma_{AC} & \sigma_{AC}^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Jeżeli względne niepewności rezystancji mierzonych na zaciskach gwiazdy są takie same, tj.:

$$\delta_{AB} = \delta_{BC} = \delta_{AC} = \delta,$$

to wówczas bezwzględne niepewności wielkości wejściowych to:

$$\sigma_{AB} = \delta \cdot R_{AB}, \quad \sigma_{AC} = \delta \cdot R_{AC}, \quad \sigma_{BC} = \delta \cdot R_{BC}.$$

Wyjściowe niepewności bezwzględne są następujące:

$$\sigma_{y1} = \frac{\delta}{2} \sqrt{R_{AB}^2 + R_{BC}^2 + R_{AC}^2 + 2(\rho_{BC}R_{AB}R_{AC} - \rho_{AB}R_{AB}R_{BC} - \rho_{AC}R_{BC}R_{AC})} \quad (17a)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{\delta}{2} \sqrt{R_{AB}^2 + R_{BC}^2 + R_{AC}^2 + 2(\rho_{AB}R_{AB}R_{BC} - \rho_{BC}R_{AB}R_{AC} - \rho_{AC}R_{BC}R_{AC})} \quad (17b)$$

$$\sigma_{y3} = \frac{\delta}{2} \sqrt{R_{AB}^2 + R_{BC}^2 + R_{AC}^2 + 2(\rho_{AC}R_{BC}R_{AC} - \rho_{BC}R_{AB}R_{AC} - \rho_{AB}R_{AB}R_{BC})} \quad (17c)$$

Wyjściowe niepewności względne:

$$\delta_{y1} = \frac{\delta \sqrt{1 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\rho_{BC}\gamma - \rho_{AB}\beta - \rho_{AC}\beta\gamma)}}{1 - \beta + \gamma}; \quad (18a)$$

$$\delta_{y2} = \frac{\delta \sqrt{1 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\rho_{AB}\beta - \rho_{BC}\gamma - \rho_{AC}\beta\gamma)}}{1 + \beta - \gamma}; \quad (18b)$$

$$\delta_{y3} = \frac{\delta \sqrt{1 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\rho_{AC}\beta\gamma - \rho_{BC}\gamma - \rho_{AB}\beta)}}{\beta + \gamma - 1}; \quad (18c)$$

gdzie: $\beta = \frac{R_{BC}}{R_{AB}}$ i $\gamma = \frac{R_{AC}}{R_{AB}}$.

Współczynniki korelacji wielkości wyjściowych określono następująco

$$\rho_{y1y2} = \frac{\delta^2 R_{AB}^2 - R_{BC}^2 - R_{AC}^2 + 2\rho_{AC}R_{BC}R_{AC}}{4\sigma_1\sigma_2}, \quad (19a)$$

$$\rho_{y1y3} = \frac{\delta^2 R_{AC}^2 - R_{BC}^2 - R_{AB}^2 + 2\rho_{AB}R_{BC}R_{AC}}{4\sigma_1\sigma_3}, \quad (19b)$$

$$\rho_{y2y3} = \frac{\delta^2 R_{BC}^2 - R_{AC}^2 - R_{AB}^2 + 2\rho_{BC}R_{AB}R_{AC}}{4\sigma_2\sigma_3}. \quad (19c)$$

Jeśli $R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = R$, to niepewności wynoszą

$$\sigma_{y1} = \frac{\delta R}{2} \sqrt{3 + 2(\rho_{BC} - \rho_{AB} - \rho_{AC})}, \quad (20a)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{\delta R}{2} \sqrt{3 + 2(\rho_{AB} - \rho_{BC} - \rho_{AC})}, \quad (20b)$$

$$\sigma_{y3} = \frac{\delta R}{2} \sqrt{3 + 2(\rho_{AC} - \rho_{AB} - \rho_{BC})}. \quad (20c)$$

3.2. Nieskorelowane wielkości wejściowe

Dla nieskorelowanych zmiennych wejściowych $\rho_{AB} = \rho_{BC} = \rho_{AC} = 0$ oraz z (20) bezwzględne niepewności wynoszą

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{R_{AB}}^2 + \sigma_{R_{AC}}^2 + \sigma_{R_{BC}}^2} \quad (21)$$

i z (13) wynikają współczynniki korelacji

$$\rho_{y1y2} = \frac{\sigma_{AB}^2 - \sigma_{BC}^2 - \sigma_{AC}^2}{\sigma_{AB}^2 + \sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2}, \quad (22a)$$

$$\rho_{y1y3} = \frac{-\sigma_{AB}^2 - \sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2}{\sigma_{AB}^2 + \sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2}, \quad (22b)$$

$$\rho_{y2y3} = \frac{-\sigma_{AB}^2 + \sigma_{BC}^2 - \sigma_{AC}^2}{\sigma_{AB}^2 + \sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2}. \quad (22c)$$

Jeżeli $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_{AC} = \sigma$,

to $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$, $\rho_{y1y2} = \rho_{y1y3} = \rho_{y2y3} = -\frac{1}{3}$.

W literaturze statystycznej wykazano, że wyznacznik macierzy U_Y jest zawsze dodatni [9, 10], gdyż parametr

$$w = 1 - \rho_{y1y2}^2 - \rho_{y1y3}^2 - \rho_{y2y3}^2 + 2\rho_{y1y2} \cdot \rho_{y1y3} \cdot \rho_{y2y3} > 0 \quad (23)$$

Przy oznaczeniach $\chi = \frac{\sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2}{\sigma_{AB}^2} > 0$ oraz $\nu = \frac{\sigma_{BC}^2 - \sigma_{AC}^2}{\sigma_{AB}^2}$

otrzymuje się współczynniki korelacji jako

$$\rho_{y1y2} = \frac{1 - \chi}{1 + \chi}; \quad \rho_{y1y3} = -\frac{1 + \nu}{1 + \chi}; \quad \rho_{y2y3} = \frac{\nu - 1}{1 + \chi}. \quad (24a, b, c)$$

Parametr $w = 4 \frac{\chi^2 - \nu^2}{(1 + \chi)^3}$ powinien spełniać warunek $\chi^2 > \nu^2$,

co zachodzi zawsze i równanie charakterystyczne macierzy odwrotnej ma trzy dodatnie pierwiastki. Granica obszaru pokrycia dla wyników z prawdopodobieństwem $P \leq 0,95$ jest elipsoidą styczną wewnątrznie do ścian sześcianu w sześciu punktach odległych od krawędzi o

$$k_p \sqrt{\sigma_{AB}^2 + \sigma_{BC}^2 + \sigma_{AC}^2} \quad (25)$$

$k_p = 2,8$ – współczynnik rozszerzenia obszaru pokrycia dla niepewności bezwzględnych.

3.3. Wyniki niektórych przypadków szczególnych

Wyznamy parametry obszaru pokrycia niepewności dla przypadku pomiarów 3D rezystancji połączonych w gwiazdę, gdy są jednakowe niepewności standardowe (pomiaru jednym z przełączaniem, lub trzema miernikami tego samego rodzaju, wartości mierzonych rezystancji zbliżone do siebie), tj. dla:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_{AC} = \sigma_{in}; \rho_{AB} = \rho_{BC} = \rho_{AC} = \rho_{in}$$

Na wyjściu otrzymuje się trzy jednakowe niepewności:

$$\sigma_{out} = \sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \frac{1}{2} \sigma_{in} \sqrt{3 - 2\rho_{in}}$$

oraz współczynniki korelacji:

$$\rho_{y1y2} = \rho_{y1y3} = \rho_{y2y3} = -\frac{2\rho_{in} - 1}{3 - 2\rho_{in}}$$

Z analizy tej postaci ρ_{out} wynikają wartości ujemne

$$\rho_{y1y2}, \rho_{y1y3}, \rho_{y2y3} \leq 0 \text{ dla } \rho_{in} \leq 1/2$$

i dodatnie $\rho_{y1y2}, \rho_{y1y3}, \rho_{y2y3}$ dla $\rho_{in} > 1/2$;

- Przy braku korelacji na wejściu (pomiaru trzema miernikami lub jednym w różnych warunkach, przyczyny losowych rozrzutów wartości mierzonych nieskorelowane), tj. dla

$$\rho_{in} = 0: \sigma_{out} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{in}, \rho_{y1y2} = \rho_{y1y3} = \rho_{y2y3} = -\frac{1}{3};$$

Obszar pokrycia (w przestrzeni 3D) dla niepewności standardowej będzie elipsoidą obrotową o półosiach: $1,4\sigma_{in}, 2,8\sigma_{in}, 2,8\sigma_{in}$.

- Przy pełnej korelacji niepewności wejściowych (trzy pomiary tym samym miernikiem, jednakowe niepewności u_B , pomijalne, lub w pełni skorelowane niepewności u_A), tj.

$$\text{dla } \rho_{in} = 1: \min \sigma_{out} = \frac{1}{2} \sigma_{in}, \rho_{y1y2} = \rho_{y1y3} = \rho_{y2y3} = 0;$$

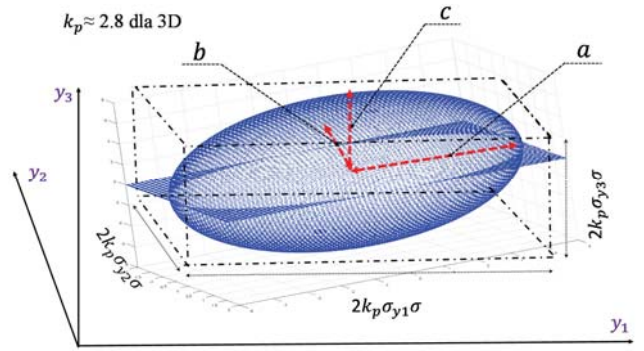
Wielkości wyjściowe są tu nieskorelowane. Obszar pokrycia będzie kulą o promieniu $1,4\sigma_{in}$.

- Dla korelacji ujemnej na wejściu dla $\rho_{in} = -1$:

$$\max \sigma_{out} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sigma_{in}.$$

$$\rho_{y1y2} = \rho_{y1y3} = \rho_{y2y3} = -\frac{3}{5}; \text{ i współczynnik } w < 0.$$

Z porównania przypadku dla $\rho_{in} = 0$ (np. gdy niepewność $u_A \gg u_B$ i nie są skorelowane) z przypadkiem (np. dla $u_A \ll u_B$ i pomiarów w tych samych warunkach oraz na tym samym zakresie miernika) wynika, że niepewność standardowa pomiarów rezystancji σ_{out} jest dla $\rho_{in} = 0$ $\sqrt{3}$ razy większa niż dla $\rho_{in} = 1$.



Rys 3. Obszar pokrycia 3D dla niepewności w pośrednich pomiarach rezystancji wewnętrznych z końcówek układu z rys. 2 w postaci gwiazdy

Fig 3. The 3D coverage region for uncertainty in indirect measurements of internal resistances from terminals of the star form circuit given on fig. 2

4. Wpływ niepewności funkcji F na przykładzie układu gwiazdy

W instrumentalnym systemie pomiarów rezystancji gwiazdy (rys. 2), ich wartości wraz z niepewnościami otrzymuje się po przetworzeniu następującego sygnału jednostce cyfrowej **E**. Wartości wyjściowe **Y** są rozwiązaniami (14) podstawowego równania macierzowego $Y = F \cdot X$. Ich niepewności nie uwzględniają niepewności wzmocnienia/tłumienia sygnałów w kanałach pomiarowych i niepewności obliczeń wynikłych z zaokrąglania. Na wejściu układu obliczeniowego jednostki **E** powinny być teraz następujące wielkości:

$$X_S = \begin{bmatrix} k_1 x_1 \\ k_2 x_2 \\ k_3 x_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

gdzie k_1, k_2, k_3 – znamionowe współczynniki przetwarzania sygnałów o mierzonych rezystancjach.

Analogowe lub cyfrowe sygnały wejściowe przetwarzania mają własne niepewności. Załóżmy, że w realizacji przetwarzania sygnałów występują zakłócenia w kanałach, które zmieniają poziomy sygnałów Dlatego też należy zmodyfikować macierz **F**. Nowa macierz, oznaczona jako **F_s**, jest następująca:

$$F_s = \begin{bmatrix} k_1(1 + \delta_1) & -k_2(1 + \delta_1) & k_3(1 + \delta_1) \\ k_1(1 + \delta_2) & k_2(1 + \delta_2) & -k_3(1 + \delta_2) \\ -k_1(1 + \delta_3) & k_2(1 + \delta_3) & k_3(1 + \delta_3) \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ opisują zmiany współczynników przetwarzania k_1, k_2, k_3 .

Funkcja wektorowa wielkości wyjściowych może też być dodatkowo zakłócana przez niepewności addytywne związane

z błędami zera $\left(\frac{\Delta_{10}}{1 + \delta_1}; \frac{\Delta_{20}}{1 + \delta_2}; \frac{\Delta_{30}}{1 + \delta_3} \right)$ i powoduje, że wielkości wyjściowe wynoszą teraz

$$y_1 = (1 + \delta_1) \left(\frac{k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_3}{2} + \frac{\Delta_{10}}{1 + \delta_1} \right) \quad (28a)$$

$$y_2 = (1 + \delta_2) \left(\frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_3}{2} + \frac{\Delta_{20}}{1 + \delta_2} \right) \quad (28b)$$

$$y_3 = (1 + \delta_3) \left(\frac{-k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{2} + \frac{\Delta_{30}}{1 + \delta_3} \right) \quad (28c)$$

Modyfikując formuły (17a, b, c) dla bezwzględnych niepewności rezystancji gwiazdy przy przetwarzaniu idealnym, ze względu na niepewności w procesie przetwarzania, otrzymuje się następujące postacie dla tych niepewności

$$\sigma_{y_1} = (1 + \delta_1) \sqrt{k_1^2 \sigma_{x_1}^2 + k_2^2 \sigma_{x_2}^2 + k_3^2 \sigma_{x_3}^2 + 2(k_1 k_3 \rho_{x_1 x_3} \sigma_{x_1} \sigma_{x_3} - k_1 k_2 \rho_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - k_2 k_3 \rho_{x_2 x_3} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3}) + \sigma^2 \left(\frac{\Delta_{10}}{1 + \delta_1} \right)} \quad (29a)$$

$$\sigma_{y_2} = (1 + \delta_2) \sqrt{k_1^2 \sigma_{x_1}^2 + k_2^2 \sigma_{x_2}^2 + k_3^2 \sigma_{x_3}^2 + 2(k_1 k_3 \rho_{x_1 x_3} \sigma_{x_1} \sigma_{x_3} - k_1 k_2 \rho_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - k_2 k_3 \rho_{x_2 x_3} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3}) + \sigma^2 \left(\frac{\Delta_{20}}{1 + \delta_2} \right)} \quad (29b)$$

$$\sigma_{y_3} = (1 + \delta_3) \sqrt{k_1^2 \sigma_{x_1}^2 + k_2^2 \sigma_{x_2}^2 + k_3^2 \sigma_{x_3}^2 + 2(k_2 k_3 \rho_{x_2 x_3} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} - k_1 k_2 \rho_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} - k_1 k_3 \rho_{x_1 x_3} \sigma_{x_1} \sigma_{x_3}) + \sigma^2 \left(\frac{\Delta_{30}}{1 + \delta_3} \right)} \quad (29c)$$

Otrzymane wzory są bardziej skomplikowane niż dla przetwarzania idealnego.

5. Podsumowanie i wnioski

Omówiono wyznaczanie niepewności bezwzględnych i względnych dla wieloparametrowych pomiarów pośrednich o nieliniowych -multiplikatywnych równaniach przetwarzania i o równaniach liniowych – addytywnych. Dokonano tego na dwu przykładach pomiarów (3D), tj. sprawdzania rezystancji trzech ramion mostka Wheatstone'a bez rozłączania oraz trzech rezystancji połączonych w układ o strukturze gwiazdy. W pierwszym z przykładów zaproponowano zastosowanie opisu propagacji wariancji z macierzami kowariancji o niepewnościach względnych, który nie występuje w literaturze, w tym i w Suplemencie 2 do Przewodnika GUM. W drugim przykładzie stosowano metodę klasyczną z macierzami kowariancji o bezwzględnych niepewnościach i z nich wyznaczono niepewności względne. Zanalizowano też wpływ niepewności funkcji przetwarzania sygnałów o wartościach rezystancji gwiazdy.

Wykazano, że w przypadku, gdy dwa lub więcej parametrów (na przykład elementy obwodów elektronicznych) mierzy się pośrednio, gdy są ze sobą skojarzone, to niepewności tych parametrów są skorelowane. Tak więc, jeśli te skorelowane elementy zostaną użyte bez rozłączenia w innym układzie, to przy szacowaniu jego niepewności należy wziąć pod uwagę odpowiednie współczynniki korelacji uzyskane z pierwotnych pomiarów.

Informacje o obliczeniach niepewności wielowymiarowych pomiarów prądu przemiennego zawierają prace [9–12].

Suplement 2 do przewodnika GUM [1] nie obejmuje sytuacji występujących w systemach instrumentalnych, gdy realizacja funkcji $F(\mathbf{X})$ jest nie dokładna. Niedokładność ta może wynikać z aproksymacji funkcji przetwarzania, ograniczonego zakresu częstotliwości, wykorzystania w przetwarzaniu sygnałów przetworników A/C, mnożników analogowych i innych elementów funkcjonalnych, niezbędnych w realizacji pomiarów pośrednich. Zatem realizacja funkcjonalu $F(\mathbf{X})$ w praktyce w instrumentalnych systemach pomiarowych może być również obarczona własnymi niepewnościami u_p .¹ W najbardziej precyzyjnych pomiarach staje się niezbędne uwzględnianie niepewności wynikającej z zaokrąglania wyników, w tym i z precyzji obwodów cyfrowych [3–6].

Autorzy zaawansowali obecnie następne opracowania dotyczące metody wektorowej do opisu dokładności pomiarów w pośrednich w układach wieloparametrowych. Jest to rozszerzenie metody wektorowej zalecaniej w Suplemencie 2 do GUM [1]. Uwzględni ona skorelowanie pomiędzy składowymi niepewnościami zarówno typu A jak i typu B wielkości wejściowych. Nowe formuły będą przedstawione w kolejnych publikacjach autorów.

Bibliografia

1. JCGM 102:2011, Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Extension to any number of output quantities.
2. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Wyznaczanie parametrów multimensurandy z pomiarów wieloparametrowych. Część 1 Podstawy teoretyczne – w zarysie*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, 2/2011, 55–61.
3. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Wyznaczanie parametrów multimensurandy z pomiarów wieloparametrowych. Część 2. Reguły zaokrąglania. Nieściśności w Przewodniku GUM*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, 6/2011, 64–70.
4. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Sugestie kilku uściśleń w Przewodniku GUM-2008 i zaokrąglanie wyników pomiarów wieloparametrowych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 57, Nr 3/2011, 291–296.
5. Warszawa Z.L., *Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements*. [in:] *Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX*, ed. by F. Pavese. M. Bar et al, Serie: *Advances in Mathematics for Applied Sciences*, Vol. 84, World Scientific Books 2012, 418–425.
6. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *About evaluation of multivariate measurements results*. “*Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems*”, Vol. 6, No. 4, 2012, 27–32.
7. Warszawa Z.L., *Bridges supplied by two current Sources – new tool for Impedance measurements and signal Conditioning*, Proc. of IMEKO-TC 7 Symposium, Cracow Univ. of Technology 2002, 231–236.
8. Warszawa Z.L., *Immitancyjne układy czterobiegunowe [4T] w pomiarach wieloparametrowych*. Monografia. Wydawnictwo PIAP Warszawa 2004, pp.209
9. Warszawa Z.L. Part 1 and Warszawa Z. L., Puchalski J. Part 2: *Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples*. PPT: in CD Proceeding of Symposium PPM'18 Szczyrk Pl
10. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, 2/2018, 31–40.
11. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estimation of vector uncertainties of multivariable indirect instrumental measurement systems on the star circuit example*. Congress IMEKO 2018 CD Proceedings PO-062 and IOP Conf. Series: *Journal of Physics: Conf. Series* 1065 (2018) 052026, DOI:10.1088/1742-6596/1065/5/052026
12. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Ocena niepewności prostokątnych składowych impedancji wyznaczanych pośrednio z pomiarów składowych biegunowych i vice versa*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, 3/2018, 5–10.
13. Finkelstein L., *Fundamental concepts of measurement* ACTA IMEKO, May 2014, Volume 3, Number 1, 10–15 www.imeko.org.

¹ Te problemy techniki pomiarowej są zawarte w *Measurement Science*, czyli nauce o pomiarach i budowie środków techniki pomiarowej, dyscyplinie szerszej niż metrologia jako nauka o samych tylko pomiarach. Pojęcie i termin tej dyscypliny zaproponował urodzony we Lwowie prof. Ludwik Finkelstein z City University w Londynie podczas swojej działalności w IMEKO w latach 70.-90. XX w. [13].

Estimation of uncertainties in multivariable indirect measurements on the example of two resistance circuits 3D

Abstract: In this paper two examples of processing uncertainties of an indirect multivariable measurements of DC resistance circuits without disconnection are considered. It was proposed to extend the vector method of estimating measurement uncertainties, given in Supplement 2 to GUM by the formula for the relative uncertainties. The covariance matrixes of uncertainties of two DC electrical measurement circuits with multiplicative and additive types of measurement equations are presented, i.e.: for indirect measurement of three resistances with using them in three variants of balanced Wheatstone bridge or without disconnection this bridge circuit but with apply unconventional current supplies; the measurement of three internal resistances of the star circuit from its terminals. Formulas for absolute and relative uncertainties and their correlation coefficients are given. The general conclusion is that for description the accuracy of multivariable measurement instrumental systems relative uncertainties are preferable then absolute ones and uncertainties of parameters of their main measurement functions should be also considered.

Keywords: estimation of accuracy, indirect multivariable measurements, absolute and relative uncertainty, covariance matrixes

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

