

## POSZERZANIE MIĘDZYTORZA W ANALITYCZNEJ METODZIE PROJEKTOWANIA<sup>1</sup>

Władysław KOC

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

W pracy podjęto próbę nowego podejścia do kwestii poszerzania międzytorza, stawiając tezę, że należy je uformować przy zastosowaniu dwóch połączonych krzywych o odpowiednim rozkładzie krzywizny na długości. Założono, że na długości poszerzenia występują w strefach skrajnych obydwu krzywych odcinki zmiennej krzywizny, a w strefie środkowej krzywizna jest stała. Do rozwiązania problemu wykorzystano analityczną metodę projektowania, z identyfikacją rozkładu krzywizny za pomocą równań różniczkowych oraz matematycznym zapisem rzędnych w poszczególnych strefach krzywej poszerzenia. Rozpatrzono dwa przypadki rozkładu zmiennej krzywizny: liniowy i nieliniowy (wielomianowy). Uzyskanie określonej rzędnej końcowej poszerzenia torów wymaga sekwencyjnego korygowania przyjętych parametrów geometrycznych.

Słowa kluczowe: poszerzenia międzytorza, modelowanie krzywizny, analiza rzędnych poziomych.

### 1. WPROWADZENIE

Zwiększenie rozstawu torów kolejowych, powszechnie określane mianem poszerzenia międzytorza, polega najczęściej na odsunięciu jednego z torów. Odbywa się to w naszym kraju zgodnie z zasadami ustalonymi w latach 70. ubiegłego wieku przez prof. Henryka Bałucha [2, 3]. Poddał on krytyce stosowaną wówczas metodę, polegającą na wykorzystywaniu dwóch łuków kołowych (odwrotnych) bez przechyłki przedzielonych wstawką prostą i przedstawił propozycje dwóch własnych rozwiązań:

- za pomocą dwóch łuków kołowych z przechyłką oraz czterech krzywych przejściowych z rampami przechyłkowymi,
- za pomocą czterech krzywych przejściowych bez przechyłki.

Pierwsze rozwiązanie było w głównym stopniu dedykowane liniom kolejowym o przewadze ruchu pasażerskiego, drugie natomiast zostało uznane za korzystne przy znacznej przewadze pociągów towarowych. Powstały również odpowiednie algorytmy obliczeniowe, przy czym jako krzywe przejściowe wykorzystywano

---

<sup>1</sup> DOI 10.21008/j.1897-4007.2017.25.14

parabole trzeciego stopnia, a w przypadku występowania przechyłki na łuku kołowym – prostoliniowe rampy przechyłkowe.

Opisana sytuacja utrwaliła się w Polsce na długie lata i wciąż zachowuje aktualność, stanowiąc przedmiot zarówno zajęć dydaktycznych, jak też prowadzonych analiz naukowych (można tutaj wymienić pracę [14] z 2015 roku). Tymczasem w Europie w 2010 roku pojawiły się również inne propozycje rozwiązania omawianego problemu [4]:

- za pomocą dwóch łuków kołowych odwrotnych o promieniach  $R < 4000$  m z czterema krzywymi przejściowymi (rozwiązanie stosowane przy prędkościach jazdy do 120 km/h),
- za pomocą dwóch łuków kołowych odwrotnych o promieniach  $R \geq 4000$  m bez krzywych przejściowych,
- za pomocą czterech krzywych przejściowych bez stosowania łuków kołowych.

Jak widać, pierwszy i ostatni wymieniony sposób odpowiadają propozycji z prac [2, 3], przy czym dla rozwiązania z wykorzystaniem łuków kołowych o promieniach  $R < 4000$  m wprowadza się istotne ograniczenie prędkości jazdy pociągów i zazwyczaj stosuje promienie  $1500 \leq R \leq 2500$  m. W rozwiązaniu z wykorzystaniem łuków kołowych o promieniach  $R \geq 4000$  m nie przewiduje się stosowania przechyłki na łuku, a więc również i ramp przechyłkowych.

Należy jednak zauważyć, że istnieje możliwość podjęcia próby jeszcze innego podejścia do zagadnienia. Problem poszerzania międzytorza wykazuje bowiem analogię do przypadku łączenia ze sobą torów równoległych za pomocą dwóch rozjazdów; odbywa się to na długości torów zwrotnych, przyjmujących kształt łuków odwrotnych. Ponieważ w typowym, stosowanym od zarania kolejnictwa ukształtowaniu geometrycznym toru zwrotnego w rozjeździe kolejowym stosuje się pojedynczy łuk kołowy (bez krzywych przejściowych) – co oznacza występowanie miejsc gwałtownej, skokowej zmiany rzędnych wykresu krzywizny na początku i końcu rozjazdu – pomiędzy końcami rozjazdów stosowanych w połączeniu torów musi występować jeszcze wstawka prosta.

Jednak w ostatnim okresie w niektórych krajach, dążąc do wyłagodzenia wykresu krzywizny, wprowadza się tzw. „odcinki klotoidy” po obu stronach łuku kołowego, na których krzywizna zmienia się w sposób liniowy, często jednak nie osiągając w punktach skrajnych wartości zerowych [14, 15, 16, 17]. W takim przypadku wstawka prosta staje się niepotrzebna, a rzędna końcowa pierwszego rozjazdu jest równa połowie wymaganego rozstawu torów. Identyczny drugi rozjazd jest wstawiany w torze równoległym, natomiast końce obydwu rozjazdów są ze sobą połączone.

Uwzględniając powyższe można postawić tezę, że poszerzenie międzytorza również należy uformować przy zastosowaniu dwóch połączonych krzywych o odpowiednim rozkładzie krzywizny na długości, posiadających przeciwne znaki krzywizny (tj. łuków odwrotnych), przy czym ich rzędne końcowe muszą wynosić połowę wartości poszerzenia. Oczywiście nie muszą być tutaj spełnione wymagania odnoszące się do rozjeździe do jego skosu  $1:n$ .

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

W odróżnieniu od rozwiązania za pomocą łuków kołowych z przechyłką oraz krzywych przejściowych z rampami przechyłkowymi, nie wydaje się celowe różnicowanie wysokości toków szynowych z uwagi na trudności utrzymaniowe (przebież wartości przechyłki nie mogą być duże). Natomiast do rozwiązania za pomocą czterech krzywych przejściowych bez przechyłki należałoby wprowadzić odcinki łuku kołowego. Jednak kwestię podstawową stanowić musi właściwe ukształtowanie wykresu krzywizny na długości całego układu geometrycznego. Od tego bowiem zależy będzie uzyskiwana prędkość jazdy pociągów.

W zaproponowanym rozwiązaniu wystarczy rozpatrzyć połowę układu geometrycznego. Wartości odciętej dla drugiej połowy określa się, wykorzystując oś symetrii występującą w punkcie połączenia obydwu krzywych, natomiast rzędne tego rejonu stanowią różnicę wartości poszerzenia i rzędnych pierwszej krzywej.

Rozpatrywaną połowę układu geometrycznego obowiązują warunki odnoszące się do toru zwrotnego rozjazdu. Ponieważ rozwiązanie za pomocą dwóch łuków kołowych (odwrotnych) bez przechyłki nas nie interesuje, zakładamy, że na długości poszerzenia występują w strefach skrajnych odcinki zmiennej krzywizny, a w strefie środkowej krzywizna jest stała (czyli występuje tam łuk kołowy). Uzyskanie poprawnego rozwiązania wymaga spełnienia warunków kinematycznych oraz wyznaczenia rzędnej końcowej równej połowie założonej wartości poszerzenia.

Długość krzywej poszerzenia międzytorza zostaje podzielona na trzy strefy:

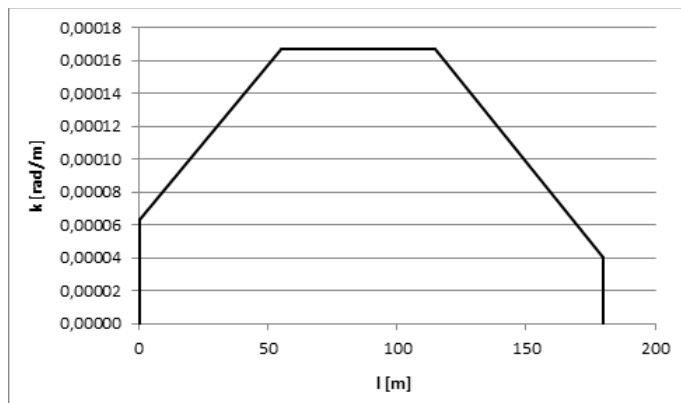
- strefę początkową o długości  $l_1$ , posiadającą zmienną krzywiznę,
- strefę środkową o długości  $l_2$ , posiadającą krzywiznę ustaloną,
- strefę końcową o długości  $l_3$ , posiadającą zmienną krzywiznę.

Oczywiście, możliwe są różne warianty rozwiązań, związane z wartościami krzywizny oraz długościami poszczególnych stref.

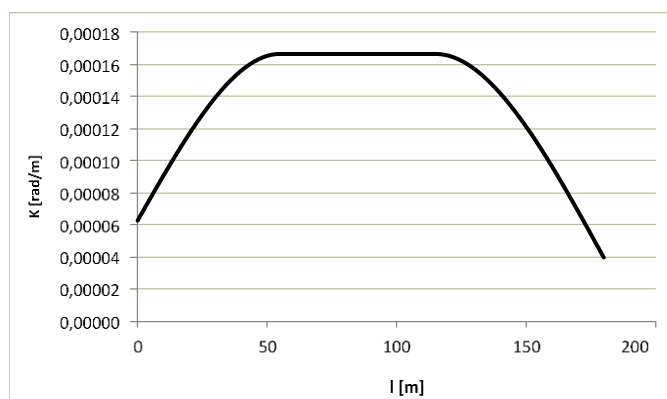
Zakładamy, że parametry kinematyczne określają wartość promienia łuku kołowego i długości odcinków o zmiennej krzywiznie dla zadanej prędkości jazdy pociągów. Długość części łukowej o stałej krzywiznie jest wprowadzana w sposób iteracyjny, aż do uzyskania założonej rzędnej końcowej.

## 3. ISTNIEJĄCE MOŻLIWOŚCI ROZWIĄZANIA PROBLEMU

Istnieją dwa podstawowe warianty ukształtowania krzywizny w skrajnych strefach układu geometrycznego: liniowy (rys. 1) i nieliniowy (rys. 2).



Rys. 1. Przykładowy wykres krzywizny z odcinkami krzywizny liniowej ( $R_1= 16000$  m,  $l_1= 55$  m,  $R_2= 6000$  m,  $l_2= 60$  m,  $l_3= 65$  m,  $R_3= 25000$  m) [8]



Rys. 2. Przykładowy wykres krzywizny z odcinkami nieliniowej krzywizny ( $R_1= 16000$  m,  $l_1= 55$  m,  $R_2= 6000$  m,  $l_2= 60$  m,  $l_3= 65$  m,  $R_3= 25000$  m) [10]

Teorię wariantu liniowego, wraz z wyznaczeniem równań parametrycznych w skrajnych strefach krzywej w układzie współrzędnych kartezjańskich, przedstawiono w pracy [8], a teorię wariantu nieliniowego w pracy [10]. W pracy [11] wykazano, że przyjmowanie niezerowych wartości krzywizny w punktach początkowym i końcowym nie jest rozwiązaniem korzystnym. Dlatego zdecydowano się na przyjęcie założenia, że krzywizny  $k_1 = k_3 = 0$  oraz że wykres krzywizny jest symetryczny na długości (czyli długości  $l_1 = l_3$ ). W tej sytuacji należało jeszcze wprowadzić oznaczenie  $k_2 = k$ .

Modelowanie odcinków zmiennej krzywizny na długości toru zwrotnego rozjazdu pozwala stworzyć jej zapis analityczny w postaci funkcji  $k(l)$ , gdzie parametr  $l$  określa położenie danego punktu na długości krzywej. Równania współrzędnych szukanego połączenia możemy zapisać w postaci parametrycznej [5]:

$$x(l) = \int \cos \theta(l) dl, \quad (1)$$

$$y(l) = \int \sin \theta(l) dl, \quad (2)$$

Funkcję kąta nachylenia stycznej  $\theta(l)$  określamy na podstawie wzoru:

$$\theta(l) = \int k(l) dl. \quad (3)$$

Powszechnie stosowanym (m. in. w komercyjnych programach wspomagających projektowanie [1, 13]) sposobem wyznaczania współrzędnych  $x(l)$  i  $y(l)$  jest całkowanie numeryczne funkcji  $\cos \theta(l)$  i  $\sin \theta(l)$ . Z praktycznego punktu widzenia daje ono wystarczającą dokładność. Metoda ta ma jednak jedną podstawową słabość – każdy przypadek geometryczny musi być rozpatrywany odrębnie i wprowadzanie jakichkolwiek uogólnień jest tutaj bardzo utrudnione. Jeśli chcemy uzyskać możliwość szerszego spojrzenia na problem, powinniśmy dysponować metodą analityczną, która – z założenia – posiada charakter ogólny i pełny. W niniejszej pracy zostały wyznaczone uniwersalne równania analityczne dla poszczególnych stref krzywej poszerzenia toru.

## 4. ZASTOSOWANIE ODCINKÓW KRZYWIZNY LINIOWEJ

### 4.1. Rozwiązanie problemu dla strefy początkowej

W strefie początkowej krzywej poszerzenia toru, przy podanych w punkcie 3 założeniach, rozpatrywany problem identyfikują warunki brzegowe [5]:

$$\begin{cases} k(0) = 0 \\ k(l_1) = k \end{cases} \quad (4)$$

i równanie różniczkowe:

$$k''(l) = 0. \quad (5)$$

Po wyznaczeniu stałych rozwiązanie problemu różniczkowego (4), (5) jest następujące:

$$k(l) = \frac{k}{l_1} l, \quad (6)$$

a funkcja kąta nachylenia stycznej  $\theta(l)$  jest opisana zależnością:

$$\theta(l) = \frac{k}{2 l_1} l^2. \quad (7)$$

Do wyznaczenia równań parametrycznych  $x(l)$  i  $y(l)$  wykorzystuje się procedurę przedstawioną w pracy [5], przy czym do rozwinięcia funkcji podcałkowych w szereg jest stosowany pakiet Maxima [12]. Po uproszczeniu uzyskanych wyrażeń poprzez usunięcie wyrazów nieistotnych otrzymuje się następujące równania parametryczne:

$$x(l) = l - \frac{k^2}{40 l_1^2} l^5 + \frac{k^4}{3456 l_1^4} l^9 + \dots, \quad (8)$$

$$y(l) = \frac{k}{6 l_1} l^3 - \frac{k^3}{336 l_1^3} l^7 + \dots. \quad (9)$$

#### 4.2. Rozwiązanie problemu dla strefy środkowej

W strefie łuku kołowego, tj. dla  $l \in \langle l_1, l_1 + l_2 \rangle$ , występuje stała krzywizna:

$$k(l) = k, \quad (10)$$

a funkcja  $\theta(l)$  jest opisana zależnością:

$$\theta(l) = -\frac{k}{2} l_1 + k l. \quad (11)$$

Równanie łuku kołowego można zapisać w postaci funkcji jawnej  $y(x)$ . Sposób jej wyznaczania jest tutaj analogiczny jak w pracach [6, 7, 9]. Przyjmujemy długość łuku kołowego  $l_2$  (mierzoną po samym łuku). Jego promień wynosi  $R$ , a nachylenie stycznej w punkcie początkowym  $s_1 = \tan \theta(l_1)$ . Wyznaczamy współrzędne środka łuku – punktu  $S(x_S, y_S)$ :

$$x_S = x(l_1) - \frac{s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} R, \quad (12)$$

$$y_S = y(l_1) + \frac{1}{\sqrt{1+s_1^2}} R. \quad (13)$$

Równanie łuku kołowego jest następujące:

$$y(x) = y_S - [R^2 - (x_S - x)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \langle x(l_1), x(l_1 + l_2) \rangle. \quad (14)$$

#### 4.3. Rozwiązanie problemu dla strefy końcowej

W strefie końcowej rozjazdu rozpatrywany problem identyfikują warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(l_1 + l_2) = k \\ k(l_1 + l_2 + l_3) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

i równanie różniczkowe (5). Po wyznaczeniu stałych rozwiązanie problem różniczkowego (5), (15) jest następujące:

$$k(l) = k + \frac{k}{l_1} (l_1 + l_2) - \frac{k}{l_1} l, \quad (16)$$

a funkcja  $\theta(l)$  jest opisana zależnością:

$$\theta(l) = \left[ -\frac{k}{2} l_1 - \frac{k}{2 l_1} (l_1 + l_2)^2 \right] + \left[ k + \frac{k}{l_1} (l_1 + l_2) \right] l - \frac{k}{2 l_1} l^2. \quad (17)$$

Wyznaczenie równań parametrycznych  $x(l)$  i  $y(l)$  wymaga w danym przypadku rozwinięcia funkcji podcałkowych w szereg Taylora. Po scałkowaniu otrzymuje się ostatecznie następujące równania:

$$x(l) = x(l_0) + \cos \theta_0 (l - l_0) - \frac{k}{2} \sin \theta_0 (l - l_0)^2 - \frac{1}{6} \left( k^2 \cos \theta_0 - \frac{k}{l_1} \sin \theta_0 \right) (l - l_0)^3 + \frac{1}{24} \left( k^3 \sin \theta_0 + \frac{3k^2}{l_1} \cos \theta_0 \right) (l - l_0)^4, \quad (18)$$

$$y(l) = y(l_0) + \sin \theta_0 (l - l_0) + \frac{k}{2} \cos \theta_0 (l - l_0)^2 - \frac{1}{6} \left( k^2 \sin \theta_0 + \frac{k}{l_1} \cos \theta_0 \right) (l - l_0)^3 - \frac{1}{24} \left( k^3 \cos \theta_0 - \frac{3k^2}{l_1} \sin \theta_0 \right) (l - l_0)^4, \quad (19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} l_0 &= l_1 + l_2, \\ \theta_0 &= \theta(l_1 + l_2). \end{aligned}$$

## 5. ZASTOSOWANIE ODCINKÓW KRZYWIZNY NIELINIOWEJ

### 5.1. Rozwiązanie problemu dla strefy początkowej i środkowej

Przyjmujemy warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(0) = 0 & k(l_1) = k \\ k'(0) = C \frac{k}{l_1} & k'(l_1) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

i równanie różniczkowe:

$$k^{(4)}(l) = 0, \quad (21)$$

zakładając, że współczynnik liczbowy  $C \geq 0$ .

W wyniku rozwiązania problemu różniczkowego (20), (21) otrzymujemy:

$$k(l) = \frac{Ck}{l_1} l - \frac{(2C-3)k}{l_1^2} l^2 + \frac{(C-2)k}{l_1^3} l^3, \quad (22)$$

a funkcja kąta nachylenia stycznej  $\theta(l)$  jest opisana zależnością:

$$\theta(l) = \frac{Ck}{2l_1} l^2 - \frac{(2C-3)k}{3l_1^2} l^3 + \frac{(C-2)k}{4l_1^3} l^4. \quad (23)$$

Jeśli chcemy uzyskać monotoniczny przebieg krzywizny  $k(l)$  na całej długości krzywej, wówczas pochodna  $k'(l)$  musi być dodatnia i jednocześnie druga pochodna  $k''(l)$  ujemna dla  $l \in \langle 0, l_1 \rangle$ . Jak wykazano w pracy [10], warunki te są spełnione dla parametru  $C$  z przedziału  $C \in \langle 1,5; 3 \rangle$ . Z uwagi na relację długości krzywej parametrycznej do długości krzywej o krzywiznie liniowej najkorzystniejszym rozwiązaniem wydaje się być parametryczna krzywa przejściowa dla wartości  $C = 1,5$ . Z zależności (22) i (23) otrzymujemy:

$$k(l) = \frac{3k}{2l_1} l - \frac{k}{2l_1^3} l^3, \quad (24)$$

$$\theta(l) = \frac{3k}{4l_1} l^2 - \frac{k}{8l_1^3} l^4. \quad (25)$$

Wykorzystując procedurę przedstawioną w pracy [5], otrzymujemy następujące równania parametryczne:

$$x(l) = l - \frac{9k^2}{160l_1^2} l^5 + \frac{3k^2}{224l_1^4} l^7 + \left( \frac{27k^4}{18432l_1^4} - \frac{k^2}{1152l_1^6} \right) l^9 + \dots, \quad (26)$$

$$y(l) = \frac{k}{4l_1} l^3 - \frac{k}{40l_1^3} l^5 - \frac{9k^3}{896l_1^3} l^7 + \frac{k^3}{256l_1^5} l^9 + \dots. \quad (27)$$

Sposób wyznaczenia równania łuku kołowego, w postaci funkcji jawnej  $y(x)$ , został przedstawiony w punkcie 4.2.

## 5.2. Rozwiązanie problemu dla strefy końcowej

Przyjmujemy warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(l_1 + l_2) = k & k(l_1 + l_2 + l_3) = 0 \\ k'(l_1 + l_2) = 0 & k'(l_1 + l_2 + l_3) = -C \frac{k}{l_1} \end{cases} \quad (28)$$

i równanie różniczkowe (21). Rozwiązanie problemu różniczkowego (21), (28) jest następujące:

$$k(l) = c_1 + c_2 l + c_3 l^2 + c_4 l^3, \quad (29)$$

przy czym dla  $C = 1,5$  wartości współczynników liczbowych wynoszą:

$$c_1 = k - \left[ \frac{3}{2l_1^2} (l_1 + l_2)^2 + \frac{1}{2l_1^3} (l_1 + l_2)^3 \right] k,$$

$$c_2 = \left[ \frac{3}{l_1^2} (l_1 + l_2) + \frac{3}{2l_1^3} (l_1 + l_2)^2 \right] k,$$

$$c_3 = - \left[ \frac{3}{2l_1^2} + \frac{3}{2l_1^3} (l_1 + l_2) \right] k,$$

$$c_4 = \frac{1}{2l_1^3} k,$$

a równanie kąta nachylenia stycznej ma postać:

$$\theta(l) = c_0 + c_1 l + \frac{1}{2} c_2 l^2 + \frac{1}{3} c_3 l^3 + \frac{1}{4} c_4 l^4, \quad (30)$$

gdzie:

$$c_0 = -\frac{3k}{8} l_1 + \left[ \frac{1}{2l_1^2} (l_1 + l_2)^3 + \frac{1}{8l_1^3} (l_1 + l_2)^4 \right] k.$$

Po rozwinięciu funkcji  $\cos \theta(l)$  i  $\sin \theta(l)$  w szereg Taylora z wykorzystaniem programu Maxima [12] i scałkowaniu poszczególnych wyrazów otrzymujemy równania parametryczne:



$$x(l) = x(l_0) + \cos \theta_0 (l - l_0) - \frac{k}{2} \sin \theta_0 (l - l_0)^2 - \frac{k^2}{6} \cos \theta_0 (l - l_0)^3 + \frac{k^3}{24} \sin \theta_0 (l - l_0)^4 + \frac{k^4}{120} \cos \theta_0 (l - l_0)^5, \quad (31)$$

$$y(l) = y(l_0) + \sin \theta_0 (l - l_0) + \frac{k}{2} \cos \theta_0 (l - l_0)^2 - \frac{k^2}{6} \sin \theta_0 (l - l_0)^3 - \frac{k^3}{24} \cos \theta_0 (l - l_0)^4 + \frac{k^4}{120} \sin \theta_0 (l - l_0)^5, \quad (32)$$

gdzie:

$$l_0 = l_1 + l_2,$$

$$\theta_0 = \theta(l_1 + l_2).$$

## 6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

Zakładamy poszerzenie międzytorza (np. z uwagi na występujący peron wyspowy) o wartość 12 m na odcinku linii kolejowej przewidzianej do jazdy pociągów z prędkością  $V = 120$  km/h. Rozwiązanie problemu będzie polegało na zastosowaniu dwóch krzywych odwrotnych, posiadających w swojej części środkowej odcinki łuku kołowego, a w rejonach skrajnych odcinki o zmiennej krzywiznie (zostanie rozpatrzony przypadek zastosowania krzywizny liniowej i przypadek krzywizny nieliniowej). Minimalny promień łuku kołowego w części środkowej oblicza się za pomocą wzoru:

$$R_{min} = \left(\frac{V}{3,6}\right)^2 \frac{1}{a_{dop}}. \quad (33)$$

Przyjmując dopuszczalną wartość przyspieszenia niezrównoważonego  $a_{dop} = 0,85$  m/s<sup>2</sup>, otrzymujemy wartość  $R_{min} = 1307$  m. W przeprowadzonych dalej obliczeniach przyjmujemy jako wyjściowy promień łuku kołowego  $R = 1300$  m.

### 6.1. Zastosowanie odcinków krzywizny liniowej

Długości odcinków krzywizny liniowej wyznacza się z zależności:

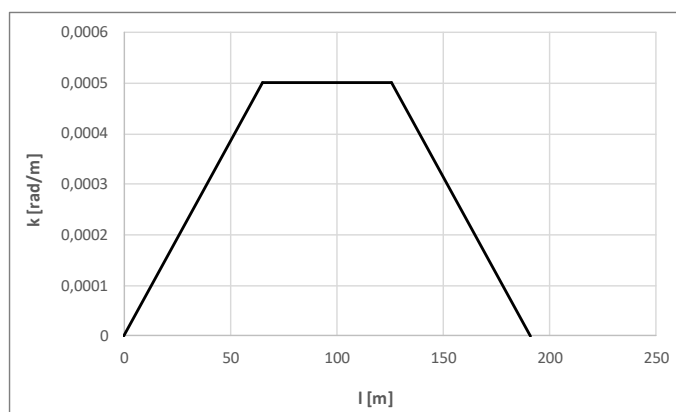
$$l_1 \geq \left(\frac{V}{3,6}\right)^3 \frac{1}{R \psi_{dop}}. \quad (34)$$

Przyjmując dopuszczalną wartość przyrostu przyspieszenia  $\psi_{dop} = 0,3$  m/s<sup>3</sup> (jak dla pojedynczych krzywych przejściowych o krzywiznie liniowej) otrzymujemy warunek, że  $l_1 \geq 94,967$  m. W przeprowadzonych obliczeniach przyjmujemy jako wyjściowe długości odcinków skrajnych  $l_1 = l_3 = 95$  m. W tabeli 1 przedstawiono tok prowadzonego postępowania obliczeniowego.

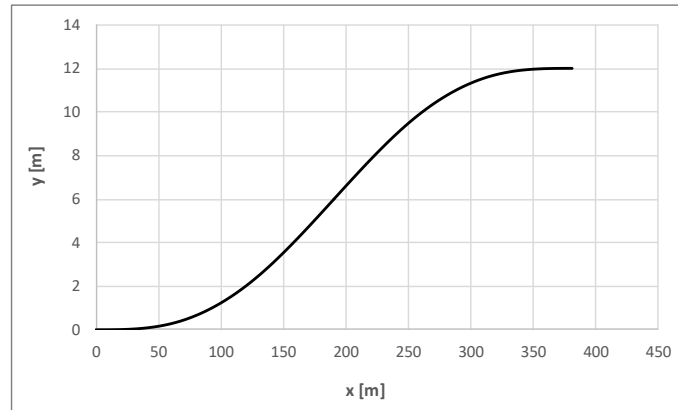
Tab. 1. Zestawienie wielkości charakterystycznych dla kolejnych generowanych wariantów przy zastosowaniu odcinków krzywizny liniowej

Lp	R [m]	$l_1$ [m]	$l_2$ [m]	$l = l_1$		$l = l_1 + l_2$		$l = l_1 + l_2 + l_3$	
				$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]	$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]	$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]
1	1300	95	100	94,987	1,157	194,682	8,648	288,788	21,699
2	1500	85	100	84,993	0,803	184,785	6,964	269,238	16,624
3	1700	75	100	74,996	0,551	174,849	5,695	249,509	12,854
4	2000	65	100	64,998	0,352	164,903	4,475	229,711	9,481
5	2000	65	80	64,998	0,352	144,940	3,251	209,795	7,608
6	2000	65	70	64,998	0,352	134,995	2,714	199,831	6,747
7	2000	65	61	64,998	0,352	125,966	2,273	190,859	6,0140
8	2000	65	60,9	64,988	0,352	125,866	2,269	190,759	6,0061
9	2000	65	60,83	64,988	0,352	125,796	2,265	190,689	6,0005
10	2000	65	60,823	64,988	0,352	125,789	2,265	190,682	6,0000

Dla przyjętych  $R = 1300$  m,  $l_1 = l_3 = 95$  m oraz  $l_2 = 100$  m wyznaczamy rzędną końcową  $y(l_1 + l_2 + l_3)$ . Wynosi ona 21,699 m, czyli znacznie odbiega od wymaganej wartości 6 m (czyli połowy założonego poszerzenia międzytorza). Jak się okazuje, podstawowym sposobem jej zmniejszenia jest zwiększenie promienia  $R$ . Jest to okoliczność bardzo korzystna, która jednocześnie stwarza możliwość zmniejszenia długości odcinków skrajnych. W sposób iteracyjny dochodzimy do promienia  $R = 2000$  m i odpowiadających długości  $l_1 = l_3 = 65$  m, dla których rzędna końcowa wynosi 9,481 m. Dalszą redukcję tej rzędnej uzyskujemy przez zmniejszanie długości  $l_2$ . Odpowiednio ją korygując, metodą prób, znajdujemy rozwiązanie, dla którego rzędna końcowa wynosi 6 m. W naszym przypadku następuje to dla  $l_2 = 60,823$  m. Wykres krzywizny na długości wyznaczonej krzywej poszerzenia pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Wykres krzywizny z odcinkami liniowymi na długości wyznaczonej krzywej poszerzenia międzytorza ( $R = 2000$  m,  $l_1 = 65$  m,  $l_2 = 60,823$  m,  $l_3 = 65$  m)



Rys. 4. Wykres rzędnych poziomych na długości rozpatrywanego poszerzenia międzytorza

Druga krzywa poszerzenia międzytorza (o odwrotnej krzywiznie) powstanie w wyniku podwójnego odbicia lustrzanego pierwszej krzywej: najpierw względem prostej prostopadłej przechodzącej przez środek całego układu, a następnie względem prostej równoległej poprowadzonej przez rzędną w środku układu. Całość poszerzenia międzytorza dla rozpatrywanego przypadku (o sumarycznej długości w osi toru 381,646 m, a w rzucie na oś odciętych 381,365 m) pokazano na rysunku 4.

## 6.2. Zastosowanie odcinków krzywizny nieliniowej

Na długości odcinków krzywizny nieliniowej (przy współczynniku  $C = 1,5$ ) występuje przyspieszenie poprzeczne  $a(l)$  opisane wzorem:

$$a(l) = \left(\frac{V}{3,6}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{3}{2 l_1} l - \left(\frac{V}{3,6}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{1}{2 l_1^3} l^3.$$

Wartość  $\psi = \frac{V}{3,6} \frac{d}{dt} a(l)$  jest tutaj zmienna na długości. Obowiązuje zatem warunek:

$$\psi_{max} = \max \left[ \left(\frac{V}{3,6}\right)^3 \frac{1}{R} \frac{3}{2 l_1} - \left(\frac{V}{3,6}\right)^3 \frac{1}{R} \frac{3}{2 l_1^3} l^2 \right] \leq 1,5 \psi_{dop}.$$

Zwiększenie o 50% normatywnej wartości dopuszczalnej  $\psi_{dop}$  wynika z tego, że wartość  $\psi_{max}$  występuje tylko w jednym punkcie (dla  $l = 0$ ), a następnie maleje, osiągając na końcu odcinka (dla  $l = l_1$ ) wartość zerową. Dla punktu początkowego:

$$\psi_{max} = \left(\frac{V}{3,6}\right)^3 \frac{1}{R} \frac{3}{2 l_1} \leq 1,5 \psi_{dop}.$$

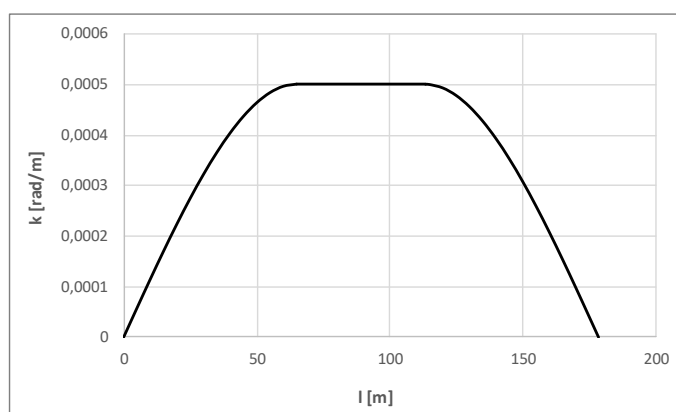
Wynika stąd taki sam wzór na minimalną długość odcinka skrajnego jak dla krzywizny liniowej. Oznacza to, że zwiększeniu o 50% wartości  $\psi_{dop}$  odpowiadała większa o 50% (w stosunku do występującej na krzywiznie liniowej) wartość  $\psi_{max}$ .

W tej sytuacji w przeprowadzonych obliczeniach przyjmujemy jako wyjściowe takie same wartości parametrów geometrycznych, jak w punkcie 6.1, tj. promień łuku kołowego  $R = 1300$  m oraz długości odcinków skrajnych  $l_1 = l_3 = 95$  m. W tabeli 2 przedstawiono tok prowadzonego postępowania obliczeniowego.

Dla przyjętych wartości wyjściowych obliczona rzędna końcowa wynosi 25,014 m. Tak jak poprzednio zwiększamy iteracyjnie promień łuku kołowego, dochodząc do wartości  $R = 2000$  m i odpowiadających długości  $l_1 = l_3 = 65$  m; dla tych danych rzędna końcowa wynosi 10,624 m. Dalszą redukcję tej rzędnej uzyskujemy przez zmniejszanie długości  $l_2$ . Metodą prób znajdujemy rozwiązanie, dla którego rzędna końcowa wynosi 6 m. Następuje to dla  $l_2 = 48,521$  m. Wykres krzywizny na długości wyznaczonej krzywej poszerzenia pokazano na rysunku 5.

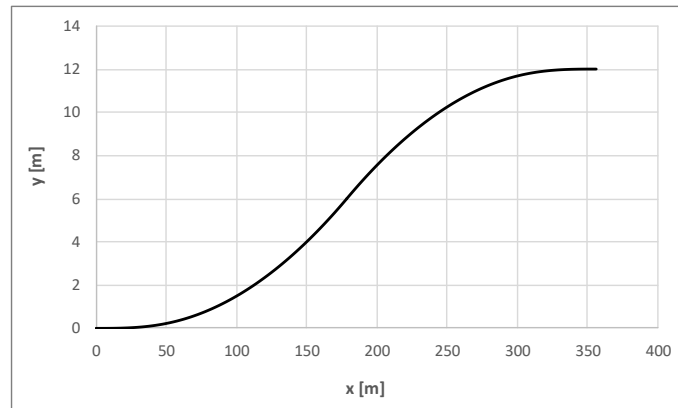
Tab. 2. Zestawienie wielkości charakterystycznych dla kolejnych generowanych wariantów przy zastosowaniu odcinków krzywizny nieliniowej

Lp	R [m]	l <sub>1</sub> [m]	l <sub>2</sub> [m]	l = l <sub>1</sub>		l = l <sub>1</sub> + l <sub>2</sub>		l = l <sub>1</sub> + l <sub>2</sub> + l <sub>3</sub>	
				x(l) [m]	y(l) [m]	x(l) [m]	y(l) [m]	x(l) [m]	y(l) [m]
1	1300	95	100	94,978	1,562	194,599	9,963	288,378	25,0140
2	1500	85	100	84,988	1,084	184,785	7,952	269,000	19,0050
3	1700	75	100	74,994	0,774	174,817	6,439	249,370	14,5570
4	2000	65	100	64,997	0,475	164,884	5,005	229,638	10,6240
5	2000	65	80	64,997	0,475	144,927	3,699	209,733	8,6710
6	2000	65	50	64,997	0,475	114,969	2,116	179,843	6,1140
7	2000	65	49	64,997	0,475	113,970	2,071	178,846	6,0370
8	2000	65	48,6	64,987	0,475	113,570	2,053	178,477	6,0061
9	2000	65	48,53	64,987	0,475	113,500	2,050	178,377	6,0007
10	2000	65	48,521	64,987	0,475	113,491	2,049	178,368	6,0000



Rys. 5. Wykres krzywizny z odcinkami nieliniowymi na długości wyznaczonej krzywej poszerzenia międzytorza ( $R = 2000$  m,  $l_1 = 65$  m,  $l_2 = 48,521$  m,  $l_3 = 65$  m)

Całość poszerzenia międzytorza dla rozpatrywanego przypadku (o sumarycznej długości w osi toru 357,042 m, a w rzucie na oś odciętych 356,737 m) została przedstawiona na rysunku 6.



Rys. 6. Wykres rzędnych poziomych na długości rozpatrywanego poszerzenia międzytorza z odcinkami krzywizny nieliniowej (tab. 2 poz. 10 – w skali skażonej)

### 6.3. Porównanie uzyskanych rozwiązań

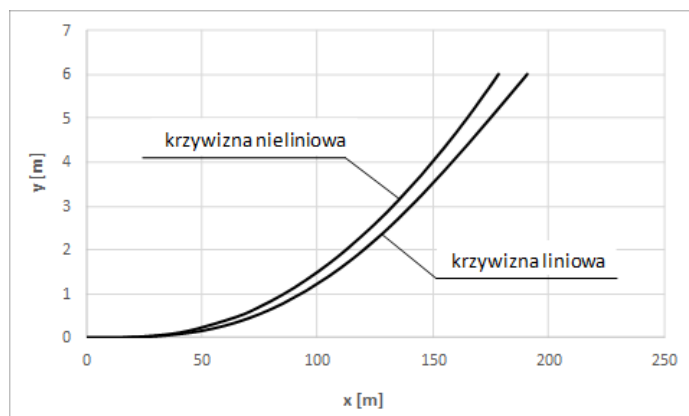
Zaproponowana metoda projektowania umożliwia wyznaczenie współrzędnych kartezjańskich krzywych poszerzenia torów z dowolnym krokiem obliczeniowym. Wizualizacja uzyskanych rozwiązań na rysunkach 4 i 6 może służyć jedynie ogólnej orientacji. Ponieważ jednak rozwiązania te dotyczą takich samych wymagań eksploatacyjnych (tj. tej samej prędkości jazdy pociągów), można się pokusić o pewne porównania.

Tab. 3. Zestawienie porównawcze wielkości charakterystycznych dla wybranych wariantów przy zastosowaniu odcinków krzywizny liniowej i nieliniowej (pogrubione)

Lp	R [m]	l <sub>1</sub> [m]	l <sub>2</sub> [m]	l = l <sub>1</sub>		l = l <sub>1</sub> + l <sub>2</sub>		l = l <sub>1</sub> + l <sub>2</sub> + l <sub>3</sub>	
				x(l) [m]	y(l) [m]	x(l) [m]	y(l) [m]	x(l) [m]	y(l) [m]
1	1300	95	100	94,987 <b>94,978</b>	1,157 <b>1,562</b>	194,682 <b>194,599</b>	8,648 <b>9,963</b>	288,788 <b>288,378</b>	21,699 <b>25,014</b>
2	1500	85	100	84,993 <b>84,988</b>	0,803 <b>1,084</b>	184,785 <b>184,785</b>	6,964 <b>7,952</b>	269,238 <b>269,000</b>	16,624 <b>19,005</b>
3	1700	75	100	74,996 <b>74,994</b>	0,551 <b>0,774</b>	174,849 <b>174,817</b>	5,695 <b>6,439</b>	249,509 <b>249,370</b>	12,854 <b>14,557</b>
4	2000	65	100	64,998 <b>64,997</b>	0,352 <b>0,475</b>	164,903 <b>164,884</b>	4,475 <b>5,005</b>	229,711 <b>229,638</b>	9,481 <b>10,624</b>
5	2000	65	60,823	64,988	0,352	125,796	2,265	190,682	6,000
6	2000	65	<b>48,521</b>	<b>64,987</b>	<b>0,475</b>	<b>113,491</b>	<b>2,049</b>	<b>178,368</b>	<b>6,000</b>

Jeśli chodzi o przebieg wykresu krzywizny, to dla krzywizny liniowej jest on korzystniejszy w rejonach początkowym i końcowym (rys. 3), natomiast dla krzywizny nieliniowej – w rejonach wejścia w łuk kołowy (rys. 5). Rozwiązanie z krzywizną nieliniową jest krótsze; jego sumaryczna długość w osi toru wynosi 357,042 m, podczas gdy dla rozwiązania z krzywizną liniową 381,646 m.

Jednak na szczególną uwagę zasługuje kwestia rzędnych poziomych w strefie początkowej poszerzenia. Z tabeli 3, zawierającej zestawienie porównawcze odpowiednich wielkości charakterystycznych, wynika, że zastosowanie krzywizny nieliniowej daje większe wartości rzędnych poziomych przy zachowaniu zbliżonych wartości odciętych. Widać to wyraźnie na rysunku 7. Większe wartości rzędnych w strefie początkowej poszerzenia dla rozwiązania z odcinkami krzywizny nieliniowej stanowią korzystny czynnik z punktu widzenia względów utrzymaniowych.



Rys. 7. Wykresy rzędnych poziomych na długości pierwszej krzywej poszerzenia międzytorza z odcinkami krzywizny liniowej i nieliniowej (w skali skażonej)

## 7. PODSUMOWANIE

Opracowane w latach 70. ubiegłego wieku przez prof. Henryka Bałucha zasady projektowania poszerzeń międzytorzy utrwaliły się w naszym kraju na długie lata i wciąż zachowują aktualność. Warto by jednak podjąć próbę nowego podejścia do zagadnienia, uwzględniającego chociażby ogromny postęp, jaki na przestrzeni blisko półwiecza nastąpił w zakresie techniki obliczeniowej.

W tej sytuacji postawiono tezę, że poszerzenie międzytorza należy uformować przy zastosowaniu dwóch połączonych krzywych o odpowiednim rozkładzie krzywizny na długości, posiadających przeciwne znaki krzywizny (tj. łuków odwrotnych). Zakładamy że na długości poszerzenia występują w strefach skrajnych obydwu krzywych odcinki zmiennej krzywizny, a w strefie środkowej krzywizna jest stała (czyli występuje tam łuk kołowy). Uzyskanie poprawnego rozwiązania wy-

maga spełnienia warunków kinematycznych oraz wyznaczenia rzędnej końcowej równej połowie założonej wartości poszerzenia.

Do rozwiązania problemu wykorzystano analityczną metodę projektowania, z identyfikacją rozkładu krzywizny za pomocą równań różniczkowych oraz matematycznym zapisem rzędnych w poszczególnych strefach krzywej poszerzenia. Rozpatrzono dwa przypadki rozkładu zmiennej krzywizny: liniowy i nieliniowy (wielomianowy). Uzyskane rozwiązania mają charakter uniwersalny i pozwalają na przyjmowanie dowolnych wartości krzywizny w strefie łuku kołowego oraz dowolnych długości poszczególnych stref.

Uzyskanie określonej rzędnej końcowej poszerzenia torów wymaga sekwencyjnego korygowania przyjętych parametrów geometrycznych. W pracy pokazano dwa przykłady odpowiedniego toku postępowania – dla odcinków krzywizny liniowej i nieliniowej. Wykazano, że przy zwiększeniu o 50% normatywnej wartości dopuszczalnej  $\psi_{dop}$  dla odcinków krzywizny nieliniowej rozwiązania posiadające taką krzywiznę są krótsze, natomiast wartości rzędnych poziomych w strefie początkowej poszerzenia dla tych rozwiązań większe niż dla rozwiązania z odcinkami krzywizny liniowej; stanowi to korzystny czynnik uwarunkowany względami utrzymaniowymi.

## LITERATURA

- [1] AutoCAD, <http://www.autodesk.pl>.
- [2] Bałuch H., Analiza i wytyczne projektowania zmian układu geometrycznego torów na liniach przystosowanych do dużych prędkości pociągów, prace COBiRTK, zeszyt 45, 1972.
- [3] Bałuch H., Optymalizacja układów geometrycznych toru. WKŁ, Warszawa 1983.
- [4] High speed and the city. Report UIC, Paris 2010.
- [5] Koc W., Analytical method of modelling the geometric system of communication route, Mathematical Problems in Engineering 2014, Vol. 2014, Article ID 679817.
- [6] Koc W., Design of rail-track geometric systems by satellite measurement, Journal of Transportation Engineering, ASCE 2012, Vol. 138, No. 1, January 1, s. 114-122 2012.
- [7] Koc W., Design of reverse curves adapted to the satellite measurements, Advances in Civil Engineering 2016, Article ID 6503962, 9 pages.
- [8] Koc W., Kształtowanie toru zwrotnego rozjazdu z odcinkami krzywizny liniowej, Problemy Kolejnictwa 2017, tom 61, z. 174, s. 35-45.
- [9] Koc W., The analytical design method of railway route's main directions intersection area, Open Engineering 2016, 6, Iss. 1 (Jan), s. 1-9.
- [10] Koc W., Zastosowanie odcinków nieliniowej krzywizny w torze zwrotnym rozjazdu kolejowego, Przegląd Komunikacyjny 2017 (72), 7, s. 27-31.
- [11] Koc W., Palikowska K., Dynamic analysis of the turnout diverging track for HSR with variable curvature sections, World Journal of Engineering and Technology 2017, 5, s. 42-57.
- [12] Maxima package, <http://maksima.sourceforge.net>.
- [13] MicroStation, <http://www.bentley.com>.

- [14] Nowakowski M. J., Projektowanie poszerzeń międzytorzy w aspekcie zmian dopuszczalnych wartości parametrów geometrycznych i kinematycznych, *Przegląd Komunikacyjny* 2015 (70), 9, s. 15-18.
- [15] Ping W., *Design of high-speed railway turnouts. Theory and Applications*, Academic Press, Published by Elsevier Inc., 2015.
- [16] *Technical Memorandum: Alignment design standards for high-speed train operation*, Prepared by Parsons Brinckerhoff for the California High-Speed Rail Authority, USA, 2009.
- [17] Weizhu F., Major technical characteristics of high-speed turnout in France, *Journal of Railway Engineering Society* 2009, 9, s. 18-35.

## **WIDENING OF INTERTRACK SPACE IN AN ANALYTICAL DESIGN METHOD**

### **Summary**

This paper presents a new approach to widening of intertrack space. A thesis was formulated that the widening should be formed using two combined curves with appropriate distribution of curvature along its length. On the length of the widening in the extreme zones of the two curves the sections of the variable curvature were assumed. However, the curvature in the central zone was taken as constant. To solve the issue the analytical method of designing was used. An identification of the curvature distribution was implemented through differential equations and mathematical description of ordinates in the individual zones of the curve widening. Two cases of variable distribution curvature were considered: linear and non-linear (polynomial). Obtaining a specific ordinate of the final widening requires sequential correction of adopted geometrical parameters.

Keywords: widening the space between the tracks, curvature modeling, analysis of horizontal ordinates.

Dane autora:

Prof. dr hab. inż. Władysław Koc

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Katedra Transportu Szynowego i Mostów

e-mail: [wladyslaw.koc@pg.gda.pl](mailto:wladyslaw.koc@pg.gda.pl)

telefon: +48 58 347 1026