MINUT 2023 (5), s. 37–55
ISSN 2719-3063

Lech BARTŁOMIEJCZYK[1], Jakub J. LUDEW[1], Michał RÓŻAŃSKI[1], Adrian SMUDA[1], Roman WITUŁA[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Równania rekurencyjne, szeregi oraz iloczyny nieskończone – zadania i problemy II

Streszczenie. W prezentowanej części drugiej pracy (w przygotowaniu jest już trzecia część pracy) przedstawiamy rozwiązania (pełne, bądź częściowe) wielu zadań i problemów z części pierwszej tej pracy. W wybranych rozwiązaniach sformułowano nowe zadania i problemy badawcze.

Słowa kluczowe: ciągi, równania rekurencyjne, monotoniczność, punkty skupienia, granice, przebieg zmienności funkcji, szeregi liczbowe, iloczyny nieskończone, nierówności dla sum szeregów, wartości iloczynów nieskończonych.

W wszystkich trzech częściach stosujemy następujące standardowe oznaczenia:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \mathbb{Z} = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}\},$$

$\mathbb{Q}$ − zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ − zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}_+ := \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$,

$$\mathbf{z} := \left\{\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right\}, \quad \mathbf{r} := \left\{\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ : \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right\},$$

$$\mathbf{z}_0 = \left\{\{a_n\} \subset (0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right\}, \quad \mathbf{r}_0 = \left\{\{a_n\} \subset (0,1) : \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right\},$$

gdzie dla ciągów nieskończonych: $a_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, stosujemy specjalne oznaczenie: $\{a_n\}$. Ponadto zapis: $\{a_n\} \subset X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, oznacza, że $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \in X$. W sytuacji niebudzącej wątpliwości dla szeregów liczbowych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (odpowiednio $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$) będziemy stosować uproszczony zapis $\sum a_n$ (odpowiednio $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$). Piszemy też dla zwięzłości zapisu, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem zerowym, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, czyli gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do zera.

Podkreślmy, że w prezentowanych rozwiązaniach zadań z części pierwszej pracy korzystano wybiórczo z literatury cytowanej w treściach odpowiednich zadań, zamieszczonej w części pierwszej pracy.

Autor korespondencyjny: M. Różański (michal.rozanski@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 23.11.2022.

1. Z definicji ciągu $\{x_n\}$ wynika zależność:

$$x_{n+1} - x_n = |x_n|^\beta - x_n - \delta^\beta + \delta. \tag{1}$$

Rozważmy funkcję:

$$f(x) := |x|^\beta - x - \delta^\beta + \delta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Po zróżniczkowaniu dostajemy:

$$f'(x) = \beta \operatorname{sgn}(x)|x|^{\beta-1} - 1 = \begin{cases} \beta x^{\beta-1} - 1, & x \geqslant 0, \\ -\beta(-x)^{\beta-1} - 1, & x < 0, \end{cases}$$

skąd wynika, że funkcja f' jest malejąca w półosi $(-\infty, \beta^{-\frac{1}{\beta-1}})$ i rosnąca w półosi $[\beta^{-\frac{1}{\beta-1}}, \infty)$.

Połóżmy $x_0 =: \beta^{-\frac{1}{\beta-1}}$. Ponieważ $f(\delta) = 0$ i $x_0 < \delta$ więc funkcja $f(x)$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste: jeden to δ, drugi oznaczymy przez γ. Oczywiście $\gamma < x_0$. Z powyższych rozważań o pierwiastkach funkcji $f(x)$ oraz z (1) otrzymujemy, że jeśli dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny, to musi zachodzić $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$ albo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \delta$.

Pokażemy, że:

$$\begin{cases} \text{w przypadku, gdy } \delta > x_0 \text{ oraz ciąg } \{x_n\} \text{ jest zbieżny do } \delta, \\ \text{to istnieje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takie, że } x_{n_0} = \delta. \end{cases} \tag{2}$$

W tym celu zauważmy, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_n \neq \delta$, to na podstawie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zachodzi równość:

$$x_{n+1} - \delta = |x_n|^\beta - \delta^\beta = x_n^\beta - \delta^\beta = \beta(x_n^*)^{\beta-1}(x_n - \delta), \tag{3}$$

gdzie $x_n^* \in (x_n, \delta)$ jeśli $x_n < \delta$ lub $x_n^* \in (\delta, x_n)$ jeśli $\delta < x_n$. Gdyby dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodziło $x_n \neq \delta$, to mielibyśmy określony ciąg $\{x_n^*\}$. Oczywiście $x_n^* \to \delta$, a stąd, wobec ciągłości funkcji potęgowej, mamy $\beta(x_n^*)^{\beta-1} \to \beta\delta^{\beta-1}$. Ale $\beta\delta^{\beta-1} > \beta(x_0)^{\beta-1} = 1$, więc na podstawie wzoru (3) zbieżność $x_n \to \delta$ jest możliwa tylko gdy $x_n = \delta$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_{n_0} = \delta$.

Teraz, w oparciu o własność (2) przystąpimy do znalezienia wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \delta$ przy założeniu, że $\delta \geqslant 2^{\frac{1}{\beta-1}}$. Rozważmy równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = \delta.$$

Jego rozwiązania rzeczywiste tworzą liczby $\pm\delta$. Rozważmy kolejne równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = -\delta,$$

czyli:

$$|x|^\beta = \delta^\beta - 2\delta \geqslant 0.$$

Jego rozwiązania rzeczywiste tworzą liczby $\pm(\delta^\beta - 2\delta)^{\frac{1}{\beta}}$. Ogólnie, rozważmy równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = c,$$

gdzie $|c| < \delta$. Można je zapisać następująco:

$$|x|^\beta = \delta^\beta - \delta + c,$$

skąd otrzymujemy, że $x = \pm(\delta^\beta - \delta + c)^{\frac{1}{\beta}}$. Oczywiście $(\delta^\beta - \delta + c)^{\frac{1}{\beta}} < (\delta^\beta)^{\frac{1}{\beta}} = \delta$. Podsumowując, ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do δ dokładnie wtedy, gdy:

$$\alpha \in \left\{ \pm\delta, \pm(\delta^\beta - 2\delta)^{\frac{1}{\beta}}, \ldots, \pm\underbrace{(\delta^\beta - \delta \pm (\ldots(\delta^\beta - \delta \pm (\delta^\beta - 2\delta)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\beta}}}_{\text{iteracja dowolną skończoną ilość razy}} \ldots)^{\frac{1}{\beta}}, \ldots \right\}.$$

W kolejnym kroku dowodu pokażemy, że:

$$\begin{cases} \text{gdy } \delta \geqslant 2^{\frac{1}{\beta-1}} \text{ oraz ciąg } \{x_n\} \text{ jest zbieżny do } \gamma, \\ \text{to dla pewnego } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mamy } x_{n_0} = \gamma. \end{cases} \tag{4}$$

Najpierw udowodnimy, że:

$$\text{jeśli } \delta \geqslant 2^{\frac{1}{\beta-1}}, \text{ to } \gamma < -x_0. \tag{5}$$

W tym celu wystarczy pokazać, że $f(-x_0) < 0$. Dla $\delta \geqslant 2^{\frac{1}{\beta-1}}$ mamy:

$$f(-x_0) = x_0^\beta + x_0 - \delta^\beta + \delta \leqslant x_0^\beta + x_0 - 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} + 2^{\frac{1}{\beta-1}} = x_0^\beta + x_0 - 2^{\frac{1}{\beta-1}} = \frac{1 + \beta - \beta(2\beta)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\beta^{\frac{\beta}{\beta-1}}}. \tag{6}$$

Udowodnimy, że dla $\beta > 1$ zachodzi:

$$(2\beta)^{\frac{1}{\beta-1}} > 1 + \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow 2\beta > \frac{\beta}{\beta+1}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta \Leftrightarrow 2\beta + 2 > \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^\beta. \tag{7}$$

Rozważmy kolejną funkcję pomocniczą:

$$g(x) = 2x + 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 1.$$

Mamy:

$$g'(x) = 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

Dla $x > 1$ otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] &< e\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x} - 1}{1+x} < \frac{e}{2}(\ln 4 - 1) < \\ &< \frac{e}{2}0{,}4 = e \cdot 0{,}2 < 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 < 1, \end{aligned}$$

(albowiem funkcja $[1, \infty) \ni x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$ jest malejąca) skąd $g'(x) > 0$ dla $x > 1$. Ponieważ $g(1) = 2 > 0$, więc $g(x) > 0$ dla $x > 1$, co daje (7). Z (7) i (6) dostajemy, że $f(-x_0) < 0$, czyli $\gamma < -x_0$, a zatem implikacja (5) jest prawdziwa. Przypuśćmy, że dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n \to \gamma$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $x_n \neq \gamma$. Wówczas dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$, na mocy twierdzenia

Lagrange'a o wartości średniej dostajemy:

$$x_{n+1} - \gamma = |x_n|^\beta - \delta^\beta + \delta - \gamma = |x_n|^\beta - |\gamma|^\beta = (-x_n)^\beta - (-\gamma)^\beta = \beta(-x_n^*)^{\beta-1}(x_n - \gamma), \tag{8}$$

gdzie $x_n^* \in (x_n, \gamma)$, gdy $x_n < \gamma$ lub $x_n^* \in (\gamma, x_n)$, gdy $\gamma < x_n$. Oczywiście $x_n^* \to \gamma$, a stąd $\beta(-x_n^*)^{\beta-1} \to \beta(-\gamma)^{\beta-1}$. Z (5) mamy $-\gamma > x_0$, więc $\beta(-\gamma)^{\beta-1} > \beta x_0^{\beta-1} = 1$, a zatem wobec tożsamości (8) zachodzi $x_n \to \gamma$ tylko gdy $x_n = \gamma$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem. Tym samym pokazaliśmy prawdziwość implikacji (4). Własność (4) pozwala też znaleźć wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$ dla których $x_n \to \gamma$. W tym celu rozważmy równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = \gamma,$$

czyli:

$$|x|^\beta = \delta^\beta - \delta + \gamma = \gamma^\beta,$$

skąd $x = \pm\gamma$. Rozważmy kolejne równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = -\gamma,$$

czyli:

$$|x|^\beta = \delta^\beta - \delta - \gamma > 0,$$

skąd $x = \pm(\delta^\beta - \delta - \gamma)^{\frac{1}{\beta}}$. Ponieważ $f(-\delta) = 2\delta > 0$, więc $-\delta < \gamma$, a stąd $(\delta^\beta - \delta - \gamma)^{\frac{1}{\beta}} < (\delta^\beta)^{\frac{1}{\beta}} = \delta$. Ogólnie, rozważmy równanie:

$$|x|^\beta - \delta^\beta + \delta = c,$$

gdzie $|c| < \delta$. Jego rozwiązania rzeczywiste mają postać:

$$x = \pm(\delta^\beta - \delta + c)^{\frac{1}{\beta}},$$

przy czym:

$$0 < \delta^\beta - 2\delta < \delta^\beta - \delta + c < \delta^\beta.$$

Podsumowując, dla $\delta \geqslant 2^{\frac{1}{1-\beta}}$ ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do γ dokładnie wtedy, gdy:

$$\alpha \in \left\{ \pm\gamma, \pm(\delta^\beta - \delta - \gamma)^{\frac{1}{\beta}}, \ldots, \pm(\underbrace{\delta^\beta - \delta \pm (\ldots \pm (\delta^\beta - \delta \pm (\delta^\beta - \delta - \gamma)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\beta}} \ldots)^{\frac{1}{\beta}}}_{\text{iteracja dowolną skończoną ilość razy}}, \ldots \right\}.$$

2. a) Niech $b := \sqrt[s+1]{a}$. Z definicji ciągu $\{x_n\}$ otrzymujemy związek:

$$x_{n+1} - b = (x_n - b)[\alpha - (1-\alpha) b f(x_n)], \tag{9}$$

gdzie $f(x) := \frac{x^s - b^s}{(x-b)x^s}$ gdy $x > 0$, $x \neq b$ oraz $f(x) = \frac{s}{b}$ gdy $x = b$.

Pokażemy, że funkcja f jest malejąca w półosi dodatniej. Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{sx^{2s-1}(x-b)-(x^s-b^s)[(s+1)x^s-sbx^{s-1}]}{(x-b)^2x^{2s}} = \\ &= \frac{(s+1)b^sx^s-sb^{s+1}x^{s-1}-x^{2s}}{(x-b)^2x^{2s}} = \frac{(s+1)b^sx-sb^{s+1}-x^{s+1}}{(x-b)^2x^{s+1}}, \quad x\neq b. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $g(x)$ licznik powyższego wyrażenia. Różniczkując funkcję g dostajemy:

$$g'(x) = (s+1)(b^s-x^s),$$

skąd wnosimy, że $g'(x)>0$ dla $x\in(0,b)$ i $g'(x)<0$ dla $x>b$, a to oznacza, że $g(x)$ jest rosnąca w przedziale $(0,b)$, a w przedziale (b,∞) jest malejąca. Ponieważ $g(b)=0$, więc $g(x)<0$ dla $x\in(0,b)\cup(b,\infty)$, czyli $f'(x)<0$ dla $x\in(0,b)\cup(b,\infty)$. Wobec ciągłości funkcji f wynika stąd, że f jest malejąca w półosi dodatniej, przy czym:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

Z założenia mamy, że $\alpha\geqslant\frac{s}{s+1}$, tj. $\alpha\geqslant(1-\alpha)s$, czyli $\alpha-(1-\alpha)bf(b)\geqslant0$.

Stąd i z (9):

$$\begin{cases} \text{jeśli } x>b, \text{ to dla każdego } n\in\mathbb{N} \text{ mamy } x_n>b \text{ oraz} \\ x_{n+1}-b<\alpha(x_n-b)<\alpha^n(x-b), \\ \text{co daje zbieżność } \lim\limits_{n\to\infty} x_n=b. \end{cases} \tag{10}$$

Gdy $\alpha=\frac{s}{s+1}$ i $x<b$, to z (9) wynika, że $x_2>b$ i dostajemy sytuację jak wyżej. Gdy $\alpha>\frac{s}{s+1}$ i $x<b$, to mamy trzy możliwości:

I: $\alpha>(1-\alpha)bf(x)$.

Wówczas $x_n<x_{n+1}<b$, $n\in\mathbb{N}$, skąd wobec (9) oraz na podstawie ciągłości funkcji f otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$. Pozostaje zauważyć, że:

$$b-x_{n+1}<\alpha(b-x_n)<\alpha^n(b-x).$$

II: $\alpha=(1-\alpha)bf(x)$.

Wówczas $x_n=b$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant2$.

III: $\alpha<(1-\alpha)bf(x)$.

Wówczas $x_2>b$ i dostajemy sytuację jak w (10), czyli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$. Jeśli $x=b$, to $x_n\equiv b$.

b) Wystarczy zauważyć, że gdy $s>1$ i $\alpha\in\left(0,\frac{s-1}{s+1}\right)$, to:

$$|\alpha-(1-\alpha)bf(b)| = |\alpha-(1-\alpha)s| = |\alpha(1+s)-s| = s-\alpha(1+s) > s-(s-1) = 1.$$

3. Rozpoczniemy od następującego lematu:

Lemat 1. *Funkcja:*

$$h(x;y,\beta) =: \begin{cases} \frac{x^\beta - y^\beta}{x-y}, & \text{gdy } x \neq y, \\ \beta y^{\beta-1}, & \text{gdy } x = y, \end{cases}$$

dla ustalonych $y, \beta \in (0,1)$ *jest malejąca w przedziale zmienności* $x \in [0,1]$.

Dowód. Ustalmy $y, \beta \in (0,1)$. Niech $f(x) := h(x;y,\beta)$. Mamy:

$$f'(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}(x-y) - x^\beta + y^\beta}{(x-y)^2}, \quad x \notin \{0, y\}.$$

Oznaczmy przez $g(x)$ licznik powyższego wyrażenia. Wówczas:

$$g'(x) = \beta^2 x^{\beta-1} - \beta(\beta-1)yx^{\beta-2} - \beta x^{\beta-1} = \beta(\beta-1)(x-y)x^{\beta-2}, \quad x \neq 0,$$

skąd wynika, że funkcja g jest rosnąca w przedziale $(0,y)$, a malejąca w przedziale $(y,1]$. Ponieważ $g(y) = 0$, więc $g(x) < 0$ dla $x \in (0,y) \cup (y,1]$. Z ostatniej uwagi otrzymujemy, że funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(0,y)$ oraz $(y,1]$, a stąd wobec ciągłości funkcji f wynika, że f jest malejąca w przedziale $[0,1]$. □

Niech $\alpha \in (0,1)$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$x_{2n-1} \in (0,1) \quad \text{i} \quad x_{2n} \in (1,2). \tag{11}$$

Istotnie, jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $x_n \in (0,1)$, to:

$$2 > 1 + x_n > (1-x_n)^\beta + x_n > (1-x_n) + x_n = 1,$$

czyli $2 > x_{n+1} > 1$. Gdy $x_n \in (1,2)$, to:

$$1 = x_n - (x_n - 1) > x_n - (x_n-1)^\beta > x_n - 1 > 0,$$

czyli $1 > x_{n+1} > 0$. Połóżmy $x_0 = 1 - 2^{-\frac{1}{1-\beta}}$. Można łatwo sprawdzić, że liczba x_0 jest rozwiązaniem równania:

$$(1-x)^\beta = 2(1-x). \tag{12}$$

Jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n = x_0$, to:

$$x_{n+t} = \begin{cases} x_0, & \text{gdy } t \in 2\mathbb{N}, \\ 2 - x_0, & \text{gdy } t \in 2\mathbb{N} - 1. \end{cases}$$

W szczególności, jeśli $x_n = 2 - x_0$, to $x_{n+1} = x_0$. Załóżmy więc, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n \neq x_0$ oraz $x_n \neq 2 - x_0$. Pokażemy, że wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności:

$$|x_{2n+1} - x_0| < |x_{2n} - (2 - x_0)| < |x_{2n-1} - x_0|. \tag{13}$$

Oznaczmy przez $f(x)$ funkcję $h(x; 1-x_0, \beta)$ zdefiniowaną w lemacie 1. Niech $x_n \in (0,1)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas znajdujemy:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 2 + x_0 = x_n + (1-x_n)^\beta - 2 + x_0 &\overset{(12)}{=} x_n - x_0 + (1-x_n)^\beta - (1-x_0)^\beta = \\ &= (x_n - x_0)[1 - f(1-x_n)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Ponieważ $0 < f(1-x_n) < f(0) = (1-x_0)^{\beta-1} \overset{(12)}{=} 2$, więc $-1 < 1 - f(1-x_n) < 1$, a stąd:

$$|x_{n+1} - 2 + x_0| < |x_n - x_0|. \tag{15}$$

Niech teraz $x_n \in (1,2)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_0 = x_n - (x_n - 1)^\beta - x_0 &\overset{(12)}{=} x_n - 2 + x_0 + (1-x_0)^\beta - (x_n-1)^\beta = \\ &= (x_n - 2 + x_0)[1 - f(x_n - 1)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Tak jak poprzednio pokazujemy, że:

$$-1 < 1 - f(x_n - 1) < 1,$$

skąd:

$$|x_{n+1} - x_0| < |x_n - 2 + x_0|. \tag{17}$$

Z (11), (15) i (17) dostajemy nierówności (13). Z (13), (11) i tego, że $x_0 \in (0,1)$ oraz $2 - x_0 \in (1,2)$ wynika, że liczby:

$$b_0 = \inf\{x_{2n-1}\}, \quad b_0' = \sup\{x_{2n-1}\}$$

oraz:

$$b_1 = \inf\{x_{2n}\} \quad \text{i} \quad b_1' = \sup\{x_{2n}\}$$

należą do przedziałów, odpowiednio $(0,1)$ i $(1,2)$. Niech:

$$M = \max\{|1 - f(1-b_0)|, |1 - f(1-b_0')|, |1 - f(b_1 - 1)|, |1 - f(b_1' - 1)|\}.$$

Ponieważ:

$$0 < f(1-b_0), f(1-b_0'), f(b_1-1), f(b_1'-1) < f(0) = 2,$$

więc $M < 1$. Z tożsamości (14) i (16) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\begin{aligned} &|x_{2n+1} - x_0| \leqslant M^{2n}|x_1 - x_0|, \\ &|x_{2n} - 2 + x_0| \leqslant M^{2n-1}|x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

co implikuje, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 2 - x_0$.

5. Łatwo sprawdzamy, że funkcja $f(x) =: \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ jest rosnąca w półosi dodatniej oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$. Ustalmy $\alpha \geqslant e$. Oznaczmy przez x_0 jedyny pierwiastek rzeczywisty równania $x = \alpha - f(x)$. Pokażemy, że:

   a) jeśli $\beta > x_0$, to $x_{2n-1} > x_0 > x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$,

   b) jeśli $\beta < x_0$, to $x_{2n-1} < x_0 < x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

W tym celu wystarczy zauważyć, że jeśli $x_n > x_0$, to $x_{n+1} = \alpha - f(x_n) < \alpha - f(x_0) = x_0$, a jeśli $x_n < x_0$, to $x_{n+1} = \alpha - f(x_n) > \alpha - f(x_0) = x_0$. W kolejnym kroku udowodnimy, że podciągi $\{x_{2n-1}\}$ oraz $\{x_{2n}\}$ są monotoniczne. Przypadek $x_0 = \beta$ jest oczywisty. Załóżmy, że $\beta > x_0$. Gdy $x_1 = x_3$, to $x_{2n-1} = x_1$ i $x_{2n} = x_2$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $x_1 > x_3$, to $x_{2n} < x_{2n+2} < x_0 < x_{2n+1} < x_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, natomiast gdy $x_1 < x_3$, to $x_{2n+2} < x_{2n}$ oraz $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n > x_{n+2}$, to:

$$x_{n+1} - x_{n+3} = f(x_{n+2}) - f(x_n) < 0,$$

czyli $x_{n+1} < x_{n+3}$; natomiast gdy $x_n < x_{n+2}$, to:

$$x_{n+1} - x_{n+3} = f(x_{n+2}) - f(x_n) > 0,$$

czyli $x_{n+1} > x_{n+3}$. Analogicznie pokazujemy monotoniczność podciągów $\{x_{2n-1}\}$ oraz $\{x_{2n}\}$ gdy $\beta < x_0$. Tym samym udowodniliśmy, że dla dowolnego $\beta > 0$ ciąg $\{x_n\}$ ma co najwyżej dwa punkty skupienia, oznaczymy je przez A, B, $A \leqslant B$ przy czym $A \leqslant x_0 \leqslant B$. Musi być $B < +\infty$ gdyż $x_n \leqslant \max\{\beta, \alpha\}, n \in \mathbb{N}$. Z ciągłości funkcji f i tego, że $f(x) < e$ mamy:

$$A = \alpha - f(B) > 0 \quad \text{i} \quad B = \alpha - f(A),$$

skąd w szczególności $B = \alpha - f(\alpha - f(B))$. Załóżmy teraz, że $\alpha \geqslant e + \frac{1}{2}$. Rozważmy funkcję:

$$g(x) := \alpha - f(\alpha - f(x)) - x.$$

Znajdujemy:

$$g'(x) = f'(\alpha - f(x))f'(x) - 1,$$

przy czym:

$$0 < f'(x) = f(x)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] < e\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

Funkcja $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ jest malejąca w półosi dodatniej, skąd dla $x > x_0$ mamy:

$$0 < f'(x) < \frac{2e}{3}\left(\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right),$$

gdyż z założenia $x_0 = \alpha - f(x_0) > \alpha - e \geqslant \frac{1}{2}$. Podobnie dla $x > x_0$ mamy:

$$0 < f'(\alpha - f(x)) < \frac{2e}{3}\left(\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right),$$

gdyż $\alpha - f(x) > \alpha - e \geqslant \frac{1}{2}$. Ostatecznie, dla $x > x_0$ zachodzi oszacowanie:

$$g'(x) < \left[\frac{2e}{3}\left(\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right)\right]^2 - 1.$$

Bezpośrednimi rachunkami sprawdzamy, że $\frac{2e}{3}\left(\frac{3}{2}\ln 3 - 1\right) < 1$ skąd $g'(x) < 0$ dla $x > x_0$. Ponieważ $g(x_0) = 0$, więc $g(x) < 0$ dla $x > x_0$, a zatem musi być $B = x_0$, a stąd $A = x_0$. Tym samym udowodniono, że gdy $\alpha \geqslant e + \frac{1}{2}$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x_0 dla dowolnego $\beta > 0$.

6. Najpierw udowodnimy dwa wyniki pomocnicze:

Lemat 2. *Dane są ciągi* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *oraz* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}$. *Jeśli spełnione są następujące warunki:*

1° $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i| < 1$,

2° *istnieje* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+k} + \alpha_1 x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_k x_n)$,

3° *ciąg* $\{x_n\}$ *jest ograniczony,*

to ciąg $\{x_n\}$ *jest zbieżny.*

Dowód. Niech $\omega' = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\omega'' = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Dobieramy podciągi $\left\{x_{n_i^{(1)}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ oraz $\left\{x_{n_i^{(2)}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ takie, że $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i^{(1)}} = \omega'$, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i^{(2)}} = \omega''$. Wobec ograniczoności ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ można dodatkowo założyć, że wszystkie ciągi:

$$\left\{x_{n_i^{(\varepsilon)}-s}\right\}_{i=1}^{\infty}, \quad \varepsilon \in \{1,2\},\ s = 1, \ldots, k,$$

są zbieżne. Połóżmy $A_s^{(\varepsilon)} =: \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i^{(\varepsilon)}-s}$, $\varepsilon = 1, 2$, $s = 1, \ldots, k$. Z warunku 2° dostajemy:

$$\omega' - \omega'' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A_s^{(2)} - A_s^{(1)}),$$

skąd:

$$|\omega' - \omega''| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \cdot \left|A_s^{(2)} - A_s^{(1)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \cdot |\omega' - \omega''| = |\omega' - \omega''| \cdot \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leqslant |\omega' - \omega''|,$$

czyli:

$$|\omega' - \omega''| = |\omega' - \omega''| \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|. \tag{18}$$

Ponieważ $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i| < 1$, więc równość (18) zachodzi tylko, gdy $|\omega' - \omega''| = 0$, tj. gdy $\omega' = \omega''$, co kończy dowód lematu 2. □

Lemat 3. *Niech* $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ *oraz* $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $\alpha_1 > \sum\limits_{i=3}^{k} (i-2)\alpha_i$ *o ile* $k \geqslant 3$ *oraz:*

$$x_{n+k} \leqslant \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n+k-i}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

gdzie $M = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$, *to ciąg* $\{x_n\}$ *jest zbieżny.*

Dowód. Z założenia (19) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$x_{n+k} + \frac{\alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{M} x_{n+k-1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{M} x_{n+1} \leqslant x_{n+k-1} + \frac{\alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{M} x_{n+k-2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{M} x_n,$$

skąd dostajemy trzy fakty:

a) ciąg $\left\{x_{n+k-1}+\frac{\alpha_2+\ldots+\alpha_k}{M}x_{n+k-2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{M}x_n\right\}$ jest zbieżny,

b) ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony,
(ściślej, dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi oszacowanie:

$$x_{n+k}\leqslant x_k+\frac{\alpha_2+\ldots+\alpha_k}{M}x_{k-1}+\ldots+\frac{\alpha_k}{M}x_1),$$

c) zachodzi równość:

$$1-\left(\frac{\alpha_2+\ldots+\alpha_k}{M}+\ldots+\frac{\alpha_k}{M}\right)=$$
$$=\frac{1}{M}\left(M-\sum_{i=2}^{k}(i-1)\alpha_i\right)=\begin{cases}\alpha_1>0, & \text{gdy } k=2,\\ \frac{1}{M}\left(M-\sum\limits_{i=2}^{k}(i-1)\alpha_i\right)>0, & \text{gdy } k>2.\end{cases}$$

Na podstawie tych faktów oraz lematu 2 dostajemy tezę lematu 3. □

Wniosek. Niech $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $p_1,\ldots,p_k>0$ oraz $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Jeśli $p_1>\sum\limits_{i=3}^{k}(i-2)p_i$ o ile $k\geqslant 3$ oraz:

$$x_{n+k}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{k}x_{n+k-i}^{p_i}\right)^{\frac{1}{M}},\quad n\in\mathbb{N},$$

gdzie $M=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i$, to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że spełniona jest nierówność:

$$\left(\prod_{i=1}^{k}x_{n+k-i}^{p_i}\right)^{\frac{1}{M}}\leqslant\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k}p_ix_{n+k-i}$$

(jest to znana nierówność pomiędzy ważoną średnią geometryczną a odpowiednią ważoną średnią arytmetyczną, zob. [4]) i zastosować lemat 3. □

10. Ustalmy $\alpha,\beta>0$. Wówczas mamy $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Ponieważ:

$$x_{n+2}-x_n=-\frac{x_nx_{n+1}}{1+x_{n+1}}<0,\quad n\in\mathbb{N},\tag{20}$$

więc podciągi $\{x_{2n}\}$ oraz $\{x_{2n-1}\}$ jako malejące i ograniczone z dołu przez zero są zbieżne. Ciąg $\{x_n\}$ ma zatem co najwyżej dwa punkty skupienia. Połóżmy:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}x_{2n},\quad \delta=\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}.$$

Z ciągłości funkcji $(x,y)\mapsto\frac{x}{1+y}$, $x,y\geqslant 0$ i z definicji ciągu $\{x_n\}$ wynikają dwie zależności:

$$\gamma=\frac{\gamma}{1+\delta}\quad\text{oraz}\quad\delta=\frac{\delta}{1+\gamma},$$

skąd łatwo otrzymujemy, że co najmniej jedna z liczb γ lub δ jest równa zero. Możliwe są więc trzy przypadki:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \text{ i } \delta > 0, \text{ albo} \\ \gamma > 0 \text{ i } \delta = 0, \text{ albo} \\ \gamma = \delta = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Pokażemy teraz, że:

$$x_{n+2} - x_{n+1} \geqslant x_n - x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},\, n > 1. \tag{22}$$

Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_n} = \frac{x_n + x_n^2 - x_{n-1} - x_{n-1}x_{n+1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n+1})} = \\ &= \frac{x_n - x_{n-1} + x_n^2 - x_{n-1} \cdot \frac{x_{n-1}}{1+x_n}}{(1 + x_n)\left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_n}\right)} \geqslant \frac{x_n - x_{n-1} + x_n^2 - x_{n-1}^2}{1 + x_{n-1} + x_n} = x_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Z nierówności (22) otrzymujemy w szczególności, że:

$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n} - x_{2n-1}) = \gamma - \delta \geqslant \beta - \alpha,$$

skąd, gdy $\beta > \alpha$, wobec (21), mamy $\delta = 0$ i $\gamma \geqslant \beta - \alpha > 0$. Ponownie z (22) dostajemy:

$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n+1} - x_{2n}) = \delta - \gamma \geqslant x_3 - x_2 = \frac{\alpha - \beta - \beta^2}{1 + \beta},$$

co przy założeniu, że $\alpha > \beta + \beta^2$, wobec (21) daje $\gamma = 0$ i $\delta \geqslant \frac{\alpha-\beta-\beta^2}{1+\beta} > 0$. Gdy $\alpha = \beta$, to:

$$x_4 = \frac{x_2}{1 + x_3} = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} > \frac{\alpha}{1 + \alpha} = x_3$$

i przypadek ten sprowadza się do wcześniejszego dla wartości początkowych:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \beta' = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha}.$$

Gdy $\alpha = \beta + \beta^2$, to $x_3 = x_2$ i mamy sytuację jak wyżej.

11. Z definicji ciągu $\{x_n\}$ wynikają następujące związki:

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x_n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \tag{23}$$

$$x_{n+1} - x_n = x_n(x_n + 1)(x_n - 2), \tag{24}$$

$$x_{n+1} + 1 = (x_n + 1)(x_n - 1)^2, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+2}-x_n &= (x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n) \overset{(24)}{=} \\
&= x_{n+1}(x_{n+1}+1)(x_{n+1}-2)+x_n(x_n+1)(x_n-2) \overset{(25)}{=} \\
&= (x_n+1)[x_{n+1}(x_n-1)^2(x_{n+1}-2)+x_n(x_n-2)] = \\
&= x_n(x_n+1)[(x_n^2-x_n-1)(x_n-1)^2(x_{n+1}-2)+x_n-2] \overset{(24)}{=} \\
&= x_n(x_n+1)(x_n-2)[(x_n^2-x_n-1)(x_n-1)^2(x_n^2+x_n+1)+1] \overset{(24)}{=} \\
&= (x_{n+1}-x_n)\{[x_n^4-(x_n+1)^2](x_n-1)^2+1\} = \\
&= (x_{n+1}-x_n)[x_n^4(x_n-1)^2-(x_n^2-1)^2+1] = \\
&= (x_{n+1}-x_n)x_n^2[x_n^2(x_n-1)^2-x_n^2+2] = \\
&= (x_{n+1}-x_n)x_n^2(x_n^4-2x_n^3+2).
\end{aligned} \tag{26}$$

Łatwo sprawdzamy, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x^4-2x^3+2>0$. Stąd, z (26) i tego, że jeśli $x_{n_0}=0$, to $x_{n_0+k}=0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ (zob. definicję ciągu $\{x_n\}$) dostajemy:

$$\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=\operatorname{sgn}(x_{n+1}-x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Połóżmy $f(x) =: x^3-x^2-x$. Zauważmy, że:

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \subset \left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \tag{28}$$

Istotnie, z (23) mamy, że $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \subset \mathbb{R}_+$. Z kolei $f'(x)=3x^2-2x-1=3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$, a więc:

$$\max_{x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)} f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}<\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

albowiem $f(0)=f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$. Zauważmy jeszcze, że:

$$f(x)-x=x(x+1)(x-2), \text{ tj. } f(x)<x \text{ dla } x\in(0,2) \tag{29}$$

oraz:

$$\text{funkcja } f \text{ jest rosnąca w półosi } [1,\infty), \text{ przy czym } f\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right]\right)=[0,2]. \tag{30}$$

Przejdziemy teraz do opisania zachowania ciągu $\{x_n\}$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$. Z (24) wynika, że jeśli ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, to zachodzi relacja:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \{-1,0,2\}. \tag{31}$$

Gdy $\alpha>2$, to z (24) mamy $x_{n+1}>x_n$, a stąd, wobec (31), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Gdy $\alpha<-1$, to z (24) mamy $x_{n+1}<x_n$, czyli, wobec (31), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$. Z (25) wynika, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do -1 dokładnie wtedy, gdy dla pewnego $n\in\mathbb{N}$ mamy $x_n=-1$. Rozważmy równanie $f(x)=-1$ lub w postaci równoważnej $(x+1)(x-1)^2=0$. Jego rozwiązania rzeczywiste, to liczby $x=-1$ i $x=1$. Z postaci $f'(x)$ (zob. dowód własności (28)) wynika, że $f(x)$ ma następujący przebieg zmienności:

$f(x):$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{27}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$x:$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Stąd, w szczególności wynika, że gdy $\alpha > \frac{5}{27}$, to równanie $f(x) = \alpha$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Gdy $\alpha \in [1, 2)$, to wobec uwagi (30) liczba x_0 będąca rozwiązaniem rzeczywistym równania $f(x) = \alpha$ należy do przedziału $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$, a wobec uwagi (29) mamy $\alpha = f(x_0) < x_0$. Podsumowując, możemy stwierdzić, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do -1 dokładnie wtedy, gdy $\alpha \in \{\alpha_i\}$, natomiast dla każdego $i \in \mathbb{N}$, α_i jest liczbą rzeczywistą należącą do zbioru rozwiązań równania rekurencyjnego $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $f(\alpha_{k+1}) = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$ (zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ równanie $f(\alpha_{k+1}) = \alpha_k$ dla danego α_k może mieć co najwyżej 3 rozwiązania rzeczywiste α_{k+1}). Ze wzoru Cardano można otrzymać jedną z zależności opisującą α_{i+1} dla danego α_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left[\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} \right],$$

gdzie $A = 27\alpha_i + 11$, $B = (27\alpha_i)^2 + 22(27\alpha_i) - 135$, natomiast pierwiastki kwadratowe i sześcienne są tutaj funkcjami rzeczywistymi. Jeśli $\alpha \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, to z (28), (23) i (27) dostajemy nierówności:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x_{2n-1} < x_{2n+1} < 0 < x_{2n+2} < x_{2n} < \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

a stąd i z (26) zależność:

$$0 = \lim_{n\to\infty} (x_{2n+1} - x_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} [(x_{2n} - x_{2n-1}) x_{2n-1}^2 (x_{2n-1}^4 - 2x_{2n-1}^3 + 2)],$$

czyli albo $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = 0$ albo $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{2n} - x_{2n-1}) = 0$, co wobec (26) implikuje, że:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0, \text{ tj. } \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Gdy $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, to $x_n = 0$, $n \geqslant 2$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Gdy $\alpha \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, to z (23) oraz z (31) wynika, że musi istnieć $n \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$x_1 < \ldots < x_n < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad x_{n+1} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

Zatem przypadek ten sprowadza się do dwóch ostatnich i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Jeśli $\alpha \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ i $\alpha \neq 1$, to z (23) oraz z (25) mamy, że $x_2 \in (-1, 0)$. W konsekwencji również $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Gdy $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Gdy $\alpha \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ oraz $\alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, to z (24), (23) oraz (31) dostajemy, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ dla którego:

$$x_1 > \ldots > x_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_{n+1} \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} \neq 1.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Gdy $\alpha = 2$, to $x_n \equiv 2$. Udowodniliśmy więc, że ciąg $\{x_n\}$ jest zawsze zbieżny (w rozszerzonym sensie) oraz zachodzą relacje:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } \alpha < -1, \\ -1 & \text{gdy } \alpha \in \{\alpha_i\}, \\ 0 & \text{gdy } \alpha \in (-1,2) \setminus \{\alpha_i\}, \\ 2 & \text{gdy } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{gdy } \alpha > 2. \end{cases}$$

12. a) Udowodnimy jedynie, że $\lim_{n\to\infty} h_n(\alpha,\beta) = 0$, gdy $\alpha+\beta > 1$. W dowodzie wykorzystamy następujący fakt.

Lemat 4. *Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$. Jeśli $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, to:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \max\left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \,\middle|\, \sigma \text{ jest permutacją na zbiorze } \{1,\ldots,n\} \right\}.$$

Dowód. Zobacz dla przykładu [3] lub czasopismo „Kwant”, XII, 1985. □

W oparciu o ten lemat udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, $b_n \geqslant b_{n+1} > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Jeśli zachodzi $\sum a_n b_n < +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = 0$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Dobieramy $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, by:

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} a_k b_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \tag{32}$$

a następnie ustalmy $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geqslant k_1 + 2$, tak, by:

$$b_l \sum_{k=1}^{k_1} a_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{33}$$

oraz:

$$a_l \sum_{k=1}^{k_1} b_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{34}$$

dla każdego $l \in \mathbb{N}$, $l > k_2$. Wówczas, jeśli $n \in \mathbb{N}$, $n > k_1 + k_2$, to zachodzi rozkład:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{k_1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=1+k_1}^{n-1-k_1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=n-k_1}^{n-1} a_k b_{n-k},$$

przy czym:

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_k b_{n-k} \leqslant b_{n-k_1} \sum_{k=1}^{k_1} a_k \overset{(33)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{k=n-k_1}^{n-1} a_k b_{n-k} \leqslant a_{n-k_1} \sum_{k=1}^{k_1} b_k \overset{(34)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3}$$

i wreszcie na podstawie lematu 4:

$$\sum_{k=1+k_1}^{n-k_1-1} a_k b_{n-k} \leqslant \sum_{k=1+k_1}^{n-k_1-1} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1+k_1}^{\infty} a_k b_k \overset{(32)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podsumowując, otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \leqslant \varepsilon,$$

co przez wzgląd na dowolność $\varepsilon > 0$ daje tezę twierdzenia 1. □

Uwaga. Niech $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną permutacją (a nawet injekcją). Wówczas przy założeniach twierdzenia 1 zachodzi równość:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\varphi(n-k)} = 0.$$

Dowód tej zależności bazuje m.in. na łatwej do sprawdzenia obserwacji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Szczegóły dowodu tego faktu pozostawimy do udowodnienia Czytelnikowi.

16. Pokażemy jedynie dwa fakty. Wpierw, że:

$$\sup A_s = e^s, \qquad \inf A_s = 1 + s,$$

$$\sup B_s = e^{-s}, \qquad \inf B_s = \begin{cases} 1 - s, & \text{gdy } s \in (0,1), \\ 0, & \text{gdy } s \geqslant 1, \end{cases}$$

a następnie, że powyższe kresy nie są osiągane w zbiorach odpowiednio A_s i B_s. Będziemy bazować na następujących nierównościach:

$$1 + \sum a_i < \prod (1 + a_i) < \exp\left(\sum a_i\right), \qquad \text{gdy } \{a_i\} \in \mathbf{z}, \tag{35}$$

$$1 - \sum a_i < \prod (1 - a_i) < \exp\left(-\sum a_i\right), \qquad \text{gdy } \{a_i\} \in \mathbf{z}_0, \tag{36}$$

gdzie standardowo posługujemy się symbolami $\sum a_i$, $\prod(1+a_i)$, $\prod(1-a_i)$ oznaczającymi odpowiednio sumę szeregu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, wartość iloczynu nieskończonego $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ oraz wartość iloczynu nieskończonego $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-a_i)$.

Dowód. Łatwo sprawdzamy indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$

oraz:

$$1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$

skąd również:

$$1 + \sum a_i \leqslant \prod (1 + a_i) \leqslant \exp\left(\sum a_i\right), \tag{37}$$

$$1 - \sum a_i \leqslant \prod (1 - a_i) \leqslant \exp\left(-\sum a_i\right). \tag{38}$$

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $\{a_i\} \in \mathbf{z}$, to:

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i < (1 + a_1)\left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) \overset{(37)}{\leqslant} (1 + a_1) \prod_{i=2}^{\infty} (1 + a_i) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i) = (1 + a_i) \prod_{i=2}^{\infty} (1 + a_i) \overset{(37)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (1 + a_1) \exp\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) < \exp(a_1) \exp\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right),$$

natomiast gdy $\{a_i\} \in \mathbf{z}_0$, to:

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i < (1 - a_1)\left(1 - \sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) \overset{(38)}{\leqslant} (1 - a_1) \prod_{i=2}^{\infty} (1 - a_i) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = (1 - a_1) \prod_{i=2}^{\infty} (1 - a_i) \overset{(38)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (1 - a_1) \exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) < \exp(-a_i) \exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty} a_i\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right).$$

Z (35) wynika, że dla każdego $\{a_i\} \in \mathbf{z}$, jeśli $\sum a_i = s$, to $\prod (1 + a_i) > 1 + \sum a_i = 1 + s$. Zatem:

$$\inf A_s \geqslant 1 + s. \tag{39}$$

Pokażemy, że również $\inf A_s \leqslant 1 + s$. Niech $\varepsilon \in (0, s)$. Definiujemy ciąg $\{a_i(\varepsilon)\}$:

$$a_i(\varepsilon) := \begin{cases} s - \varepsilon, & \text{dla } i = 1, \\ \varepsilon 2^{-i+1}, & \text{dla } i > 1. \end{cases}$$

Oczywiście $\{a_i(\varepsilon)\} \in \mathbf{z}$ oraz $\sum a_i(\varepsilon) = s$, a przy tym:

$$\prod (1 + a_i(\varepsilon)) = (1 + s - \varepsilon) \prod (1 + \varepsilon 2^{-i}) \overset{(35)}{<} (1 + s - \varepsilon) e^{\varepsilon}. \tag{40}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (1 + s - \varepsilon) e^{\varepsilon} = 1 + s$, więc z (40) dostajemy, że $\inf A_s \leqslant 1 + s$, co wraz z (39) daje, że $\inf A_s = 1 + s$.

Teraz znajdziemy $\sup A_s$. Z (35) wynika, że dla każdego $\{a_i\} \in \mathbf{z}$, jeśli $\sum a_i = s$, to $\prod(1 + a_i) < \exp\left(\sum a_i\right) = e^s$, czyli:

$$\sup A_s \leqslant e^s. \tag{41}$$

Pokażemy, że również $\sup A_s \geqslant e^s$. W tym celu dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ definiujemy ciąg $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{\infty}$:

$$a_i^{(n)} := \begin{cases} \frac{s}{n}, & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \frac{s}{n} 2^{-i+n-1}, & \text{dla } i \geqslant n. \end{cases}$$

Oczywiście zachodzi $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{z}$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} = s$. Ponadto:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + a_i^{(n)}\right) = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{s}{n}2^{-i}\right).$$

Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{s}{n}\right)^{n-1} = e^s$$

oraz:

$$1 < \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{s}{n}2^{-i}\right) \overset{(35)}{<} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s}{n}2^{-i}\right) = e^{\frac{s}{n}},$$

skąd, wobec twierdzenia o trzech ciągach dostajemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{s}{n}2^{-i}\right)\right] = 1.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 + a_i^{(n)}\right)\right] = e^s$, czyli $\sup A_s \geqslant e^s$, a stąd po uwzględnieniu (41) dostajemy $\sup A_s = e^s$. Wielkości $\inf B_s$ oraz $\sup B_s$ znajdujemy podobnie. I tak jeśli $\{a_i\} \in \mathbf{z}_0$, $\sum a_i = s$, to z (36):

$$\prod(1 - a_i) < \exp\left(-\sum a_i\right) = e^{-s},$$

skąd:

$$\sup B_s \leqslant e^{-s}. \tag{42}$$

Pokażemy, że $\sup B_s \geqslant e^{-s}$. Tworzymy przeliczalną rodzinę ciągów $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ dla $n \geqslant [s] + 1$, przyjmując dla każdego $i \in \mathbb{N}$:

$$a_i^{(n)} =: \begin{cases} \frac{s}{n}, & \text{gdy } 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \frac{s}{n} 2^{-i+n-1}, & \text{gdy } i \geqslant n. \end{cases}$$

Oczywiście $\left\{a_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{z}_0$ i $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} = s$. Mamy związek:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - a_i^{(n)}\right) = \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s}{n}2^{-i}\right).$$

Ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-1}=e^{-s}$$

oraz z (36):

$$1-\frac{s}{n}<\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}2^{-i}\right)<e^{-\frac{s}{n}},$$

więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}2^{-i}\right)\right]=1.$$

W konsekwencji $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1-a_i^{(n)}\right)\right]=e^{-s}$, czyli $\sup B_s\geqslant e^{-s}$, co wraz z (42) daje $\sup B_s=e^{-s}$. Wyznaczymy teraz $\inf B_s$. Przypadek $s\in(0,1)$. Jeśli $\{a_i\}\in\mathbf{z}_0$ i $\sum a_i=s$, to z (36) mamy $\prod(1-a_i)>1-s$, a stąd:

$$\inf B_s\geqslant 1-s. \tag{43}$$

Niech $\varepsilon\in(0,s)$. Definiujemy ciąg $\left\{a_i^{(\varepsilon)}\right\}$ przyjmując:

$$a_i^{(\varepsilon)}:=\begin{cases}s-\varepsilon, & \text{dla } i=1,\\ \varepsilon 2^{-i+1}, & \text{dla } i>1.\end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy, że $\left\{a_i^{(\varepsilon)}\right\}\in\mathbf{z}$ i $\sum a_i^{(\varepsilon)}=s$. Mamy związek:

$$\prod\left(1-a_i^{(\varepsilon)}\right)=(1-s+\varepsilon)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon 2^{-i}\right)\overset{(36)}{\leqslant}(1-s+\varepsilon)e^{-\varepsilon}. \tag{44}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1-s+\varepsilon)e^{-\varepsilon}=1-s$, więc z (44) wynika, że:

$$\inf B_s\leqslant 1-s. \tag{45}$$

Oczywiście z (43) i (45) dostajemy, że $\inf B_s=1-s$.

Rozważmy wreszcie przypadek $s\geqslant 1$. Niech $\varepsilon\in(0,1)$, $\delta:=s+\varepsilon-1$. Połóżmy:

$$a_i^{(\varepsilon)}=:\begin{cases}1-\varepsilon, & \text{dla } i=1,\\ \frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}, & \text{dla } 2\leqslant i\leqslant\lfloor\delta\rfloor+2,\\ \frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}2^{-i+\lfloor\delta\rfloor+2}, & \text{dla } i>\lfloor\delta\rfloor+2.\end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy, że $\left\{a_i^{(\varepsilon)}\right\} \in \mathbf{z}$ i $\sum a_i^{(\varepsilon)} = s$. Zachodzi nierówność:

$$\prod\left(1-a_i^{(\varepsilon)}\right) = \varepsilon\left(1-\frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}\right)^{\lfloor\delta\rfloor+1}\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}2^{-i}\right) \overset{(36)}{<} \varepsilon\left(1-\frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}\right)^{\lfloor\delta\rfloor+1} e^{-\frac{\delta}{\lfloor\delta\rfloor+2}} < \varepsilon,$$

skąd $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\prod\left(1-a_i^{(\varepsilon)}\right)\right\} = 0$. Zatem $\inf B_s = 0$. Rozpatrzmy teraz kwestię osiągania kresów w zbiorach A_s i B_s. Jak wynika z nierówności (35) dla każdego $\{a_i\} \in \mathbf{z}$, jeśli $\sum a_i = s$, to $1+s < \prod(1+a_i) < e^s$. Jednocześnie jak pokazaliśmy wyżej $\inf A_s = 1+s$ i $\sup A_s = e^s$. Zatem kresy dolny i górny zbioru A_s nie są osiągane w tym zbiorze. Podobnie z nierówności (36) dostajemy, że dla każdego $\{a_i\} \in \mathbf{z}_0$ jeśli $\sum a_i = s$, to $1-s < \prod(1-a_i) < e^{-s}$, co wobec tego, że:

$$\sup B_s = e^{-s} \qquad \text{oraz} \qquad \inf B_s = \begin{cases} 1-s, & \text{gdy } s \in (0,1), \\ 0, & \text{gdy } s \geqslant 1, \end{cases}$$

oznacza, że kres górny zbioru B_s nie jest osiągany w B_s dla żadnego $s > 0$, natomiast kres dolny zbioru B_s nie jest osiągnany w B_s dla żadnego $s \in (0,1]$. Gdy $s > 1$, to nieosiąganie zera w zbiorze B_s rozstrzyga następujące twierdzenie – zob. [2]:

Twierdzenie 2. *Jeśli* $a_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, *to:*

$$\prod(1-a_n) = 0 \iff \{a_n\} \in \mathbf{r}_0.$$

□

Literatura

1. Adam M., Bajorska-Harapińska B., Hetmaniok E., Ludew J., Pleszczyński M., Różański M., Słota D., Słowik R., Smoleń B., Uryga J., Wituła R., *Szeregi liczbowe w analizie matematycznej i w teorii liczb*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2021.
2. Knopp K., *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
3. Marshall A.W., Olkin I., Arnold B.C., *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York 2011.
4. Mitrinović D., *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.
5. Narkiewicz W., *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003.
6. Prus-Wiśniowski F., *Szeregi rzeczywiste*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2005.
7. Sierpiński W., *Działania nieskończone*, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”, 1948.