

Ewa PIOTROWSKA*

ANALIZA OBWODÓW W ASPEKTCIE POCHODNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU I UKŁADÓW DODATNICH

Układy dodatnie to układy, w których wymuszenia, zmienne stanów oraz odpowiedzi i warunki początkowe przyjmują wartości nieujemne. W pracy przedstawiono analizę stanu niustalonego obwodu z kondensatorami ułamkowych rzędów (będącego realizacją układu dodatniego). Podano ogólne rozwiązanie dla równań tego obwodu. Rozpatrzono dwie definicje pochodnej ułamkowego rzędu: Riemanna-Liouville'a i Caputo. Następnie wyniki porównano z obliczeniami uzyskanymi metodą klasyczną – za pomocą zwykłej pochodnej $\alpha = 1$. Wyniki zestawiono za pomocą wykresów przebiegów napięć na kondensatorach. Wyniki dla definicji Caputo porównano z rozwiązaniami otrzymanymi wybraną metodą numeryczną.

SŁOWA KLUCZOWE: pochodne ułamkowego rzędu, analiza obwodu, rozwiązanie analityczne, definicja Riemanna-Liouville'a, definicja Caputo

1. OGÓLNE PRZEDSTAWIENIE PROBLEMU

1.1. Schemat obwodu elektrycznego z układem równań opisującym napięcia w układzie

Rozważmy układ równań opisujący zachowanie obwodu przedstawionego na rysunku 1. Przedstawiono w ten sposób obwód elektryczny o konduktancjach G_k , $k = 0, 1, 2$, pojemnościach C_1, C_2 oraz źródło napięcia e_1 .

Układ równań (1) i (2) opisuje wybrane napięcia w obwodzie:

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t) + Be(t) \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1)$$

$$v(t) = Cu(t) + De(t) \quad (2)$$

gdzie: $u(t) \in \mathbf{R}^2$ jest wektorem stanu układu, $e(t) \in \mathbf{R}$ sterowaniem, $v(t) \in \mathbf{R}$ stanem wyjściowym układu oraz $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$, $C \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$ i $D \in \mathbf{R}$.

Ogólna postać rozwiązania równania (1) (niezależnie od definicji wykorzystanej pochodnej) jest następująca:

* Politechnika Białostocka.

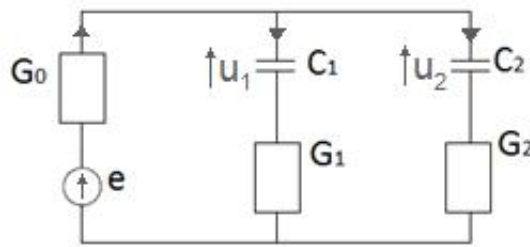
$$u(t) = f(t)w_0 + \int_0^t g(t, \tau)Be(\tau)d\tau \quad (3)$$

gdzie $f(t)$ i $g(t, \tau)$ są pewnymi funkcjami zależnymi od typu pochodnej użytej w równaniu (1), natomiast

$$w_0 = \frac{d^\beta u(0^+)}{dt^\beta} \quad (4)$$

opisuje warunki początkowe, przy czym $-1 < \beta \leq 0$ jest pewną liczbą zależną od definicji i rzędu wykorzystanej pochodnej. Skoro w rozważanym zagadnieniu $e(\tau)$ jest funkcją skalarną to wektor stanu można zapisać jako:

$$u(t) = f(t)w_0 + \int_0^t g(t, \tau)e(\tau)d\tau]B \quad (5)$$



Rys. 1. Przykład obwodu elektrycznego z kondensatorami niecałkowitych rzędów

W dalszej części poszukiwane jest rozwiązanie przy założeniu źródła o postaci:

$$e(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{dla } \tau < 0 \end{cases} \quad (6)$$

co pozwala zapisać wzór (5) następująco:

$$u(t) = f(t)w_0 + h(t)B \quad (7)$$

gdzie funkcja $h(t)$ oznacza całkę zależną od czasu:

$$h(t) = \int_0^t g(t, \tau)d\tau \quad (8)$$

1. 2. Postacie macierzy opisujących rozważany układ [1]

Macierze wykorzystane w układzie równań (1) i (2) wyrażają się wzorami:

$$A = A_r - A_n G^{-1} F \quad (9)$$

$$B = B_m - A_n G^{-1} H \quad (10)$$

$$C = -G^{-1}F \quad (11)$$

$$D = -G^{-1}H \quad (12)$$

przy czym dla rozpatrywanego obwodu:

$$A_r = \begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{G_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{C_1} \\ \frac{G_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$F = [-G_1 \quad -G_2] \quad (16)$$

$$G = [G_0 + G_1 + G_2] \quad (17)$$

$$H = [-G_0] \quad (18)$$

Macierz odwrotna do G ma postać

$$G^{-1} = \left[\frac{I}{G_0 + G_1 + G_2} \right] \quad (19)$$

Po wykonaniu podstawień, otrzymujemy macierze opisujące układ

$$A = \frac{I}{G_0 + G_1 + G_2} \begin{bmatrix} -\frac{G_1(G_0 + G_2)}{C_1} & \frac{G_1G_2}{C_1} \\ \frac{G_1G_2}{C_2} & -\frac{G_2(G_0 + G_1)}{C_2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B = \frac{G_0}{G_0 + G_1 + G_2} \begin{bmatrix} \frac{G_1}{C_1} \\ \frac{G_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$C = \frac{I}{G_0 + G_1 + G_2} [G_1 \quad G_2] \quad (22)$$

$$D = \left[\frac{G_0}{G_0 + G_1 + G_2} \right] \quad (23)$$

Wyznacznik macierzy A

$$\det(A) = \frac{G_0 G_1 G_2}{C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)} \quad (24)$$

Macierz odwrotna do A

$$A^{-1} = \frac{-I}{G_0} \begin{bmatrix} \frac{C_1(G_0 + G_1)}{G_1} & C_2 \\ C_1 & \frac{C_2(G_0 + G_2)}{G_2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ślad macierzy A

$$r(A) = -\frac{C_1 G_2 (G_0 + G_1) + C_2 G_1 (G_0 + G_2)}{C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)} \quad (26)$$

Wyróżnik trójmianu charakterystycznego macierzy A

$$w(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) \quad (27)$$

jest następujący:

$$\Delta = \frac{[C_1 G_2 (G_0 + G_1) + C_2 G_1 (G_0 + G_2)]^2 - 4 C_1 C_2 G_0 G_1 G_2 (G_0 + G_1 + G_2)}{C_1^2 C_2^2 (G_0 + G_1 + G_2)^2} \quad (28)$$

Zatem:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{[C_1 G_2 (G_0 + G_1) + C_2 G_1 (G_0 + G_2)]^2 - 4 C_1 C_2 G_0 G_1 G_2 (G_0 + G_1 + G_2)}{C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)^2}} \quad (29)$$

Ponieważ $\det(A) > 0$, więc $\Delta < [\operatorname{tr}(A)]^2$. Zatem $\sqrt{\Delta} < |\operatorname{tr}(A)|$. Uwzględniając dodatkowo $\operatorname{tr}(A) < 0$, mamy $\sqrt{\Delta} < -\operatorname{tr}(A)$. Po przeniesieniu wyrazów na lewą stronę nierówności otrzymujemy $\operatorname{tr}(A) + \sqrt{\Delta} < 0$. Tym bardziej $\operatorname{tr}(A) - \sqrt{\Delta} < 0$. Uzyskujemy stąd $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

$$\lambda_1 = x = -\frac{-C_1 G_2 (G_0 + G_1) - C_2 G_1 (G_0 + G_2)}{2 C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)} - \quad (30)$$

$$-\frac{\sqrt{[C_1 G_2 (G_0 + G_1) + C_2 G_1 (G_0 + G_2)]^2 + 4 C_1 C_2 G_0 G_1 G_2 (G_0 + G_1 + G_2)}}{2 C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)}$$

$$\lambda_2 = x = -\frac{-C_1 G_2 (G_0 + G_1) - C_2 G_1 (G_0 + G_2)}{2 C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)} - \quad (31)$$

$$+\frac{\sqrt{[C_1 G_2 (G_0 + G_1) + C_2 G_1 (G_0 + G_2)]^2 - 4 C_1 C_2 G_0 G_1 G_2 (G_0 + G_1 + G_2)}}{2 C_1 C_2 (G_0 + G_1 + G_2)}$$

Wektory własne mają postać:

$$p_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 - A_{22} \\ A_{21} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 - A_{22} \\ A_{21} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dodatkowo wyznaczany jest wektor:

$$u_\infty = -A^{-1}B = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \quad (34)$$

2. ROZWIĄZANIA PROBLEMU

2. 1. Rozwiązanie problemu przy wykorzystaniu pochodnych niecałkowitego rzędu

Rozpatrzmy dwie definicje pochodnych niecałkowitego rzędu: definicję Caputo oraz definicję Riemanna-Liouville'a.

2.1.1. Rozwiązanie w przypadku wykorzystania pochodnej Caputo (C)

Rozwiązanie ma postać ogólną:

$$f(t) = \Phi_0(t) \quad (35)$$

$$g(t, \tau) = \Phi(t - \tau) \quad (36)$$

gdzie:

$$\Phi_0(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (37)$$

$$\Phi(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \quad (38)$$

$E_{\alpha,\beta}(z)$ jest dwuparametrowa funkcją Mittag-Lefflera. Dla definicji Caputo $\beta = 0$, co daje warunek początkowy w postaci:

$$w_0 = {}_0^C D_t^0 u(t) = u(0^+) \quad (39)$$

oznaczany dalej przez $u_0 = u(0^+)$. Wtedy

$$h(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) d\tau \quad (40)$$

W celu obliczenia $h(t)$, wykonuje się podstawienie $s = t - \tau$ – wtedy dla $d\tau = -ds$ otrzymuje się:

$$h(t) = -\int_t^0 \Phi(s) ds = \int_0^t \Phi(s) ds \quad (41)$$

Uwzględniając zależność $\Phi(s) = \Phi'(s)A^{-1}$ oraz $\Phi_0(0^+) = \mathbf{I}$, otrzymamy

$$h(t) = \Phi_0(s)A^{-1}\Big|_{0^+}^t = [\Phi_0(t) - \mathbf{I}]A^{-1} \quad (42)$$

W przypadku wykorzystania definicji pochodnej Caputo, rozwiązaniem równania jest:

$$u_c(t) = \Phi_0(t)u_0 + [\Phi_0(t) - \mathbf{I}]A^{-1}B \quad (43)$$

Korzystając z oznaczenia (34) można zapisać rozwiązanie (43) jako:

$$u_c(t) = \Phi_0(t)u_0 - [\Phi_0(t) - \mathbf{I}]u_\infty = u_\infty + \Phi_0(t)(u_0 - u_\infty) \quad (44)$$

Ponieważ wartości własne macierzy A są ujemne:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

zatem:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_c(t) = u_\infty \quad (46)$$

W celu uzyskania rozwiązania klasycznego podstawiono do funkcji $\Phi_0(t)$ współczynnik $\alpha = 1$. Otrzymano $\Phi_0(t) = \exp(At)$. Stąd rozwiązanie klasyczne

$$u_{kl}(t) = u_\infty + e^{At}(u_0 - u_\infty) \quad (47)$$

2.1.2. Rozwiązanie w przypadku wykorzystania pochodnej Riemanna-Liouville'a [2]

$$f(t) = \Phi(t) \quad (48)$$

$$g(t, \tau) = \Phi(t - \tau) \quad (49)$$

oraz $\beta = \alpha - 1$, co daje warunek początkowy postaci

$$w_0 = {}_0^{\text{RL}}D_t^{\alpha-1}u(t) \quad (50)$$

Wtedy funkcja

$$h(t) = \Phi_0(s)A^{-1}\Big|_{0^+}^t = [\Phi_0(t) - \mathbf{I}]A^{-1} \quad (51)$$

Wykorzystując wyniki dotychczasowych obliczeń uzyskamy

$$u_{RL}(t) = \Phi(t) {}_0^{\text{RL}}D_t^{\alpha-1}u(t) - [\Phi_0(t) - \mathbf{I}]u_\infty \quad (52)$$

czyli

$$u_{RL}(t) = u_\infty + \Phi(t) {}_0^{\text{RL}}D_t^{\alpha-1}u(t) - \Phi_0(t)u_\infty \quad (53)$$

Ponieważ macierz A ma ujemne wartości własne, więc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Korzystając dodatkowo z wzoru (45) otrzymano:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{RL}(t) = u_{\infty} \quad (55)$$

Po porównaniu rozwiązań definicji Caputo i Riemanna-Liouville'a można zauważyć, że przy zerowych warunkach początkowych wybór pomiędzy definicjami nie ma znaczenia. Jednakże w przypadku innych warunków początkowych przy zastosowaniu definicji Riemanna-Liouville'a występują pochodne niecałkowitego rzędu dla warunków początkowych, których interpretacja fizyczna jest niewyjaśniona, co sprawia pewne trudności.

Korzystając ze wzorów (37) i (38) uzyskujemy

$$\Phi_0(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi_0(t) = \frac{\mathbf{I}}{\Gamma(1)} = \mathbf{I} \quad (56)$$

$$\Phi(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} +\infty & 0 \\ 0 & +\infty \end{bmatrix} \quad (57)$$

co prowadzi – w przypadku rozwiązania Riemanna-Liouville'a do warunku

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_{RL}(t) = \Phi(0^+) {}^{RL}D_t^{\alpha-1} u(t) = \begin{bmatrix} +\infty \\ +\infty \end{bmatrix} \quad (58)$$

2.1.3. Graficzne przedstawienie rozwiązań

Dla określonych w ten sposób parametrów obwodu złożonym z konduktancji i kondensatorów niecałkowitych rzędów obliczono wartości funkcji i wyznaczono ich przebiegi. Następnie wyniki porównano z obliczeniami uzyskanymi metodą klasyczną – za pomocą pochodnej rzędu całkowitego $\alpha = 1$. Wyniki dla różnych definicji pochodnej ułamkowego rzędu porównano z rozwiązaniami otrzymanymi wybraną metodą numeryczną.

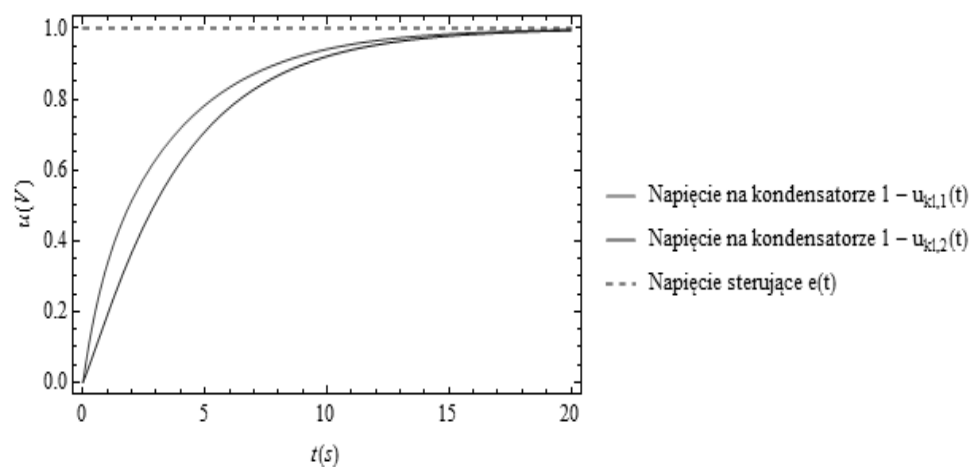
Rysunek 2 przedstawia przebiegi czasowe napięcia na dwóch kondensatorach początkowo rozładowanych – w przypadku wykorzystania klasycznej pochodnej ($\alpha = 1$).

Wartości napięć na kondensatorach w funkcji czasu zbiegają do 1.

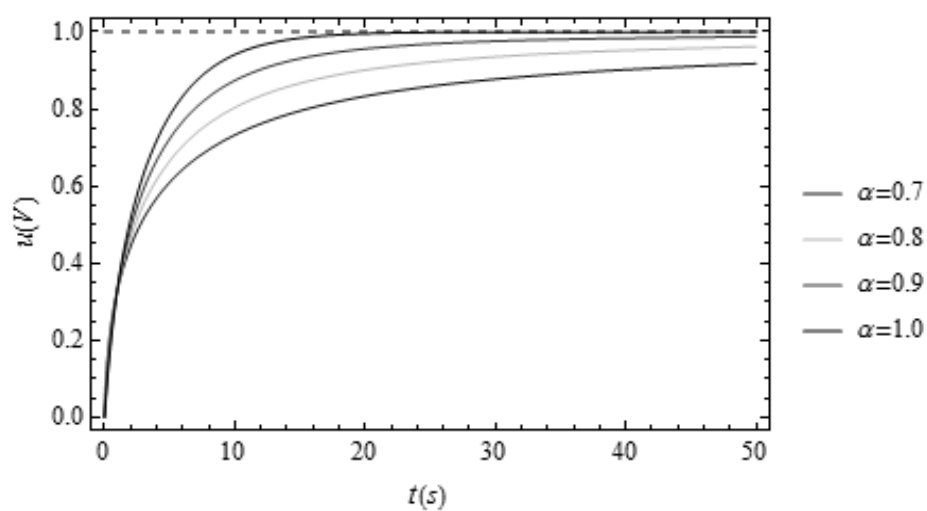
Krzywe na rysunku 3 obrazują ładowanie kondensatora nr 1 przy założeniu definicji pochodnej wg. Caputo dla rzędów $\alpha = 0.7; 0.8; 0.9; 1.0$

Wszystkie rozwiązania równania różniczkowego zbiegają asymptotycznie do wartości 1.

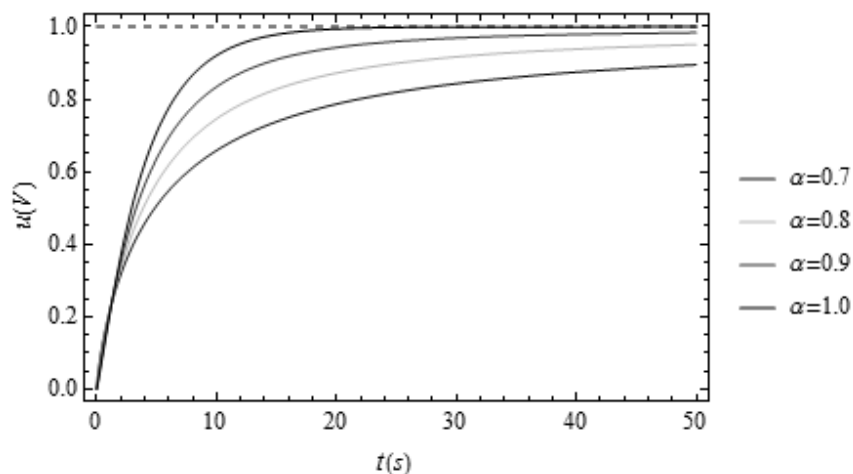
Na rysunku 4 przedstawiono przewidywany czasowy przebieg napięcia na ładowanym kondensatorze nr 2, z wykorzystaniem definicji Caputo w przypadku rzędów $\alpha = 0.7; 0.8; 0.9; 1.0$.



Rys. 2. Charakterystyka skokowa (dla $\alpha = 1$). Rozwiązanie dla pochodnej klasycznej



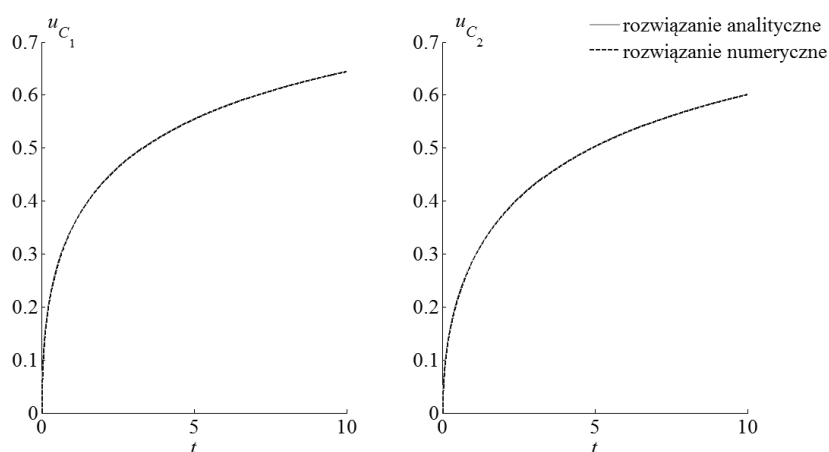
Rys. 3. Napięcie dla $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 1.0$ dla kondensatora 1 z wykorzystaniem def. Caputo



Rys. 4. Napięcie dla $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 1.0$ dla kondensatora 2 z wykorzystaniem def. Caputo

Porównując rozwiązanie klasyczne z rozwiązaniem obliczonym według definicji Caputo można dostrzec, że w przypadku ładowania kondensatorów napięcie dąży do 1. W przypadku zerowych warunków początkowych, mimo różnic pomiędzy definicją Caputo oraz definicją Riemanna-Liouville'a można uzyskać identyczne rozwiązanie, o ile rząd α jest jednakowy.

Na rysunku 5 przedstawiono porównanie wyznaczonych napięć na kondensatorach z obliczonymi za pomocą metody numerycznej SubIval (metody podprzedziałów) [3, 4, 5]. Zbieżność wyników świadczy o poprawności uzyskanego rozwiązania analitycznego.



Rys. 5. Porównanie wyników (przebiegów napięć) dla definicji Caputo

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metody obliczenia przebiegów napięć na elementach obwodu elektrycznego. Podano ogólne rozwiązanie za pomocą równań obwodu, wykorzystując pochodne ułamkowego rzędu. W analizie problemu wykorzystano definicję pochodnych ułamkowego rzędu: Riemanna-Liouville'a oraz Caputo. Przeanalizowano rozwiązania przy pomocy pochodnej klasycznej oraz pochodnych ułamkowego rzędu. Zauważono, bez względu na wykorzystaną definicję pochodnej (Riemanna-Liouville'a i Caputo) w przypadku zerowych warunków początkowych otrzymano takie same rozwiązanie.

LITERATURA

- [1] Kaczorek T., Rogowski K, Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Springer, 2014.
- [2] Kaczorek T., Sajewski Ł., Dodatnie realizacje dwuwymiarowych układów hybrydowych, Białystok, 2009.
- [3] Sowa M., Application of SubIval, a Method for Fractional–Order Derivative Computations in IVPs. Theory and Applications of Non–Integer Order Systems (Springer), 2017, s.489–500.
- [4] Sowa M., A subinterval–based method for circuits with fractional order elements. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences vol. 62 (3), 2014, s.449–454.
- [5] <http://msowascience.com>

ANALYSIS OF THE CIRCUIT IN TERMS OF DERIVATIVE FRACTIONAL POSITIVE AND SYSTEMS

Positive systems are systems in which sources, state variables and the responses along with the initial conditions take non–negative values. The paper presents an analysis of the transient state in a circuit with fractional order capacitors (the circuit realizes a positive system). A general solution is given for the equations of this circuit. Two definitions of the fractional derivative have been considered: the Riemann-Liouville definition and the Caputo definition. Next the results have been compared with those obtained for the case of the ordinary derivative ($\alpha = 1$). The results have been presented as time functions of voltages on the capacitors. The results obtained for the Caputo definition have been compared with those obtained with a selected numerical method.

(Received: 26. 01. 2017, revised: 4. 03. 2017)