17^{th} SYMPOSIUM ON HYDROACOUSTICS

Jurata May 23-26, 2000

PARAMETRYCZNE METODY OKREŚLANIA KIERUNKÓW ŹRÓDEŁ FAL HYDROAKUSTYCZNYCH W PASYWNYCH SYSTEMACH LOKALIZACJI

S. Henclik
OBR Centrum Techniki Morskiej
ul. Dickmana 62, 81-109 Gdynia, Polska

The review of parametric methods of multiple underwater sources direction of arrival (DOA) estimation by a passive array of sensors is presented in this paper. The most common in literature model of far, narrow-band sources is assumed. Deterministic and stochastic maximum likelihood methods and their advantages and disadvantages are described. The subspace fitting approach is presented as well. A good performance of parametric methods is payed with high computational cost of searching the optimal parameters set. The reparameterisation method, lowering the computational cost of optimisation, is described in the last section of this paper.

WPROWADZENIE

Problem estymacji namiarów M odległych źródeł sygnału wąskopasmowego za pomocą pasywnej anteny złożonej z N (N>M) przetworników można sprowadzić [4,6,10] do wyznaczenia parametrów $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}_1^M$ dla następującego modelu:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \qquad \text{dla} \quad t = 1,2,\ldots,K \tag{1}$$

$\mathbf{x}(t)$ jest zespolonym, N-wymiarowym wektorem amplitudy wąskopasmowego sygnału z przetworników anteny w chwili t (tzw. *snapshot*), $\mathbf{n}(t)$ oznacza w przyjętym modelu wektor szumów rejestrowanych przez poszczególne przetworniki, a $\mathbf{s}(t)$ M-wymiarowy zespolony wektor amplitudy sygnałów źródeł. Macierz **A** o wymiarze NxM jest tak zwaną macierzą kierującą (sterującą) odpowiadającą aktualnej lokalizacji źródeł $\{\theta_i\}$. W ogólności parametry θ_i mogą być jedno- dwu- lub trójelementowym zestawem zmiennych lokalizującym źródło w przestrzeni, lecz w praktyce przyjmuje się, że θ_i wyznacza położenie kątowe (namiar) źródła znajdującego się w strefie dalekiej, w dwuwymiarowym modelu. Macierz **A** dana wzorem (2) składa się z M kolumnowych wektorów kierujących $\mathbf{a}(\theta_i)$ danych wzorem (3).

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1),\ldots,\mathbf{a}(\theta_M)] \tag{2}$$

$$\mathbf{a}(\theta) = [\alpha_1(\theta)\exp(-j\omega\tau_1(\theta)),\ldots,\alpha_N(\theta)\exp(-j\omega\tau_N(\theta))]^T \tag{3}$$

Górny indeks ^{T} oznacza transpozycję (w dalszej części pracy stosuje się też górny indeks ^{H} na oznaczenie hermitowskiego sprzężenia), $\tau_i(\theta)$ jest opóźnieniem sygnału docierającego z kierunku θ do i-tego hydrofonu, $\alpha_i(\theta)$ – charakterystyką kierunkową i-tego hydrofonu, a ω - częstotliwością rejestrowanych sygnałów wąskopasmowych. Dla jednorodnej anteny liniowej

(ULA - *uniform linear array*) o stałym odstępie hydrofonów wynoszącym d i jednorodnej charakterystyce hydrofonów $\alpha_i(\theta)$=const. wektor kierujący przyjmuje specyficzną postać daną wzorem (4):

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, \exp(-j\phi), \exp(-2j\phi), \ldots, \exp(-j(N-1)\phi)] \tag{4}$$

gdzie tak zwana częstość przestrzenna ϕ dana jest wzorem (5), a kąt θ mierzy się względem symetralnej anteny i uważa się za dodatni, jeśli źródło znajduje się z tej strony anteny co pierwszy hydrofon.

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta \tag{5}$$

Zakłada się, że konstrukcja anteny gwarantuje liniową niezależność dowolnego zbioru n ($n \leq N$) wektorów kierujących (3) odpowiadających różnym kierunkom θ (w ogólności różnym częstościom przestrzennym ϕ). W przypadku ULA prowadzi to do warunku $d<\lambda/2$. Oznacza to, że macierz **A** jest pełnego rzędu, rank(**A**)=M. Przyjmuje się, że sygnał szumu **n**(t) jest czasowo i przestrzennie białym sygnałem gaussowskim o mocy σ^2 i zerowej wartości średniej i jest nie skorelowany z sygnałem źródeł **s**(t). Macierz korelacji sygnałów źródeł **P**, dana wzorem (6) ($E\{\cdot\}$ oznacza wartość oczekiwaną), jest dodatnio określona, a ilość dostępnych *snapshot'ów* K jest większa od ilości sensorów N (K>N). Niektóre z powyższych założeń, zwłaszcza dwa ostatnie, mogą być w pewnych sytuacjach złagodzone lub zmodyfikowane. Dyskusję powyższych założeń zawarto m.in. w pracy [10].

$$\mathbf{P} = E\{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^H\} \tag{6}$$

Macierz korelacji **R** sygnału **x**(t) anteny oblicza się ze wzoru (7):

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H\} = \mathbf{APA}^H + \sigma^2\mathbf{I} \tag{7}$$

Punktem wyjścia dla rozwiązywania zagadnienia anteny pasywnej jest na ogół równanie (7). Na podstawie określanej z pomiarów estymaty $\hat{\mathbf{R}}$ macierzy korelacji wyznacza się nieznane parametry modelu występujące po prawej stronie równania (7), a więc ilość źródeł M, ich macierz korelacji **P** (lub amplitudy s(t)), wariancję szumów σ^2 oraz namiary źródeł (DOA – *direction of arrival*) θ_i, czyli macierz **A**. Powszechnie stosowana postać estymaty macierzy korelacji, tzw. *sample covariance matrix* dana jest wzorem (8).

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{x}(t_k)\mathbf{x}^H(t_k) = \frac{1}{K}\mathbf{XX}^H \tag{8}$$

Macierz danych wejściowych **X** stanowią kolumnowe wektory *snapshot'ów* określone dla kolejnych chwil czasu $t_1,\ldots,t_K$.

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \ldots, \mathbf{x}(t_K)] \tag{9}$$

Metody rozwiązania podstawowego problemu zagadnienia anteny pasywnej, jakim jest niewątpliwie wyznaczanie namiarów (DOA), można umownie podzielić na spektralne i parametryczne. Metody spektralne [5], do których zalicza się także metody beamformingu, polegają na estymacji DOA kolejnych celów jako maksimów (ekstremów) jednowymiarowej funkcji kąta θ, którą w przypadku metod beamformingu identyfikuje się z przestrzennym spektrum mocy. W metodach parametrycznych dokonuje się jednoczesnej estymacji wszystkich niewiadomych parametrów modelu według przyjętego kryterium. Ze względu na konieczność wielowymiarowej optymalizacji metody parametryczne są bardziej złożone, choć w ogólności wzrost kosztu obliczeniowego jest rekompensowany jakością otrzymywanych rezultatów.

1. METODY NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych technik obliczeniowych stosowanych w metodach parametrycznych jest metoda największej wiarygodności (ML - *maximum likelihood*) polegająca na takim doborze parametrów modelu, aby zmaksymalizować funkcję gęstości prawdopodobieństwa (PDF - *probability density function*) zaobserwowania faktycznie zmierzonych danych eksperymentalnych względem dopuszczalnego zbioru parametrów.

Jeśli przyjmie się deterministyczny model sygnału źródeł s(t), zgodnie z przyjętymi założeniami, sygnał szumu $\mathbf{n}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{A}\mathbf{s}(t)$ jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie Gaussa. Model ten określa się jako DML (*deterministic* ML) lub CML (*conditional* ML). W tym przypadku funkcja łącznej gęstości prawdopodobieństwa zaobserwowania zmierzonych wartości sygnałów $\mathbf{x}(t)$ określanych w chwilach czasu t=1,2,...,K dana jest wzorem (10)

$$f_{DML}\left(\boldsymbol{\theta},s(t),\sigma^2\right)=\prod_{t=1}^{K}\frac{1}{\left(\pi\sigma^2\right)^N}\exp\left[-\frac{\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{A}\mathbf{s}(t)\right\|^2}{\sigma^2}\right] \tag{10}$$

i zależy od parametrów modelu umieszczonych w nawiasie. Istotną wadą modelu DML jest fakt, że wraz ze wzrostem ilości danych doświadczalnych rośnie ilość nieznanych parametrów modelu ze względu na wzrost ilości danych opisujących proces s(t). Poszukiwanie maksimum funkcji f_{DML} jest równoznaczne z szukaniem minimum funkcji $l_{DML}=-(1/K)\ln(f_{DML})$ (*negative log-likelihood function*), która po odpowiednich przekształceniach [1,6,7,8] i wyeliminowaniu s(t) i σ^2 za pomocą wzorów (11) i (12) przyjmuje postać (13).

$$\hat{\mathbf{s}}(t)=\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{x}(t) \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_A^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right) \tag{12}$$

$$l_{DML}(\boldsymbol{\theta})=N(1+\ln\pi-\ln N)+N\ln\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_A^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right) \tag{13}$$

Operator Tr oznacza operację śladu macierzy a $\mathbf{\Pi}_A^{\perp}$ jest macierzą rzutu ortogonalnego na sparametryzowaną podprzestrzeń szumów, czyli dopełnienie podprzestrzeni rozpinanej przez kolumny macierzy **A**. Określą ją wzór (14), w którym **I** oznacza macierz jednostkową.

$$\mathbf{\Pi}_A^{\perp}=\mathbf{I}-\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H \tag{14}$$

Zależność funkcji l_{DML} od $\theta=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_M]$ tkwi właśnie w macierzy $\mathbf{\Pi}_A^{\perp}$. Optymalna wartość θ musi więc zapewniać minimum bezwzględne wyrażenia w nawiasie kwadratowym wyrażenia (15).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{DML}=\arg\left\{\min_{\theta}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_A^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right)\right]\right\} \tag{15}$$

Interpretacja tego wyniku jest taka, że θ powinno być tak wybrane, aby moc zmierzonych sygnałów rzutowanych na zdeterminowaną przez θ podprzestrzeń szumów była minimalna.

Zakładając, że sygnał s(t) jest stacjonarnym, białym czasowo, sygnałem gaussowskim o zerowej wartości średniej spełniającym warunki (16) otrzymujemy zagadnienie zwane SML (*stochastic maximum likelihood*) lub UML (*unconditional maximum likelihood*)

$$\begin{aligned} &E\left\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(u)\right\}=\mathbf{P}\delta_{tu} \\ &E\left\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^T(u)\right\}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{16}$$

Funkcja największej wiarygodności f_{SML} zależeć będzie od θ, **P** oraz σ^2 i przyjmie postać:

$$f_{SML}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{P},\sigma^2)=\prod_{t=1}^{K}\frac{1}{\det[\pi\mathbf{R}]}\exp\left[-\mathbf{x}^H(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(t)\right] \tag{17}$$

Po przekształceniach analogicznych jak dla f_{DML} i obliczeniu funkcji l_{SML} (minus logarytm naturalny f_{SML} podzielony przez K) poszukuje się minimum wyrażenia (18).

$$l_{SML}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{P},\sigma^2)=N\ln\pi+\ln\det\mathbf{R}+\mathrm{Tr}\left(\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{R}}\right) \tag{18}$$

gdzie $\hat{\mathbf{R}}$ jest estymowane z pomiarów wzorem (8), a zależność funkcyjna l_{SML} od swoich zmiennych występuje poprzez macierz korelacji $\mathbf{R}$ daną przez (7).

Minimum funkcji (18) wyznacza się po dokonaniu separacji zmiennych. Estymaty $\hat{\sigma}^2$ i $\hat{\mathbf{P}}$ oblicza się ze wzorów (19) i (20) a funkcja l_{SML} przyjmuje postać (21) [6,8].

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N-M}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right) \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{P}}=\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\left(\hat{\mathbf{R}}-\sigma^2\mathbf{I}\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1} \tag{20}$$

$$l_{SML}=N(1+\ln\pi)+\ln\det\left(\boldsymbol{\Pi}_A\hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Pi}_A+\hat{\sigma}^2\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp}\right) \tag{21}$$

Ostatecznie wektor namiarów $\boldsymbol{\theta}$ jest rozwiązaniem nieliniowego, wielowymiarowego zagadnienia optymalizacyjnego (22).

$$\boldsymbol{\theta}_{SML}=\arg\left\{\min_{\theta}\ln\det\left(\boldsymbol{\Pi}_A\hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Pi}_A+\frac{\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right)}{N-M}\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp}\right)\right\} \tag{22}$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia realizuje się za pomocą metod newtonowskich [9,14], przy czym wymagane jest pierwsze przybliżenie szukanych parametrów. Procedura ta jest bardzo kosztowna obliczeniowo, nie daje też gwarancji znalezienia globalnego minimum. Prowadzi jednak do bardzo dobrych rezultatów (mała wariancja estymatora) nawet jeśli sygnały nie podlegają rozkładowi Gaussa, a także w przypadku silnej korelacji sygnałów (osobliwej macierzy **P**) oraz małej ilości danych K (dotyczy też przypadku K=1, tzw. *single snapshot case*).

Podejmuje się różne próby uproszczenia przedstawionych powyżej złożonych zagadnień minimalizacyjnych. W pracy [15] zaproponowano tak zwaną metodę AP (*alternating projection*) polegającą na optymalizacji wyrażenia (15) sekwencyjnie dla wszystkich kolejnych zmiennych. Inną metodą jest reparametryzacja modelu omawiana w rozdziale 3 niniejszej pracy.

2. METODY DOPASOWANIA PODPRZESTRZENI

Odrębną klasę metod parametrycznych stanowią tak zwane metody dopasowania podprzestrzeni (*subspace fitting methods*) [7,8,13]. W wyniku rozkładu własnego [5] macierzy korelacji **R** określonej wzorem (7) otrzymuje się N rzeczywistych, dodatnich wartości własnych $\{\lambda_i\}_1^N$, które po uporządkowaniu nierosnącym tworzą ciąg $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_{M'}>\lambda_{M'+1}=\ldots=\lambda_N=\sigma^2>0$ oraz ortonormalny zbiór odpowiadających im wektorów własnych $\{\mathbf{u}_i\}_1^N$. Jeśli macierz korelacji źródeł **P** jest pełnego rzędu, to M'=M, a w ogólności M'=rank(**P**). Ponieważ M' pierwszych wektorów własnych należy do podprzestrzeni sygnałów, a więc są one kombinacją liniową wektorów kierujących, istnieje macierz pełnego rzędu **T** (wymiaru MxM') spełniająca równość (23).

$$[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_{M'}]=:\mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{T} \tag{23}$$

Ponieważ w praktyce w miejsce macierzy **F** podstawia się macierz $\hat{\mathbf{F}}$ estymowaną na podstawie rozkładu macierzy $\hat{\mathbf{R}}$ zakłada się spełnienie powyższej równości w sensie minimum normy Frobeniusa (24) dla dopuszczalnego zestawu parametrów θ i macierzy **T**.

$$\min_{\theta,\mathbf{T}} \left\| \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{A}\mathbf{T} \right\|_F \tag{24}$$

Eliminując z powyższego wyrażenia metodą najmniejszych kwadratów (LMS - *least mean square*) macierz **T** otrzymuje się, że wektor θ stanowiący rozwiązanie problemu jest argumentem minimalizującym wartość funkcji $f_{SSF}(\theta)$.

$$f_{SSF}(\theta) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_A^{\perp} \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H\right) \tag{25}$$

Optymalizacja powyższej funkcji polega na zastosowaniu macierzy ważącej **W** i prowadzi do metody WSF (*weighted subspace fitting*).

$$f_{WSF}(\theta) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_A^{\perp} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}}^H\right) \tag{26}$$

Powyższą metodę bez ważenia (**W**=**I**) proponuje się w pracy [4]. Optymalna macierz wagowa wg [13] dana jest jednak wzorem (27).

$$\mathbf{W}_{opt} = \left(\hat{\Lambda}_s - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}\right)^2 \hat{\Lambda}_s^{-1} \tag{27}$$

$$\hat{\Lambda}_s = \mathrm{diag}\left[\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_{M'}\right] \tag{28}$$

Technika WSF należy do najefektywniejszych metod estymacji kierunków źródeł a jej efektywność, przy mniejszym koszcie obliczeniowym, jest porównywalna z metodą SML.

3. REPARAMETRYZACJA MODELU

Zasadnicze trudności optymalizacyjne w przedstawionych modelach wynikają z silnej nieliniowości optymalizowanych funkcji względem poszukiwanego zestawu parametrów θ. Dla anteny o określonej strukturze można jednak dokonać reparametryzacji przedstawionych modeli. Antena liniowa (ULA) stwarza w tym zakresie duże możliwości. Reparametryzacja zaproponowana w pracach [2,11] polega na wprowadzeniu macierzy pełnego rzędu **B** o wymiarze Nx(N-M) zdefiniowanej wzorem (29).

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} b_M & \cdots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & b_M & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Liczby $\mathbf{b} = \{b_i\}_0^M$ są współczynnikami wielomianu (30), w którym ϕ_i są częstościami przestrzennymi (5) odpowiadającymi położeniu źródeł θ_i.

$$b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \ldots + b_M = b_0 \prod_{k=1}^{M} \left(z - e^{j\phi_k}\right) \tag{30}$$

W takim przypadku nietrudno sprawdzić, że dla macierzy **A** o charakterystycznej dla ULA strukturze Vandermonde'a zachodzi równość (31).

$$\mathbf{A}^H \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{31}$$

Powyższy warunek oznacza, że podprzestrzenie rozpinane przez kolumny **A** i **B** są wzajemnym dopełnieniem ortogonalnym i spełnione jest równanie (32). W oczywisty sposób zachodzi również zależność (33).

$$\mathbf{\Pi}_B = \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^H \mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{B}^H = \mathbf{I} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^H = \mathbf{\Pi}_A^{\perp} \tag{32}$$

$$\mathbf{\Pi}_B^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^H \mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{B}^H = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^H = \mathbf{\Pi}_A \tag{33}$$

Zastępując w optymalizowanych funkcjach (13), (21), (26) $\mathbf{\Pi}_A^{\perp} \leftarrow \mathbf{\Pi}_B$ oraz $\mathbf{\Pi}_A \leftarrow \mathbf{\Pi}_B^{\perp}$ otrzymujemy modele zależne od wektora parametrów **b**, które z uwagi na liniową zależność **B**(**b**) są znacznie wygodniejsze w badaniach. Po wyznaczeniu wektora parametrów **b** oblicza się pierwiastki wielomianu zespolonego (30), a następnie dla wyznaczonych częstości przestrzennych ϕ_i określa ze wzoru (5) namiary θ_i.

Przedstawioną reparametryzację w odniesieniu do algorytmów DML i SML zastosowano w pracy [9]. W odniesieniu do metody DML, przy iteracyjnym poszukiwaniu rozwiązań, otrzymuje się tak zwany algorytm IQML [3,7] (*iterative quadratic* ML). Wydaje się jednak [7], że najlepsze rezultaty przynosi przedstawiona metoda reparametryzacji w odniesieniu do techniki WSF. Otrzymany algorytm zwany MODE [11,12] (*method of direction estimation*) ogranicza się do jednej iteracji i przy efektywności porównywalnej z metodą SML jego złożoność obliczeniowa nie przewyższa złożoności metod spektralnych.

LITERATURA

1. J.F. Bohme, „Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields", Signal Processing v.11, 329-337, 1986.
2. Y. Bresler, A. Macovski, „Exact ML parameter estimation of superimposed exponential signals in noise", Trans. on ASSP, v.34, 1081-1089, 10'86.
3. M.P. Clark, L.L. Scharf, „On the complexity of IQML algorithm", Trans. on SP, v.40, 1811-1813, 07'92.
4. J.A. Cadzow, „A high resolution DOA algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources", Trans. on ASSP v.36, 965-979, 07'88.
5. S. Henclik, „Spektralne metody określania kierunków źródeł fal hydroakustycznych w pasywnych systemach lokalizacji", VII SWTM, Gdynia, 10'99.
6. S. Henclik, „Metody lokalizacji celów w pasywnych systemach hydroakustycznych", wyd. wew. OBR CTM nr RF-2000/T-031, Gdynia, 2000.
7. H. Krim, M. Viberg, „Two decades of array signal processing research", IEEE Signal Processing Magazine, 67-94, 07'96.
8. B. Ottersten, M. Viberg, T. Kailath, „Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data", Trans. on SP v.40, 590-600, 03'92.
9. D. Starer, A. Nehorai, „Newton algorithms for conditional and unconditional ML estimation of the parameters of exponential signals in noise", Trans. on ASSP v.40, 1528-1534, 06'92.
10. P. Stoica, A. Nehorai, „MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao bound", Trans. on ASSP v.37, 720-741, 05'89.
11. P. Stoica, K.C. Sharman, „Maximum likelihood methods for DOA estimation", Trans. on ASSP v.38, 1132-1143, 07'90.
12. P. Stoica, K.C. Sharman, „Novel eigenanalysis methods for direction estimation", IEE Proceedings v.137, Pt. F, 19-26, 02'90.
13. M. Viberg, B.Ottersten, T. Kailath, „Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting", Trans. on ASSP v.39, 2436-2449, 11'91.
14. R. Wit, „Metody programowania nieliniowego", WNT, W-wa 1986, 57-68.
15. I. Ziskind, M. Wax, „Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection", Trans. on ASSP v.36, 1553-1560, 10'88.