

Tomasz JANICZEK, Janusz JANICZEK

WYBRZEŻE WYSPIAŃSKIEGO 27 WROCLAW

(INSTYTUT INFORMATYKI AUTOMATYKI I ROBOTYKI POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ)

UL. B. PRUSA 53/55 WROCLAW

(KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ)

Implementacja ułamkowego rachunku różniczkowego do identyfikacji modeli systemów ułamkowych**dr inż. Tomasz JANICZEK**

Adiunkt w Instytucie Informatyki Automatyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej. Absolwent Wydziału Elektroniki w 1997 r. Obronił pracę doktorską w 2003 r.

Zainteresowania dotyczą przetwarzania obrazów ułamkowego rachunku różniczkowego, żeglarstwa.



e-mail: tomasz.janiczek@pwr.wroc.pl

dr inż. Janusz JANICZEK

Docent w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Jest absolwentem Wydziału Elektroniki tej uczelni – rocznik 1979. Po ukończeniu studiów pracował w Instytucie Metrologii Elektrycznej gdzie w 1976 r. obronił pracę doktorską.

Jego zainteresowania dotyczą analogowych torów pomiarowych, przetworników A/C i C/A oraz mikrokontrolerów w zastosowaniu do aparatury pomiarowo-kontrolnej.



e-mail: janusz.janiczek@pwr.wroc.pl

Streszczenie

W artykule omówiono podstawowe pojęcia związane z ułamkowym rachunkiem różniczkowym jak uogólnione definicje całki i pochodnej rzędu ułamkowego oraz właściwości przekształceń z nimi związanych. Pokazano przekształcenia i możliwości wykorzystania ułamkowego rachunku różniczkowego na bazie identyfikacji parametrów przetwornika PVDF i modyfikowanego tlenku bizmutu Bi_2O_3 , pozwalające na wyliczenie funkcji oryginalnej.

Słowa kluczowe: pochodna ułamkowa, ułamkowy rachunek różniczkowy, identyfikacja

Implementation of fractional differential calculus to identify models of fractional systems**Abstract**

This paper presents fundamental definitions concerning fractional calculus as generalized definitions of fractional integral and derivative and their properties. It shows transformations and possibilities of using fractional differential equation on a base of identification of parameters of PVDF transducer and of a modified bismuth oxides Bi_2O_3 , leading to evaluate the original function.

Keywords: fractional derivative, fractional calculus, identification

1. Wstęp

Ułamkowy rachunek różniczkowy, mimo że jest skomplikowany pod względem przekształceń matematycznych a proces obliczeń jest zmutny i czasochłonny, wprowadza innowacyjność w jakości obliczeń [1, 2]. Zwiększa ich dokładność oraz ukazuje nowy wymiar zjawisk, które nie mogą być opisane przez klasyczny rachunek różniczkowy. Może zatem mieć szerokie zastosowanie na przykład w identyfikacji parametrów systemów, a przez to może służyć do oceny ich jakości, do szerszego opisanie zjawisk w materiałoznawstwie, wyznaczenia większej dokładności w pomiarach, itp. [6, 7].

Dopiero rozwój techniki komputerowej objawiający się zwiększeniem wydajności obliczeniowej komputerów pozwala na stosowanie coraz to dokładniejszych i skomplikowanych technik przetwarzania danych w różnorodnych procesach między innymi

w zastosowaniu nowego aparatu matematycznego, jakim jest ułamkowy rachunek różniczkowy.

Okazuje się, że w badaniach materiałowych zastosowanie ułamkowego rachunku różniczkowego znacznie upraszcza budowanie modeli zastępczych, co ułatwia analizy właściwości materiałów. Używając klasycznych rozwiązań należałoby stosować niekiedy złożone aproksymacje modeli ułamkowych, skomplikowanymi rozwinięciami R-C, co może utrudnić obliczenia a tym samym pogorszyć ich dokładność.

Jednym z przykładów zastosowań jest materiał piezoelektryczny PVDF wyprodukowany w celach eksperymentalnych w Instytucie Elektrotechniki oraz modyfikowany tlenek bizmutu Bi_2O_3 będący składnikiem warystorów [5, 6, 7]. W trakcie badań spektrometrii impedancyjnej autorzy stwierdzili, iż modele opisujące najprościej właściwości elektryczne wspomnianych materiałów da się wyrazić w postaci ułamkowego równania różniczkowego. Znalazienie parametrów takiego modelu wymagało posłużenia się technikami identyfikacji, które wymagałyby uwzględnienia tego typu zjawisk. Zaisniala zatem potrzeba stworzenia mechanizmu umożliwiającego identyfikację parametrów takiego materiału w oparciu o matematyczny aparat ułamkowych równań różniczkowych.

W artykule przedstawiony został model modyfikowanego tlenku bizmutu i model materiału PVDF oraz matematyczne przekształcenia zależności pozwalające na wyznaczenie funkcji oryginalnej dla założonego modelu elektrycznego na podstawie materiału PVDF [7]. Zaznaczyć należy iż w artykule pokazano implementację rachunku ułamkowego i jego użycie bez odnośnienia się bezpośrednio do właściwości fizycznych prezentowanych materiałów, które są opisane w literaturze [5–7].

2. Podstawowe pojęcia i własności

W rozdziale tym przedstawiono definicje i najważniejsze własności związane z przekształceniami całek i pochodnych rzędu ułamkowego. Własności te ułatwiają przekształcenia zależności całkowych bądź różniczkowych stosowanych w dalszej części pracy.

Definicja 1. Całka rzędu ułamkowego w sensie Riemanna-Liouville

Dla wartości rzeczywistych $z > 0$ oraz $f(t)$ dla $t > 0$ będącą funkcją przedziałami ciągłą na $J' = (0, \infty)$ i całkowaną na każdym

skończonym podprzedziale $J=[0, \infty)$, można zdefiniować całkę rzędu ułamkowego z funkcji $f(t)$ jako:

$$D^{-z}f(t) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^t (t-\varepsilon)^{z-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

gdzie $\Gamma(z)$ jest funkcją gamma [1]. Przedział całkowania $(0, t)$ dotyczy wszystkich rozpatrywanych zagadnień. Dla $z = n$, gdzie n przyjmuje wartości całkowite, otrzymuje się zwykłą całkę funkcji $f(t)$.

Definicja 2. Pochodna rzędu ułamkowego w sensie Riemann-Liouville

Niech $\mu > 0$ i m będzie najmniejszą liczbą naturalną nie mniejszą od μ oraz $z = m - \mu$. Wówczas pochodna rzędu ułamkowego μ (jeżeli istnieje) funkcji $f(t)$ dla $t > 0$ jest zdefiniowana następująco:

$$D^\mu f(t) = D^m [D^{-z}f(t)] \quad (2)$$

Wzór (2) wynika z m -krotnego zróżniczkowania wzoru (1), tak aby uzyskać ułamkowy rząd pochodnej równy wartości μ . Przy założeniu że $m = \mu$, wtedy $z = 0$ i postać z wyrażenia (2) staje się prostą tożsamością. Natomiast jeżeli μ jest dodatnią wartością całkowitą równą p , wtedy pochodna $D^p f(t)$ może istnieć dla $t > 0$ nawet jeśli funkcja $f(t)$ nie spełnia definicji 1. Dla przykładu niech funkcja $f(t)$ będzie miała postać $f(t) = t^{-1}$. W przypadku gdy funkcja $f(t)$ ma ciągłą pochodną rzędu p na J , to funkcja ta spełnia definicję 1 i z zależności (3)

$$D^p f(t) = D^{p+1} \int_0^t f(\varepsilon) d\varepsilon = D^p f(t) \quad (3)$$

wynika, że wyrażenie (2) zgadza się z definicją klasycznej pochodnej [1, 2].

Własność 1.

Jeśli D określa operatory całkowania bądź różniczkowania występujące w definicjach 1 i 2 oraz funkcje $f(t)$ i $g(t)$ spełniają wymagania sformułowane w definicjach 1 i 2, to dla każdej wartości α i β zachodzi zależność:

$$D[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha Df(t) + \beta Dg(t) \quad (4)$$

Własność 2.

Niech funkcja $f(t)$ będzie spełniała wymagania sformułowane w definicji 1 i niech $\mu > 0$ oraz $z > 0$, wtedy dla każdego $t > 0$ zachodzi zależność:

$$D^{-z}[D^{-\mu}f(t)] = D^{-(\mu+z)}f(t) = D^{-\mu}[D^{-z}f(t)] \quad (5)$$

Własność 3.

Niech $f(t)$ będzie ciągła na J i niech $z > 0$, wtedy jeżeli $D^p f(t)$ spełnia wymagania sformułowane w definicji 1 to:

$$D^{-z-p}[D^p f(t)] = D^{-z}f(t) - Q_p(t, z) \quad (6)$$

$$\text{gdzie: } Q_p(t, z) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^{z+k}}{\Gamma(z+k+1)} D^k f(0) \quad (7)$$

Własność 4.

Niech p będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech funkcja postaci $D^{p-1}f(t)$ będzie ciągła na J . Wtedy dla $t > 0$ i $z > 0$ zachodzi zależność:

$$D^p[D^{-z}f(t)] = D^{-z}[D^p f(t)] + Q_p(t, z-p) \quad (8)$$

$$\text{gdzie: } Q_p(t, z-p) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^{z-p+k}}{\Gamma(z-p+k+1)} D^k f(0) \quad (9)$$

Własność 5.

Niech $f(t)$ ma ciągłą pochodną na J . Niech p będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $z > p$, wtedy dla każdego $t \in J$:

$$D^p[D^{-z}f(t)] = D^{-(z-p)}f(t) \quad (10)$$

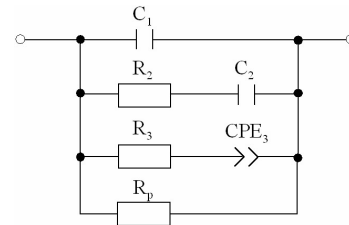
Własność 6.

Niech funkcja $f(t)$ będzie ciągła na przedziale $[0, T]$ i niech $g(t)$ będzie funkcją analityczną w przedziale $[0, T]$, przy czym $t \in (0, T]$. Wówczas dla $z > 0$ zachodzi zależność zwana wzorem Leibniza:

$$D^{-z}[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-z}{k} [D^k g(t)] [D^{-z-k} f(t)] \quad (11)$$

3. Implementacja ułamkowego rachunku różniczkowego

Poniższe przykłady pokazują implementację ułamkowego rachunku różniczkowego w zastosowaniu do modelowania właściwości materiałów. Na rysunku 1 przedstawiono model zastępczy modyfikowanego tlenku bizmutu a na rysunku 2 materiału PVDF. Z uwagi na to iż modele te różnią się dodatkową połączoną równolegle rezystancją, do rozważań wybrano „prostszy” model opisujący materiał PVDF. Przedstawiono zatem przekształcenia związane z ułamkowym rachunkiem różniczkowym bazującym na modelu elektrycznym materiału PVDF pozwalające na wyliczenie funkcji oryginalnej dla założonego modelu elektrycznego.



Rys. 1. Model zastępczy modyfikowanego tlenku bizmutu.
Fig. 1. The equivalent circuit of the modified bismuth oxides.

Dla prezentowanego z rysunku 1 tlenku bizmutu model matematyczny można zapisać w następujący sposób:

$$L(b_n D)y(t) = P(a_n D)u(t) \quad (12)$$

gdzie: $u(t)$ – sygnał wejściowy, $y(t)$ – sygnał wyjściowy,

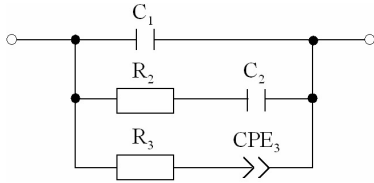
$$L(b_n D) = [b_1 D^{\varphi+2} + b_2 D^2 + b_3 D^{\varphi+1} + b_4 D + b_5 D^{\varphi} + b_6] \quad (13)$$

$$P(a_n D) = [a_1 D^{\varphi+1} + a_2 D + a_3 D^{\varphi} + a_4] \quad (14)$$

Z kolei dla materiału PVDF podobnie jak dla tlenku bizmutu w oparciu o literaturę [3, 4] oraz przeprowadzone pomiary [5, 6, 7] założono model zastępczy (bez udziału rezystancji doprowadzeń), rysunek 2. W modelu tym oprócz elementów R i C wprowadzono niedobajowski element CPE [4, 7], którego transmitancja jest określona następującym wyrażeniem:

$$\text{CPE}(\omega) = T^{-1}(j\omega)^{-\varphi}, \quad (15)$$

przy czym współczynniki T i $\varphi \in (0,1)$ są stałymi. W szczególnych przypadkach: dla $\varphi=0$, element CPE przyjmuje właściwości rezystancji, zaś gdy $\varphi=1$ element CPE odpowiada pojemności. Element CPE w modelu matematycznym przy przekształceniu czasowym np. L^{-1}, F^{-1} wprowadza pochodną ułamkową zapisaną w postaci $\frac{d^\varphi y(t)}{dt^\varphi}$ lub przy zapisie symbolicznym $D^\varphi y(t)$.



Rys. 2. Model zastępczy przewodu PVDF.
Fig. 2. The equivalent circuit of the PVDF cable.

W dziedzinie czasowej odpowiedź impulsowa tego modelu wyrażona jest przez równanie różniczkowe o pochodnej rzędu ułamkowego:

$$L(b_n D)y(t) = P(a_n D)u(t) \quad (16)$$

gdzie:

$$L(b_n D) = \left[b_1 D^{\varphi+2} + b_2 D^2 + b_3 D^{\varphi+1} + b_4 D + b_5 D^\varphi \right] \quad (17)$$

$$P(a_n D) = \left[a_1 D^{\varphi+1} + a_2 D + a_3 D^\varphi + a_4 \right] \quad (18)$$

Współczynniki a_i oraz b_i dla modelu elektrycznego materiału PVDF odpowiadają odpowiednio:

$$\begin{cases} a_1 = R_2 R_3 C_2 T \\ a_2 = R_2 C_2 \\ a_3 = R_3 T \\ a_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = R_2 R_3 C_1 C_2 T \\ b_2 = R_2 C_2 C_1 \\ b_3 = R_3 C_1 T + R_3 C_2 T + R_2 C_2 T \\ b_4 = C_1 + C_2 \\ b_5 = T \end{cases}$$

Należy zaznaczyć, iż założony model odpowiadający badanemu materiałowi PVDF jest prosty i oparty na sugestiach literaturowych dotyczących podobnych rodzajów materiałów [7]. Sprawdza się on dla różnych temperatur i przy różnych siłach nacisku. Można byłoby zamiast założonego modelu stworzyć model oparty o elementy R, C , jednakże byłby to model bardzo złożony, trudny do analizy i mógłby nie odzwierciedlać zjawisk zachodzących w materiale [7].

Rozwiązanie tego równania elementarnymi przekształceniami jest dość skomplikowane. Wygodnie jest zatem posłużyć się przekształceniem Laplace'a [7], w wyniku którego można uzyskać oryginał $y(t)$. Oryginał ten będzie równocześnie rozwiązaniem równania różniczkowego o pochodnej rzędu ułamkowego (16). W przekształceniu Laplace'a równanie to można zapisać następująco:

$$Z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_1 s^{\varphi+1} + a_2 s + a_3 s^\varphi + a_4}{b_1 s^{\varphi+2} + b_2 s^2 + b_3 s^{\varphi+1} + b_4 s + b_5 s^\varphi} \quad (19)$$

Zakłada się iż $\varphi \in (0,1)$. Dla $\varphi=0$ albo $\varphi=1$ przedstawione wyrażenie przyjmuje postać zwykłego równania z pochodnymi

stopnia naturalnego. Wylączając s^φ przed nawias w mianowniku wyrażenia (19) uzyskuje się:

$$Z(s) = \frac{a_1 s^{\varphi+1} + a_2 s + a_3 s^\varphi + a_4}{s^\varphi (b_1 s^2 + b_2 s^{2-\varphi} + b_3 s^1 + b_4 s^{1-\varphi} + b_5)} \quad (20)$$

Stosując skrócony zapis, można przyjąć iż:

$$X(s) = (b_1 s^2 + b_2 s^{2-\varphi} + b_3 s^1 + b_4 s^{1-\varphi} + b_5) \quad (21)$$

Wtedy wyrażenie (20) można przedstawić jako sumę czterech ułamków:

$$Z(s) = \frac{a_1 s^{\varphi+1}}{s^\varphi X(s)} + \frac{a_2 s}{s^\varphi X(s)} + \frac{a_3 s^\varphi}{s^\varphi X(s)} + \frac{a_4}{s^\varphi X(s)} \quad (22)$$

których skrócona postać wyraża się wzorem:

$$Z(s) = \sum_{i=1}^4 Z_i(s) \quad (23)$$

gdzie poszczególne wyrazy $Z_i(s)$ są zapisane jako:

$$Z_i(s) = \frac{a_i}{s^{d_i} X(s)} \quad (24)$$

przy czym d_i : $d_1 = -1$; $d_2 = \varphi - 1$; $d_3 = 0$; $d_4 = \varphi$;

Niech $\varphi = \frac{n}{k}$ oraz k, n są liczbami całkowitymi, przy czym

$k > n > 0$. Wtedy s^p będzie się wyrażało jako: $s^p = \left(\frac{1}{s^k} \right)^{kp}$,

gdzie p przybiera wartości potęg s z równości (24).

Podstawiając za $s^k = q$, wielomian $X(s)$ będzie można zapisać w postaci:

$$X(q) = (b_1 q^{2k} + b_2 q^{2k-n} + b_3 q^k + b_4 q^{k-n} + b_5) \quad (25)$$

Można zatem utworzyć wielomian o następującej postaci:

$$f(y) = (y)^d + a_1 (y)^{d-1} + \dots + a_d (y)^0 \quad (26)$$

Przyrównując następnie powyższy wielomian do zera czyli $f(y) = 0$, stwierdza się iż takie równanie ma d pierwiastków y_i . Wówczas można je zapisać w postaci skróconej:

$$f(y) = \prod_{i=1}^d (y - y_i) \quad (27)$$

gdzie y_i jest pierwiastkiem równania $f(y)=0$ o następujących zależnościach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_i &= -a_1 & \sum_{i,j=1(i<j)}^k y_i \cdot y_j &= a_2 \\ \sum_{i,j=1(i<j)}^k y_i \cdot y_j \cdot y_l &= -a_3 & \dots & y_1 \cdot \dots \cdot y_n = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

Niech istnieje ułamek o postaci $\frac{p(y)}{f(y)}$, który da się wyrazić w oparciu o przekształcenia równań (26, 27) następująco:

$$\frac{p(y)}{f(y)} = \frac{p(y)}{\prod_{i=1}^d (y - y_i)} \quad (28)$$

Rozdzielając na ułamki proste ułamek z równości (28) otrzymuje się zapis:

$$\frac{p(y)}{f(y)} = \sum_{i=1}^d \frac{p(y_i)}{D^1[f(y_i)] \cdot (y - y_i)} \quad (29)$$

gdzie ułamek $\frac{p(y_i)}{D^1 f(y_i)} \in \mathbb{R}$ (jest wartością w punkcie y_i)

Zatem stosując rozbiecie na ułamki proste z wyrażeń (23,24), uwzględniając zapis z zależności (25) oraz podstawiając za $\frac{1}{s^k} = q$ otrzymuje się:

$$Z_1(q) = \frac{a_1}{q^{-k} X(q)} = \frac{a_1}{q^{-k}} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (30)$$

$$Z_2(q) = \frac{a_2}{q^{-n-k} X(q)} = \frac{a_2}{q^{-n-k}} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (31)$$

$$Z_3(q) = \frac{a_3}{X(q)} = a_3 \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (32)$$

$$Z_4(q) = \frac{a_4}{q^n X(q)} = \frac{a_4}{q^n} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (33)$$

Niech $U(s)$ będzie postaci $U(s) = m \cdot \frac{1}{s}$. Zatem stosując powyższe podstawienie za s ($s^k = q$) czyli $U(q) = m \cdot \frac{1}{q^k}$

do wyrażenia (19), wyrażenia (30–33) przyjmą następujące postaci:

$$Y_1(q) = \frac{m}{q^k} \frac{a_1}{q^{-k} X(q)} = \frac{ma_1}{q} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (34)$$

$$Y_2(q) = \frac{m}{q^k} \frac{a_2}{q^{-n-k} X(q)} = \frac{ma_2}{q^n} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (35)$$

$$Y_3(q) = \frac{m}{q^k} \frac{a_3}{X(q)} = \frac{ma_3}{q^k} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (36)$$

$$Y_4(q) = \frac{m}{q^k} \frac{a_4}{q^n X(q)} = \frac{ma_4}{q^{k+n}} \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{D^1 X(q_i) \cdot (q - q_i)} \quad (37)$$

Mając pełny zapis dla transformaty $Y(s)$, można wyliczyć funkcję oryginalną $y(t)$.

Ostatecznie podstawiając za $q = s^k$ przy zastosowaniu transformat odwrotnych oraz funkcji E_t przedstawionych w [1, 7], funkcja oryginalna $y(t)$ będzie miała postać:

$$y(t) = L^{-1}\{Y_1(s)\} + L^{-1}\{Y_2(s)\} + L^{-1}\{Y_3(s)\} + L^{-1}\{Y_4(s)\} \quad (38)$$

gdzie:

$$L^{-1}\{Y_1(s)\} = ma_1 \sum_{j=1}^{2k} \left(Dx \sum_{i=1}^2 q_j^{i-1} E_t \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2}, q_j^2 \right) \right) \quad (39)$$

$$L^{-1}\{Y_2(s)\} = ma_2 \sum_{j=1}^{2k} \left(Dx \sum_{i=1}^2 q_j^{i-1} E_t \left(\frac{i}{2} - 1 + \frac{n}{2}, q_j^2 \right) \right) \quad (40)$$

$$L^{-1}\{Y_3(s)\} = ma_3 \sum_{j=1}^{2k} \left(Dx \sum_{i=1}^2 q_j^{i-1} E_t \left(\frac{i}{2} - 1 + \frac{k}{2}, q_j^2 \right) \right) \quad (41)$$

$$L^{-1}\{Y_4(s)\} = ma_4 \sum_{j=1}^{2k} \left(Dx \sum_{i=1}^2 q_j^{i-1} E_t \left(\frac{1}{2} i - 1 + \frac{n+k}{2}, q_j^2 \right) \right) \quad (42)$$

$$Dx = \frac{1}{D^1 X(q_j)} \quad (43)$$

4. Podsumowanie

Przeprowadzone powyżej rozważania pomagają w dokładniejszym opisie właściwości różnego rodzaju materiałów w tym materiałów prezentowanych w niniejszym artykule.

Dzięki temu będzie można łatwiej i precyzyjniej sterować procesami technologicznymi wytwarzania nowoczesnych materiałów oraz kontrolować ich parametry. Należałoby przy tym zaznaczyć, iż dzięki metodom identyfikacji można poszukać bardziej złożonych modeli zastępczych, które dokładniej by odzwierciedlały właściwości modyfikowanego tlenku bizmutu. Trzeba jednak stwierdzić, iż poszukiwanie rozbudowanych modeli musi być skorelowane z właściwościami rzeczywistymi rozpatrywanego obiektu.

Zastosowany model stanowić będzie podstawę do dalszych badań oraz pozwoli na dokonanie wielu symulacji zachowań się badanego materiału dla różnych sygnałów pobudzających.

5. Literatura

- [1] K. B. Oldham, J. Spanier „The Fractional Calculus” ISBN 0-12-525550-0 Academic Press inc. London 1974
- [2] I. Podlubny „Fractional Differential Equations” ISBN 0-12-558840-2 Academic Press USA 1999
- [3] J.R. MacDonald, W.R. Kenan: Impedance Spectroscopy: Emphasis Solid Materials and Systems (Wiley-Inter-Science, 1987).
- [4] W. Bogusz, F. Krok „Elektrolity Stałe właściwości elektryczne i sposoby ich pomiaru” WNT Warszawa 1995 ISBN 83-204-1804-6
- [5] T. Janiczek „Analysis of PVDF transducer signals stimulated by mechanical tension” Journal of Electrostatics vol 51-52 Issue May 2001
- [6] T. Janiczek, D. Nowak-Woźny, W. Mielcarek K. Prociow Equivalent Model of Modified Bismuth Oxides Described by Fractional Derivatives Key Engineering Materials Vols. 336-338 (2007) pp. 676-679
- [7] T. Janiczek “Models of systems described by fractional differential equations and basic algorithms of their identification.” preprint of Ph.D. Wrocław University of Technology, 2003

Praca wykonana w ramach projektu finansowanego przez Fundacje Nauki Polskiej.

Artykuł recenzowany